ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 1995, том 343, № 3, с. 314 - 316

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 517.5:537.312.62

ФУНКЦИЯ ГРИНА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ НА РАВНОБЕДРЕННОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

© 1995 г. В. В. Дубровский, В. Ф. Кравченко, Н. В. Семин

Представлено академиком В.А. Ильиным 12.04.94 г.

Поступило 18.04.94 г.

1. Следуя идеям [1, 2], а также используя результаты В.А. Ильина [3], рассмотрим следующую краевую задачу. Пусть $\Pi = \{0 \le x_1 \le a, 0 \le x_2 \le \le a\}$ – квадрат, где $a > 0$; $D = \{0 \le x_1 \le a, 0 \le x_2 \le a, -x_1 + x_2 \le 0\}$ – равнобедренный прямоугольный треугольник; $H_1 = \{x_1 = a, 0 \le x_2 \le a\}$, $H_2 = \{0 \le x_1 = = x_2 \le a\}$, $H_3 = \{x_2 = 0, 0 \le x_1 \le a\}$– стороны треугольника D.

В области D рассмотрим операторы $T_{i1,\, i2,\, i3}$:

$$-\Delta_2 U(x) = \lambda U(x), \quad x \in D,$$

$$k_i \partial_\nu U(x) + r_i U(x) = 0, \quad x \in D \cap H_i,$$

где $k_i, r_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \ge 0$, $r_i \ge 0$, $k_i + r_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, ν – внешняя нормаль.

Построим резольвенту для этих восьми краевых задач:

1°. Серия $(1, -1, 1)$. Собственные функции и числа оператора $T_{1,-1,1}$ следующие:

$$\psi_s(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \cos\dfrac{\pi s_1 x_1}{a} & \cos\dfrac{\pi s_2 x_1}{a} \\ \cos\dfrac{\pi s_1 x_2}{a} & \cos\dfrac{\pi s_2 x_2}{a} \end{vmatrix}, \tag{1}$$

где

$$\lambda_s = \frac{\pi^2}{a^2}(s_1^2 + s_2^2), \quad s_2 > s_1 > 0.$$

Функция $\psi_s(x)$ нечетна относительно диагонали прямоугольника Π:

$$T(x_1, x_2) = (x_2, x_1), \quad T\psi_s(\mathbf{x}) = \psi_s(T\mathbf{x}) = -\psi_s(\mathbf{x}). \tag{2}$$

Следовательно, при $\mathrm{s} \ne \mathrm{s}'$

$$(\psi_s(\mathbf{x}), \psi_{s'}(\mathbf{x}))_D \equiv \int\limits_D \psi_s(\mathbf{x})\psi_{s'}(\mathbf{x})dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_\Pi \psi_s(\mathbf{x})\psi_{s'}(\mathbf{x})dx_1dx_2 = 0. \tag{3}$$

Далее,

$$\|\psi_s(\mathbf{x})\|^2 \equiv (\psi_s(\mathbf{x}), \psi_s(\mathbf{x})) = \iint\limits_D |\psi_s(\mathbf{x})|^2 dx_1dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\iint\limits_D |\psi_s(\mathbf{x})|^2 dx_1dx_2 = \frac{a^2}{4}. \tag{4}$$

Тогда ядро резольвенты оператора $T_{1,-1,1}$ имеет вид

$$K_{T_{1,-1,1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = \sum_{s_2 > s_1 > 0} \frac{4}{a^2}\frac{\psi_s(\mathbf{x})\psi_s(\mathbf{y})}{\lambda_s - \lambda}. \tag{5}$$

2°. Для серии $(-1, 1, -1)$ собственные функции и числа следующие:

$$\psi_s(x) = \sin\frac{\pi s_1 x_1}{a}\sin\frac{\pi s_2 x_2}{a} + \sin\frac{\pi s_1 x_2}{a}\sin\frac{\pi s_2 x_1}{a}, \tag{6}$$

$$\lambda_s = \frac{\pi^2}{a^2}(s_1^2 + s_2^2), \quad s_2 \ge s_1 > 0.$$

Тогда

$$T\psi_s(\mathbf{x}) = \psi_s(\mathbf{x}). \tag{7}$$

Далее, как и в п. 1°,

$$(\psi_s(\mathbf{x}), \psi_{s'}(\mathbf{x}))_D = 0 \text{ при } \mathrm{s} \ne \mathrm{s}'. \tag{8}$$

При $s_1 \ne s_2$

$$\|\psi_s(\mathbf{x})\|^2 = \frac{a^2}{4}, \tag{9}$$

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Институт радиотехники и электроники Российской Академии наук, Москва

при $s_1 = s_2$

$$\|\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|^2 = \frac{a^2}{2}. \tag{10}$$

Ядро резольвенты оператора $T_{-1,1,-1}$ следующее:

$$K_{T_{-1,1,-1}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda) = \sum_{s_2>s_1>0}\frac{4}{a^2}\frac{\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})}{\lambda_{\mathbf{s}}-\lambda} + $$
$$+ \sum_{s_1=s_2>0}\frac{2}{a^2(\lambda_{\mathbf{s}}-\lambda)}\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{y}). \tag{11}$$

3°. Для серии (1, 1, 1) – задача Неймана:

$$\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \cos\frac{\pi s_1 x_1}{a}\cos\frac{\pi s_2 x_2}{a} + \cos\frac{\pi s_2 x_1}{a}\cos\frac{\pi s_1 x_2}{a},$$
$$\lambda_{\mathbf{s}} = \frac{\pi^2}{a^2}(s_1^2+s_2^2), \quad s_2 \ge s_1 \ge 0. \tag{12}$$

$$(\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \psi_{\mathbf{s}'}(\mathbf{x}))_D = 0 \text{ при } \mathbf{s} \ne \mathbf{s}'. \tag{13}$$

При $s_2 > s_1 > 0$

$$\|\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_D^2 = \frac{a^2}{4}. \tag{14}$$

При $s_2 > s_1 = 0$

$$\|\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\|_D^2 = \frac{a^2}{2}. \tag{15}$$

При $s_1 = s_2 = 0$

$$\|\psi_{0,0}(\mathbf{x})\|_D^2 = 2a^2. \tag{16}$$

Итак, ядро резольвенты оператора $T_{1,1,1}$ имеет вид

$$K_{T_{1,1,1}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda) = \frac{1}{2a^2}\frac{\psi_{0,0}(\mathbf{x})\psi_{0,0}(\mathbf{y})}{-\lambda} + $$
$$+ \sum_{s_2>s_1>0}\frac{4}{a^2}\frac{\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})}{\lambda_{\mathbf{s}}-\lambda} + \sum_{s_2>s_1=0}\frac{2}{a^2}\frac{\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})}{\lambda_{\mathbf{s}}-\lambda}. \tag{17}$$

4°. Для серии (–1, –1, –1) – задача Дирихле:

$$\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \sin\frac{\pi s_1 x_1}{a} & \sin\frac{\pi s_2 x_1}{a} \\ \sin\frac{\pi s_1 x_2}{a} & \sin\frac{\pi s_2 x_2}{a} \end{vmatrix}, \tag{18}$$

$$\lambda_{\mathbf{s}} = \frac{\pi^2}{a^2}(s_1^2+s_2^2), \quad s_2 > s_1 > 0,$$

$$(\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \psi_{\mathbf{s}'}(\mathbf{x}))_D = \delta_{\mathbf{ss}'}\frac{a^2}{4}.$$

Ядро резольвенты оператора $T_{-1,-1,-1}$ следующее:

$$K_{T_{-1,-1,-1}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda) = \sum_{s_2>s_1>0}\frac{4}{a^2}\frac{\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})}{\lambda_{\mathbf{s}}-\lambda}. \tag{19}$$

5°. Для серии (1, –1, –1)

$$\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \sin\frac{\pi(2s_1+1)x_1}{a} & \sin\frac{\pi(2s_2+1)x_1}{a} \\ \sin\frac{\pi(2s_1+1)x_2}{a} & \sin\frac{\pi(2s_2+1)x_2}{a} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Здесь

$$\lambda_{\mathbf{s}} = \frac{\pi^2}{4a^2}((2s_1+1)^2 + (2s_2+1)^2), \quad s_2 > s_1 > 0,$$

$$(\psi_{\mathbf{s}}(x), \psi_{\mathbf{s}'}(x))_D = \delta_{\mathbf{ss}'}\frac{a^2}{4}.$$

Ядро оператора резольвенты $T_{1,-1,1}$:

$$K_{T_{1,-1,1}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda) = \sum_{s_2>s_1>0}\frac{4}{a^2}\frac{\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})}{\lambda_{\mathbf{s}}-\lambda}. \tag{21}$$

6°. Для серии (–1, –1, 1)

$$\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \begin{vmatrix} \cos\frac{\pi(2s_1+1)x_1}{2a} & \cos\frac{\pi(2s_2+1)x_1}{2a} \\ \cos\frac{\pi(2s_1+1)x_2}{2a} & \cos\frac{\pi(2s_2+1)x_2}{2a} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Здесь

$$\lambda_{\mathbf{s}} = \frac{\pi^2}{4a^2}((2s_1+1)^2 + (2s_2+1)^2), \quad s_2 > s_1 > 0,$$

$$(\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \psi_{\mathbf{s}'}(\mathbf{x}))_D = \delta_{\mathbf{ss}'}\frac{a^2}{4}.$$

Ядро оператора резольвенты $T_{-1,-1,1}$:

$$K_{T_{-1,-1,1}}(\mathbf{x},\mathbf{y},\lambda) = \sum_{s_2>s_1>0}\frac{4}{a^2}\frac{\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{y})}{\lambda_{\mathbf{s}}-\lambda}. \tag{23}$$

7°. Для серии (1, 1, –1)

$$\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}) = \sin\frac{\pi(2s_1+1)x_1}{2a}\sin\frac{\pi(2s_2+1)x_2}{2a} + $$
$$+ \sin\frac{\pi(2s_1+1)x_2}{2a}\sin\frac{\pi(2s_2+1)x_1}{2a}. \tag{24}$$

Здесь

$$\lambda_{\mathbf{s}} = \frac{\pi^2}{4a^2}((2s_1+1)^2 + (2s_2+1)^2), \quad s_2 \ge s_1 \ge 0,$$

При $\mathbf{s}' \ne \mathbf{s}$

$$(\psi_{\mathbf{s}}(\mathbf{x}), \psi_{\mathbf{s}'}(\mathbf{x}))_D = 0.$$

При $s_2 > s_1 \geq 0$

$$\|\psi_s(\mathbf{x})\|_D^2 = \frac{a^2}{4}.$$

При $s_2 = s_1 > 0$

$$\|\psi_s(\mathbf{x})\|_D^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Ядро оператора резольвенты $T_{1,1,-1}$ следующее:

$$K_{T_{1,1,-1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = \sum_{s_2 > s_1 \geq 0} \frac{4}{a^2} \frac{\psi_s(\mathbf{x})\psi_s(\mathbf{y})}{\lambda_s - \lambda} + \\ + \sum_{s_2 = s_1 > 0} \frac{2}{a^2} \frac{\psi_s(\mathbf{x})\psi_s(\mathbf{y})}{\lambda_s - \lambda}. \quad (25)$$

8°. Для серии (–1, 1, 1)

$$\psi_s(\mathbf{x}) = \cos\frac{\pi(2s_1+1)x_1}{2a}\cos\frac{\pi(2s_2+1)x_2}{2a} + \\ + \cos\frac{\pi(2s_1+1)x_2}{2a}\cos\frac{\pi(2s_2+1)x_1}{2a}. \quad (26)$$

Здесь

$$\lambda_s = \frac{\pi^2}{4a^2}((2s_1+1)^2 + (2s_2+1)^2), \quad s_2 \geq s_1 \geq 0,$$

$$(\psi_s(\mathbf{x}), \psi_{s'}(\mathbf{x}))_D = \delta_{ss'} \begin{cases} \dfrac{a^2}{4}, & s_2 > s_1 \geq 0, \\ \dfrac{a^2}{2}, & s_2 = s_1 \geq 0. \end{cases}$$

Ядро оператора резольвенты $T_{-1,1,1}$ имеет вид

$$K_{T_{-1,1,1}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \lambda) = \sum_{s_2 > s_1 \geq 0} \frac{a^2}{4} \frac{\psi_s(\mathbf{x})\psi_s(\mathbf{y})}{\lambda_s - \lambda} + \\ + \sum_{s_2 = s_1 \geq 0} \frac{a^2}{2} \frac{\psi_s(\mathbf{x})\psi_s(\mathbf{y})}{\lambda_s - \lambda}. \quad (27)$$

2. Отметим, что ранее [2] собственные функции и числа были получены А.Ф. Шестопалом. Однако в данной работе впервые доказана ортогональность собственных функций и определены функции Грина для указанных выше восьми задач. Показано, что сходимость рядов может быть только в $L_2(D)$, но, возможно, не может быть абсолютной сходимости ни в одной внутренней точке треугольника [3].

3. Предложенная и обоснованная методика может найти широкое применение в различных краевых задачах теории дифракции, теплопроводности [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1971.
2. *Шестопал А.Ф.* Геометрия оператора Лапласа. Киев: Вища шк., 1991. 166 с.
3. *Ильин В.А.* // ДАН. 1950. Т. 74. № 3. С. 413 - 416.
4. *Дубровский В.В., Кравченко В.Ф.* // УМН. 1994. Т. 49. № 1. С. 211 - 212.