ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1977 МАТЕМАТИКА № 1 (176)

УДК 513.0

Я. Л. Шапиро, Н. И. Жукова

О ПРИВОДИМЫХ k-ЛИСТНЫХ СТРУКТУРАХ

В статьях [4] и [5] введены понятия приводимой двулистной структуры (другой термин — приводимое двуслоение).

В настоящей работе рассматриваются обобщения этих понятий — приводимые k-листные структуры (или приводимые k-слоения), коротко St_k-структуры, обобщение это является наиболее непосредственным в специальном случае St_k-структур, названных простыми. Заметим, что St_k-структура и в этом „простом" случае существенно отличается от структуры, соответствующей значению k, равного двум (см. теоремы 4—7).

Рассмотрим гладкое многообразие X размерности n и его универсальное накрытие $f: \overline{X} \to X$. Пусть на X задано упорядоченное множество $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k)$ взаимно трансверсальное интегрируемых (инволютивных) распределений $\mathfrak{M}_i$ размерности n_i, причем $n = \sum_{i=1}^{s} n_i$, где n-размерность многообразия X. Пару $(X, \mathfrak{M})$ будем называть приводимым (или St_k-) многообразием типа $(n_1, \dots, n_k)$, если распределения $\mathfrak{M}_i$, $i = 1$, поднятые на $\overline{X}$ универсальным накрытием f, совпадают с распределениями $\overline{\mathfrak{M}}_i$, естественным образом индуцированными на дифференцируемом произведении $\overline{X} = \mathop{\times}_1^k \overline{X}_i$, где $\dim \overline{X}_i = n_i$. Набор $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k)$ будем называть приводимой k-листной структурой или приводимым k-слоением на X (коротко St_k-структурой).

Пусть $(X, \mathfrak{M})$ и $(X', \mathfrak{M}')$ суть St_k-многообразия типов $(n_1, \dots, n_k)$ и $(n'_1, \dots, n'_k)$ соответственно. St_k-морфизмом $(X, \mathfrak{M})$ в $(X', \mathfrak{M}')$ будем называть такое дифференцируемое отображение f многообразия X в X', что для всех $x \in X$ имеет место включение $df_x(\mathfrak{M}_i(x)) \subset \mathfrak{M}'_i(f(x))$, $i = \overline{1, k}$, где df_x — дифференциал отображения f в точке x, а $\mathfrak{M}_i(x)$ и $\mathfrak{M}'_i(f(x))$ — значения распределений $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}'_i$ в точках x и $f(x)$ соответственно. Накрытие, являющееся St_k-морфизмом, будем называть St_k-накрытием.

Далее рассматриваем категорию St_k-многообразий с морфизмами — St_k-морфизмами и композицией, совпадающей с композицией отображений.

Набор $\overline{\mathfrak{M}} = (\overline{\mathfrak{M}}_1, \dots, \overline{\mathfrak{M}}_k)$ распределений $\overline{\mathfrak{M}}_i$ дифференцируемого произведения $X = \mathop{\times}_1^k X_i$, листами (или слоями) которых служат $x_1 \times \dots \times x_{i-1} \times X_i \times x_{i+1} \times \dots \times x_k (x_j \in X_j,\ j = \overline{1, k})$, будем называть естественной St_k-структурой произведения $\mathop{\times}_1^k X_i$.

Пусть Ψ—группа St_k-автоморфизмов естественной St_k-структуры на $X = \mathop{\times}_1^k X_i \overset{\text{def}}{=} \times X_i$; тогда на каждом сомножителе X_i, $i = \overline{1, k}$, индуцирована группа диффеоморфизмов Ψ_i, причем $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_k)$, где $\psi_i \in \Psi_i$ и $\psi \in \Psi$. Если, кроме того,

Ψ вполне разрывна на $\times X_i$, то определено фактор-многообразие $\times X_i/\Psi$, которое является приводимым типа $(n_1, \dots, n_k)$, а фактор-отображение $\widetilde{\Psi}: \times X_i \to \times X_i/\Psi$ является регулярным St_k-накрытием.

Указанное St_k-многообразие $\times X_i/\Psi$ назовем каноническим, если из того, что $(1_1, \dots, 1_{i-1}, \psi_i, 1_{i+1}, \dots, 1_k) \in \Psi$, где $\psi_i \in \Psi_i$, 1_j $(j = \overline{1, k})$ — единица группы Ψ_j, следует: $\psi_i = 1_i$. St_k-изоморфизм канонического многообразия $\times X_i/\Psi$ на X, назовем представлением X. Если $(X, \mathfrak{M})$ — приводимое многообразие, то максимальные интегральные многообразия (листы или слои) распределения $\mathfrak{M}_i$ будем называть листами (слоями) слоения (или листной структуры) F_i, определяемого интегрируемым распределением $\mathfrak{M}_i$. Лист слоения F_i, проходящий через $x \in X$, будем обозначать через $F_i(x)$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Для каждого приводимого многообразия X существует представление $\Xi: X \to \times X_i/\Psi$.*

Теорема 2. *Представление $\Xi: X \to \times X_i/\Psi$ приводимого многообразия X определено с точностью до диффеоморфизмов (δ_i) многообразий X_i и преобразований (диффеоморфизмами δ_i) индуцированных групп Ψ_i.*

Пусть X — приводимое n-мерное многообразие типа $(n_1, \dots, n_k)$, а $\mathfrak{M} = (\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k)$ — его St_k-структура. Наряду с взаимно трансверсальным инволютивными распределениями $\mathfrak{M}_i$, $i = \overline{1, k}$, размерности n_i с $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ рассмотрим распределения

$$\mathfrak{M}_{ij} = \mathfrak{M}_i \oplus \mathfrak{M}_j, \ i < j, \ i, j = \overline{1, k}; \quad \mathfrak{M}_{ijl} = \mathfrak{M}_i \oplus \mathfrak{M}_j \oplus \mathfrak{M}_l, \ i < j < l,$$

$$i, j, l = \overline{1, k}; \dots, \quad \mathfrak{M}_{1 \dots i-1\, i+1 \dots k} = \bigoplus_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{k} \mathfrak{M}_j \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{M}_i^*.$$

Пусть

$$\mathfrak{M}^{(1)} = (\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_k), \quad F^{(1)} = (F_1, \dots, F_k),$$

$$\mathfrak{M}^{(2)} = (\mathfrak{M}_{12}, \dots, \mathfrak{M}_{k-1k}), \quad F^{(2)} = (F_{12}, \dots, F_{k-1k}),$$

$$\mathfrak{M}^{(k-1)} = (\mathfrak{M}_k^*, \dots, \mathfrak{M}_1^*), \quad F^{(k-1)} = (F_k^*, \dots, F_1^*),$$

где через $F^{(l)}$, $l = \overline{1, k-1}$, обозначен набор из C_k^l слоений, соответствующий набору интегрируемых распределений $\mathfrak{M}^{(l)}$.

Возьмем произвольное представление $\Xi: X \to \times X_i/\Psi$ приводимого многообразия X и St_k-накрытие $\widetilde{\Psi}: \times X_i \to \times X_i/\Psi$. Пусть $x \in X$ и $x' \in \widetilde{\Psi}^{-1}\Xi x$. Обозначим через $X_{a_1 \dots a_l}(x')$ лист естественной St_k-структуры произведения $\times X_i$, проходящий через x' и накрывающий лист $F_{a_1 \dots a_k}(x')$. Через $\Psi^{a_1 \dots a_l}(x')$ обозначим подгруппу группы Ψ, сохраняющую лист $X_{a_1 \dots a_l}(x')$. Листы $X_{a_1 \dots a_l}(x')$ образуют последовательность $X^{(l)}(x')$, а группы $\Psi^{a_1 \dots a_l}(x')$ — соответствующую последовательность $\Psi^{(l)}(x')$. Точку $x \in X$ назовем l-регулярной $l = \overline{1, k-1}$, если все группы $\Psi^{(l)}(x')$ — последовательности $(x' \in \widetilde{\Psi}^{-1}\Xi x)$ тривиальны: $(k-1)$-регулярную точку назовем простой. Если $l < j$, то j-регулярная точка является l-регулярной. Точку $x \in X$ назовем регулярной, если точку $x_i' = pr_i(x') \in X_i$ для $i = \overline{1, k}$ оставляет неподвижной только тождественное преобразование группы Ψ_i. Нетрудно проверить корректность определения регулярной и l-регулярной точки приводимого многообразия.

Регулярная точка является 1-регулярной. Обратное, вообще говоря, неверно, только при $k=2$ всякая 1-регулярная точка является регулярной. Заметим, что простая точка является регулярной. Приводимое многообразие, имеющее простую точку, будем называть простым.

Основные свойства St_k-структуры на X сформулируем в качестве следующих теорем.

Теорема 3. *Пусть X — приводимое многообразие, x — его 1-регулярная точка, а $F_i(x)$ — лист слоения F_i, проходящий через x. Тогда*: 1) *существует представление $\Xi: X \to \times F_i(x)/\Psi$*; 2) *группа Ψ изоморфна фактор-группе $G/G_{11}\times\ldots\times G_{kk}$ фундаментальной группы G пространства X по прямому произведению нормальных делителей G_{ii}, изоморфных фундаментальным группам листов $F_i(x)$*; 3) *лист $F_i(x)$ служит пространством регулярного накрытия на любой другой лист этого же слоения.*

Теорема 4. *Для того, чтобы St_k-многообразие X при $k>2$ было простым, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого его представления существовали регулярная точка и такие изоморфизмы $\varphi_j: \Psi_1 \to \Psi_j$ $(j=\overline{2,k})$, что $\Psi=\{(\psi_1, \varphi_2(\psi_1), \ldots, \varphi_k(\psi_1)), \psi_1 \in \Psi_1\}$.*

При $k=2$ справедлива следующая

Теорема 5. *Для любого представления приводимого многообразия X типа (n_1, n_2) существует такой изоморфизм $\varphi: \Psi_1 \to \Psi_2$, что $\Psi=\{(\psi_1, \varphi(\psi_1)), \psi_1 \in \Psi_1\}$.*

Теорема 6. *Для того, чтобы регулярная точка x St_k-многообразия X при $(k>2$ была 2-регулярной, необходимо и достаточно, чтобы любые два различных листа $F_i(x)$ и $F_j(x)$, проходящие через x, не имели общих точек, отличных от x.*

Следствие. Любые два различных листа $F_i(x)$ и $F_j(x)$, проходящие через простую точку x St_k-многообразия X, при $k>2$ пересекаются строго в одной точке x.

При $k=2$ теорема 6 не имеет места, точнее, имеет место

Теорема 7. *Пусть X есть St_2-многообразие. Тогда множество точек пересечения листов $F_1(x)$ и $F_2(x)$, проходящих через регулярную точку x, находится в биективном соответствии с элементами группы Ψ.*

Если V — полное приводимое собственно риманово многообразие, то существует k, $k \geqslant 2$, взаимно ортогональных абсолютно параллельных распределений $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k)$, сумма размерностей которых совпадает с размерностью V. При этом в силу теоремы де Рама [1] $\mathfrak{M}$ является St_k-структурой, которую будем называть римановой.

Так как множество неподвижных точек любого нетривиального движения произвольного риманова многообразия V имеет меру нуль на V, то почти каждая точка x из V является регулярной относительно его римановой St_k-структуры. Поэтому из теоремы 3 вытекает

Теорема 8. *Пусть V — приводимое полное риманово многообразие и $\mathfrak{M}=(\mathfrak{M}_1, \ldots, \mathfrak{M}_k)$ — его риманова St_k-структура. Тогда почти для каждой точки $x \in V$*: 1) *существует St_k-изометрия V на каноническое приводимое риманово фактор-многообразие $F_1(x)\times\ldots\times F_k(x)/\Psi$, где $F_1(x)\times\ldots\times F_k(x)$ — риманово произведение листов, проходящих через точку x, а Ψ — вполне разрывная группа движений этого произведения*; 2) *группа Ψ изоморфна фактор-группе $G/G_{11}\times\ldots\times G_{kk}$ фундаментальной группы G пространства X по прямому произведению нормальных делителей G_{ii} группы G, изоморфных фундаментальным группам листов $F_i(x)$*; 3) *каждый лист $F_i(x)$ является неприводимым римановым многообразием, если $\mathfrak{M}_i$ — неприводимые распределения* [3]; 4) *лист $F_i(x)$ служит пространством регулярного риманова накрытия на любой другой лист слоения F*; 5) *при $k=2$ индуцированные группы Ψ_1 и Ψ_2 движений листов $F_1(x)$ и $F_2(x$ соответственно изоморфны (посредством φ), причем $\Psi=\{(\psi_1, \varphi(\psi_1)), \psi_1 \in \Psi_1\}$.*

Когда V односвязно, теорема 8 совпадает с теоремой де Рама [1]. В случае $k=2$ теорема, аналогичная теореме 8, получена в [4]. В работе [2] исследуются приводимые римановы многообразия типа (n_1, n_2), одно слоение которых регулярно. При этом в [2] получена теорема, совпадающая с теоремой 8, когда $k=2$, и в предположении, эквивалентном тому, что группа Ψ_2 вполне разрывна, а группа Ψ_1 действует без неподвижных точек.

Заметим, что, если приводимое (полное) риманово многообразие V имеет точку x, для которой все листы $F_i(x)$, $i=1, k$, односвязны, то x есть 1-регулярная точка V. Такие приводимые римановы многообразия изучаются в [3], причем результаты статьи [3] — теорема А и ее следствия — вытекают очевидным образом из теорем 3 и 8 данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rham G. de. Sur la reductibilité d'un espace de Riemann. Comment math helv., v. 26, fasc. 4, 1952, p. 328—344.
2. Walker A. G. The fibring of Riemannean manifolds. Proc. London Math. Soc., ser. 3, v. 3, № 9, 1953, p. 1—19.
3. Robertson S. A. Grid manifolds. I. Diff. Geometry, v. 4, № 2, 1970, p. 245—253.
4. Шапиро Я. Л. О приводимых многообразиях и локальных произведениях. ДАН СССР, т. 206, № 6, 1972, с. 1305—1308.
5. Шапиро Я. Л. О приводимых римановых пространствах и двулистных структурах на них. ДАН СССР, т. 206, № 4, 1972, с. 831—833.

г. Горький

Поступила
9 III 1976