Л. Н. Пестов, В. А. Шарафутдинов, Интегральная геометрия тензорных полей на многообразии отрицательной кривизны,
Докл. АН СССР, 1987, том 295, номер 6, 1318–1320

https://www.mathnet.ru/dan8009

такое, что при любом $A > A(R)$ задача

$$\|P(D)f\|_\infty \to \sup, \quad \|f\|_\infty = 1, \quad \|R(D)f\|_\infty = A,$$

имеет решение $f_0(x)$, $R(D)f_0(x) = A\,\mathrm{sign}\sin(\rho x)$, где ρ определяется условием $\|f_0\|_\infty = 1$. Если все нули многочлена R вещественны, то $A(R) = 0$, т.е. на A нет условий.

Теорема 6 для случая, когда все нули R вещественны, вытекает из работы [13].

Автор благодарен В.М. Тихомирову за постановку ряда задач и постоянное внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
26 II 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Polya G.* – J. reine u. angew. Math., 1915, Bd. 145, S. 224–249. 2. *Mairhuber J.C., Schoenberg I.J., Williamson R.E.* – Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 1959, vol. 8, p. 241–270. 3. *Pinkus A.* n-Width in approximation theory. B.: Springer-Verlag, 1985. 4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 5. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1979. 256 с. 6. *Женсыкбаев А.А.* – УМН, 1981, т. 36, № 4, с. 107–159. 7. *Осколков К.И.* – ДАН, 1979, т. 249, № 1, с. 49–52. 8. *Чахкиев М.А.* – ДАН, 1982, т. 264, № 4, с. 836–839. 9. *Нгуен Тхи Т.Х.* – УМН, 1984, т. 39, № 2, с. 177–178. 10. *Бабенко В.Ф., Гранкина Т.А.* Исследован. по соврем. пробл. суммир. и приближ. функций и их прилож., 1982, с. 6–13. 11. *Тихомиров В.М., Боянов Б.Д.* – Сердика Бълг. матем. спис., 1979, т. 5, с. 84–96. 12. *Боянов Б.Д.* – Докл. Болг. Акад. наук, 1977, т. 30, № 6, с. 809–812. 13. *Нгуен Тхи Т.Х.* – Вестн. МГУ. Матем., мех., 1982, № 5, с. 3–7. 14. *Теляковский С.А., Тихомиров В.М.* В кн.: Колмогоров А.Н. Избр. тр. Математика и механика. М.: Наука, 1985, с. 382–386. 15. *Volodina I.N.* – Anal. Math., 1985, vol. 11, p. 85–92.

УДК 517.9 + 513/516 МАТЕМАТИКА

Л.Н. ПЕСТОВ, В.А. ШАРАФУТДИНОВ

ИНТЕГРАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ НА МНОГООБРАЗИИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 13 II 1986)

Многие задачи таких прикладных дисциплин, как томография, математическая теория переноса, сейсмология и теоретическая фотометрия, приводят к вопросам, подобным следующему.

Пусть M – гладкое компактное риманово многообразие размерности $n \geqslant 2$ с краем ∂M. Предположим, что M является рассеивающим, т.е. каждая геодезическая $\gamma_{x,\xi}(t)$, выходящая из точки $x \in M$ в направлении единичного вектора ξ при некотором $t = t(x, \xi)$, $0 \leqslant t(x, \xi) < \infty$, пересекает ∂M. Тогда для любого гладкого симметричного тензорного поля $f = (f_{i_1 \ldots i_m})$ валентности m на M и любой геодезической γ определен интеграл

$$If(x, \xi) = \int_0^{t(x,\xi)} f_{i_1 \ldots i_m}(\gamma_{x,\xi}(t))\dot\gamma^{i_1}_{x,\xi}(t) \ldots \dot\gamma^{i_m}_{x,\xi}(t)dt, \qquad x \in \partial M.$$

Здесь и в дальнейшпм по повторяющимся нижним и верхним индексам подразумевается суммирование от 1 до n.

Спрашивается: насколько однозначно поле f определяется функцией $If(x, \xi)$?

В случае $m = 0$, $m = 1$ соответствующие теоремы единственности при условии регулярности поля геодезических получены в [1–3], а при произвольном m для евклидова пространства – в [4–6]. В настоящей работе последний результат обобщается на римановы многообразия неположительной кривизны.

Обозначим через $S^m T'$ расслоение симметричных ковариантных тензоров валентности m на M. Если M компактно, то для любого гладкого расслоения E над M и целого $s \geqslant 0$ определено [7] топологическое гильбертово пространство $H^s(E)$ сечений, компоненты которых в произвольной системе координат имеют обобщенные, локально интегрируемые в квадрате производные до порядка s. Зафиксировав конечный атлас на M и подчиненное ему разбиение единицы, снабдим $H^s(S^m T')$ и $H^s(S^m T'|_{\partial M})$ структурой гильбертовых пространств. Нормы в этих пространствах будем обозначать $\|\cdot\|_s$. Напомним, что для $s \geqslant 1$ оператор следа

$$H^s(S^m T') \to H^{s-1}(S^m T'|_{\partial M}), \quad f \to f|_{\partial M}$$

ограничен. Ядро этого оператора обозначим $K^s(S^m T')$.

Следующая теорема обобщает на симметричные тензорные поля хорошо известный факт о разложении векторного поля ($m = 1$) на потенциальную и соленоидальную части.

Теорема 1. *Пусть M компактно, $s \geqslant 1$, $m \geqslant 1$ целые. Для любого поля $f \in H^s(S^m T')$ существуют такие однозначно определенные поля $u \in H^s(S^m T')$ и $v \in K^{s+1}(S^{m-1} T')$, что*

$$f = u + dv, \qquad \delta u = 0,$$

где d – симметрическая часть ковариантной производной, δ – дивергенция. При этом имеют место оценки

$$\|v\|_{s+1} \leqslant C\|\delta f\|_{s-1}, \qquad \|u\|_s \leqslant C\|f\|_s$$

с постоянной C, не зависящей от f.

Обозначим через Ω касательное расслоение единичных векторов многообразия M: $\Omega = \{(x, \xi) \mid x \in M, \ g_{ij}(x)\xi^i \xi^j = 1\}$, где $g = (g_{ij})$ – метрический тензор. Через $\Omega_-(\partial M)$ обозначим подмножество в Ω, определяемое равенством $\Omega_-(\partial M) = \{(x, \xi) \in \Omega \mid x \in \partial M, \ (\xi, \nu(x)) \leqslant 0\}$, $\nu(x)$ – единичный вектор внешней нормали к ∂M в точке x. $\Omega_-(\partial M)$ является компактным многообразием с краем, и, следовательно, для целого $s \geqslant 0$ определено топологическое гильбертово пространство $H^s(\Omega_-(\partial M))$ функций на $\Omega_-(\partial M)$, имеющих обобщенные, локально интегрируемые в квадрате производные до порядка s. Зафиксировав на $\Omega_-(\partial M)$ конечный атлас и подчиненное ему разбиение единицы, снабдим $H^s(\Omega_-(\partial M))$ структурой гильбертова пространства. Норму в этом пространстве будем обозначать $\|\cdot\|_s$.

Теорема 2. *Пусть M компактное и рассеивающее, край ∂M строго выпуклый. Тогда для $f \in H^1(S^m T')$ функция $If(x, \xi)$, $x \in \partial M$, принадлежит $H^1(\Omega_-(\partial M))$ и оператор I: $H^1(S^m T') \to H^1(\Omega_-(\partial M))$ ограничен.*

Пусть (R_{ijkl}) – тензор кривизны метрики g [8]. Основным результатом работы является

Теорема 3. *Пусть M компактное, рассеивающее, край ∂M строго выпуклый и секционные кривизны M неположительны, т.е. в каждой точке $x \in M$ $R_{ijkl}(x)\xi^i\xi^k\eta^j\eta^l \leqslant 0$ для любых $\xi, \eta \in T_x$. Пусть $f \in H^1(S^m T')$. Если $f = u + dv$ – разложение, существующее в силу теоремы* 1, *где $u \in H^1(S^m T')$, $\delta u = 0$, $v \in$*

$\in K^2(S^{m-1}T')$, *то справедлива оценка*

$$\|u\|_0^2 \leqslant C(m\|f\|_1 \|If\|_0 + \|If\|_1^2)$$

с не зависящей от f постоянной C.

В частности, если $\delta f = 0$ или $m = 0$, то f определяется однозначно.

Авторы благодарят Р.С. Сакса за полезное обсуждение предмета работы.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
4 III 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мухометов Р.Г.* Препринт ВЦ СО АН СССР, № 136. Новосибирск, 1978. 2. *Бернштейн И.Н., Гервер М.Л.* – ДАН, 1978, т. 243, № 2, с. 302–305. 3. *Аниконов Ю.Е., Романов В.Г.* В сб.: Некорректные математические задачи и проблемы геофизики. Новосибирск, 1979, с. 22–27. 4. *Шарафутдинов В.А.* – Сиб. матем. журн., 1983, т. 24, № 6, с. 176–187. 5. *Шарафутдинов В.А.* В сб.: Методы решения некорректных задач и проблемы геофизики. Новосибирск, 1984, с. 135–148. 6. *Шарафутдинов В.А.* В сб.: Методы исследования неклассических задач математической физики. Новосибирск, 1985, с. 122–131. 7. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи–Зингера об индексе. М.: Мир, 1970. 8. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.

УДК 513.88+519.2 МАТЕМАТИКА

В.И. ТАРИЕЛАДЗЕ

О ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ

(Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 24 II 1986)

Гармонический анализ, который в теории вероятностей именуется методом характеристических функционалов, излагается, как правило, отдельно для конечномерных и бесконечномерных топологических векторных пространств и отдельно для локально-компактных топологических абелевых групп. Использование топологических абелевых групп с достаточным множеством непрерывных характеров (DS-групп) позволяет объединить названные случаи. В работе анонсируются некоторые результаты, справедливые в общем случае.

1. Пусть X – топологическая абелева группа, $\mathbf{T}$ – мультипликативная группа комплексных чисел, по модулю равных единице, с топологией, индуцированной из поля комплексных чисел $\mathbf{C}$ (т.е. $\mathbf{T}$ – единичная окружность). X' – дуальная группа, т.е. мультипликативная группа всех непрерывных гомоморфизмов (характеров) h: $X' \to \mathbf{T}$. Говорят, что X имеет достаточное множество непрерывных характеров, или является DS-группой, если X' разделяет точки X (т.е. из того, что $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$, вытекает существование такого $h \in X'$, что $h(x_1) \neq h(x_2)$). Локально-компактные топологические абелевы группы и хаусдорфовы локально-выпуклые топологические векторные пространства служат примерами DS-групп.

Пусть μ – комплексная мера в DS-группе X, т.е. счетно-аддитивная функция множества на борелевской σ-алгебре пространства X. Ее преобразование Фурье или преобразование Фурье–Стильтьеса $\mu^\wedge: X' \to \mathbf{C}$