УДК 519.1

ТЕОРИЯ ГРАФОВ

В. П. Козырев

Статья охватывает работы по теории графов с 1963 по 1971 год включительно. Предыдущая статья, написанная А. А. Зыковым [23], содержала работы только 1962 года. За прошедшие годы тематика теории графов значительно расширилась, резко увеличилось количество выходящих статей. Появилось много монографий как по общей теории графов [24, 41, 42, 61, 75, 154, 173, 176, 236, 269], так и по отдельным ее проблемам [37, 51, 202, 210, 229, 262], и приложениям в конкретных областях знания таких, как экономика, [1, 3, 63, 76, 91, 176, 238], социальные науки [124, 161, 239], теория электрических цепей [44, 46], программирование [74, 76]. Появились монографии, посвященные проблемам, стоящим на стыке теории графов и других разделов математики, например, теории групп [17, 124, 199], топологии [134, 229]. Было выпущено большое количество сборников, посвященных теории графов и ее приложениям [73, 99, 120, 131, 153, 156, 237, 257, 263]; многие из них являются трудами международных конференций и семинаров по теории графов. Некоторые сборники под названием «Комбинаторная математика и ее приложения» содержат статьи по теории графов и комбинаторному анализу, которые настолько близки по тематике и применяемым методам, что можно предположить, что в настоящее время происходит формирование тематики и методов решения нового раздела математики. Другой иллюстрацией этого слияния является появление и развитие теории гиперграфов, в которой изучаются системы подмножеств некоторого множества [76].

За прошедшие 10 лет было опубликовано несколько достаточно полных библиографий по теории графов, например, [78, 259]. Библиография [259], которую составил Тернер, используя ЭВМ, содержит около 2000 наименований и состоит из трех частей: перечень работ по названиям, перечень по авторам и перечень статей по ключевым словам. Имеются также библиографии по отдельным вопросам: так, в [214] содержится около 160 статей по решению задач нахождения экстремальных путей.

Работы советских математиков имеют среди этой обширной литературы большой вес. Обзор советских работ по теории графов [260], составленный американскими учеными Тернером и Каутцем, включает около 250 наименований. В этом обзоре авторы выделили направления теории графов, которые, по их мнению, слабо развиты, и назвали направления, где имеются заметные успехи.

За время, прошедшее после выхода последней библиографии [259] (в нее включены статьи, вышедшие до середины 1968 года), было опубликовано, по самым скромным оценкам, более 1000 работ по теории графов. Составление полной библиографии не является целью данной статьи, поэтому в списке литературы приведены работы, содержащие наиболее важные, по мнению автора, результаты или дающие представление о направлениях исследования.

Тематику теории графов в настоящее время можно условно разбить на следующие разделы: 1) изучение отдельных характеристик графов; 2) построение графов с заданными свойствами; 3) изучение ориентированных графов; 4) обходы графов; 5) изучение связности графов; 6) раскраски графов; 7) топологические задачи в теории графов; 8) представления графов; 9) изучение матриц, связанных с графами; 10) операции над графами; 11) алгебраические задачи теории графов; 12) изучение случайных графов; 13) задачи подсчета и перечисления графов и подграфов.

Среди многочисленных областей применения теории графов в первую очередь можно выделить следующие: 1) топология [134, 229], 2) алгебра [17, 124, 199], 3) теория вероятностей [4], 4) теория автоматов [37], 5) теория кодирования [39, 263], 6) теория игр [75, 76], 7) исследования операций [76], 8) теория программирования [76], 9) теория транспортных сетей [51, 76], 10) теория электрических цепей [44, 46], 11) теория связи [91], 12) статистическая физика [158], 13) математическая лингвистика [237], 14) математическая экономика [1, 3, 63, 76, 91, 176, 238], 15) социология [124, 161, 239].

В данной части статьи освещаются результаты по разделам: с первого по восьмой включительно. Основные понятия теории графов здесь не приводятся, их можно найти в [24, 75, 154, 269]. Харари [154, 155] предложил унификацию обозначений различных параметров и типов графов, в настоящее время широко принятую в различных странах. Так, K_p означает полный граф с p вершинами, $K_{m,n}$ — полный двудольный граф с m вершинами в одном классе и n — в другом, $\chi(G)$ — хроматическое число графа G, $\chi_1(G)$ — хроматический класс G, $\gamma(G)$ — род графа G, $\theta(G)$ — толщина G. Ниже под графом G понимается неориентированный граф без петель и кратных ребер, а наличие в графе G ориентации, петель или кратных ребер будет каждый раз указываться. Через G_n обозначается граф с n вершинами, через $G_{n,m}$ — граф с n вершинами и m ребрами.

1. ИЗУЧЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ГРАФОВ

В этом разделе рассматриваются работы, посвященные: 1) изучению взаимосвязи различных характеристик графов таких, как число вершин, число ребер, цикломатическое число, хроматическое число, диаметр, обхват, плотность и др., 2) определению условий, при которых заданная характеристика принимает определенные значения, 3) изучению поведения одних характеристик при изменении других, например, при увеличении числа вершин или ребер.

Большое количество работ посвящено получению оценок хроматического числа графов через другие характеристики. Так, для графов $G_{n,m}$ получена верхняя оценка хроматического числа $\chi(G_{n,m}) \leqslant 1 + \sqrt{2\left(1 - \frac{1}{n}\right) m}$, причем равенство возможно только для полных графов [279]. Нижнюю оценку хроматического числа графа G через степени его вершин получил Бонди [82].

Эрдёш [114] изучает связь хроматического числа $\chi(G)$, плотности $k(G)$ и числа внутренней устойчивости $\alpha(G)$ графа G. Показано, что $\lambda(n) = \max\limits_{G_n} \frac{\chi(G_n)}{K(G_n)}$, где максимум берется по всем графам G_n, для достаточно больших n удовлетворяют неравенствам

$$\frac{(\log 2)^2}{4} - \varepsilon \leqslant \lambda(n) \Big/ \frac{n}{(\log n)^2} \leqslant (\log 2)^2 + \varepsilon.$$

Если для любого целого $m \in [N, n]$ каждый подграф G_m графа G_n имеет $\alpha(G_m) \geqslant l$, то, как доказано в этой статье, $\chi(G_n) \leqslant \frac{n}{l} + N$.

Установлена связь хроматического числа $\chi(G)$ и плотности $k(G)$ графа G со следующей его характеристикой $c(G)$ — максимальным числом взаимно непересекающихся (по вершинам) циклов нечетной длины. В [114] доказано, что 1) если $\chi(G) > k(G)$ и $\chi(G) > 4$, то $c(G) \geqslant \left[\frac{\chi(G)+2}{3}\right]$; 2) если $k(G) < 4$, то $c(G) \geqslant \left[\frac{2\chi(G)-3}{3}\right]$; 3) если $k(G) > 2$, то $c(G) \geqslant$

$\geqslant \left[\frac{2\chi(G)-k(G)}{3}\right]$. Отсюда, в частности, следует, что граф G с $\chi(G)=5$ содержит в качестве подграфов либо P_5, либо два непересекающихся цикла нечетной длины.

Изучалась связь характеристик для графа G и его дополнения $\bar{G}$. Для любых натуральных чисел p и $\bar{p}$, удовлетворяющих неравенствам $p+\bar{p}\leqslant n+1$ и $p\cdot\bar{p}\geqslant n$, существует граф G_n такой, что $\chi(G_n)=p$ и $\chi(\bar{G}_n)=\bar{p}$ [141]. Хроматические классы $\chi_1(G_n)$ и $\chi_1(\bar{G}_n)$ графов G_n и $\bar{G}_n$ связаны неравенствами [189]:

$$2\left[\frac{n+1}{2}\right]-1\leqslant\chi_1(G_1)+\chi(\bar{G}_n)\leqslant n+2\left[\frac{n-2}{2}\right],$$

$$0\leqslant\chi_1(G_n)\cdot\chi(\bar{G}_n)\leqslant(n-1)\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-1\right).$$

Результаты, аналогичные полученным для $\chi(G)$, в статье Митчема [201] приведены для древесности $\rho(G)$ графа G — наименьшего числа подмножеств, на которые можно разбить множество вершин G так, чтобы подграф, порожденный каждым из этих подмножеств, не содержал циклов: 1) $1/2\chi(G)\leqslant\rho(G)\leqslant\chi(G)$; 2) $\sqrt{n}\leqslant\rho(G_n)+\rho(\bar{G}_n)\leqslant\frac{n+3}{2}$ и $\frac{1}{4}n\leqslant\rho(G_n)\cdot\rho(\bar{G}_n)\leqslant\left(\frac{n+3}{4}\right)^2$. Показано также, что для любых натуральных a, a' и n таких, что $a+a'\leqslant\frac{1}{2}(n+3)$ и $\frac{1}{4}n\leqslant$ $\leqslant a\cdot a'$, существует G_n, для которого $\rho(G_n)=a$ и $\rho(\bar{G}_n)=a'$.

Покрывающее число $\omega(G)$ графа $G(X,U)$ — это наименьшее число его полных подграфов, покрывающих G, т. е. каждая вершина и каждое ребро G входят в некоторый полный подграф. Гавел [163] показал, что $\omega(G)$ равно хроматическому числу следующего вспомогательного графа G'. Вершинами G' являются ребра G; две вершины G' смежны, если соответствующие им ребра G принадлежат либо треугольнику, либо полному четырехвершиннику.

Относительно внутренне устойчивого множества S графа $G=(X,U)$ его дерево $T=(X_1,U_1)$ называется альтернирующим, если 1) T не содержит пары вершин из $X_1\cap\bar{S}$, где $\bar{S}=X\setminus S$; 2) все висячие вершины T принадлежат $\bar{S}$; 3) вершины X_1, не принадлежащие S, не смежны вершинам множества S из $X\setminus X_1$. С помощью понятия этого дерева Хакими и Франк в [147] сформулировали критерии того, что устойчивое множество является максимальным (по числу вершин).

Для числа внутренней устойчивости $\mu(G)$ графа G Л. Ф. Германом [13] получены необходимые и достаточные условия, когда выполняется равенство $\mu(G\times H)=\mu(G)\cdot\mu(H)$, где $G\times H$ — декартово произведение графов G и H.

Связь числа вершин, числа ребер, чисел внутренней и внешней устойчивости связного графа G с этими же характеристиками реберного $L(G)$ и тотального $T(G)$ графов*) (для G) изучалась в нескольких работах. Сводка этих результатов приведена в статье Гупты [140].

Структура и характеристики графов, являющихся критическими по выбрасыванию ребра относительно числа внутренней устойчивости, исследуются в [183]. В частности, получены оценки числа ребер m в графе G_n, имеющем число внутренней устойчивости, равное k, критическом по указанному свойству: $\frac{n-k}{2}(n-k+r)\leqslant m\leqslant\binom{n-k+1}{2}$, где $n=tk+r$, $0\leqslant r<k$, $k\geqslant 1$.

Пусть $f(n,k)$ — число внутренней устойчивости критического по раскраске графа G_n с $\chi(G_n)=k$. Браун и Мун [88] получили предельное значение этой величины. Показано, что при $k>3$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n,k)}{n}=1$ и $n-f(n,k)=O(\sqrt{n})$.

В. Г. Визинг [7] нашел оценки числа внешней устойчивости $\beta(G_{n,m})$ связного графа $G_{n,m}$

$$1\leqslant\beta(G_{n,m})\leqslant\begin{cases}\min\left\{\left[\frac{n}{2}\right],\left[\frac{1+2n-\sqrt{8m+1}}{2}\right]\right\}, & \text{если } m\leqslant\frac{(n-2)(n-3)}{2},\\ \min\left\{\left[\frac{n^2-2m}{2}\right],2\right\}, & \text{если } m>\frac{(n-2)(n-3)}{2}.\end{cases}$$

Для несвязного графа $G_{n,m}$ получены следующие оценки $\max(n-m,1)\leqslant\beta(C_{n,m})\leqslant[n+1-\sqrt{1+2m}]$. Для декартова произведения графов $L\times K$ В. Г. Визинг предположил, что $\beta(L\times K)\geqslant\beta(L)\cdot\beta(K)$. Гипотеза верна, как показано в [16], для полных графов, когда $\beta(L\times K)=\min\{|X|,|Y|\}$ и когда $\beta(L)\cdot\beta(K)\leqslant\min\{|X|,|Y|\}$. Здесь $|X|$ и $|Y|$ — мощности множеств вершин графов L и K.

Получены оценки минимального числа $f(G,k)$ вершин графа G таких, что любая вершина достижима из некоторой выбранной вершины (количество выбранных вершин равно $f(G,k)$) путем длины, не превышающей $k>0$ [207]. В классе связных графов G_n оценка точная $f(G_n,k)\leqslant\frac{n}{k+1}$. Найдена также верхняя (не точная) оценка в классе графов G_n с s компонентами связности. Для графов G_n с диаметром, не превосходящим $2k$, получены верхняя и нижняя оценки.

*) Реберным графом $L(G)$ для G называется граф, вершинами которого являются ребра G, и две вершины в $L(G)$ смежны, если и только если соответствующие им ребра G инцидентны. Тотальным графом $T(G)$ для G является граф, вершинами которого являются вершины и ребра G, и две вершины $T(G)$ смежны, если соответствующие им элементы G (вершины или ребра) смежны или инцидентны.

Для диаметра d графа G с n вершинами и m ребрами Бонди [81] доказал соотношение $2d-3-\frac{(d^2-d-4)}{n}\leqslant\frac{n^2-2m}{n}$, из которого вытекают два неравенства: $d(G)<1+\frac{n^2-2m}{n}$ и $d(G)+d(\overline{G})\leqslant n+1$, последнее — в предположении связности графа $\overline{G}$, дополнительного к G.

М. К. Гольдберг [16] получил нижнюю оценку диаметра $d(G_{n,m})$ сильно связного графа $G_{n,m}$ с n вершинами и m дугами $d(G_{n,m})\geqslant\left\{\frac{2(n-1)}{m-n+1}\right\}$, где $\{x\}$ — наименьшее целое, большее или равное x.

Обозначим класс графов с n вершинами и диаметром, не превышающим 2 (2-достижимых), которые при удалении любой вершины (любого ребра) становятся l-достижимыми, через $\mathscr{G}_x(n, 2, l, 1)$ (соответственно $\mathscr{G}_U(n, 2, l, 1)$). Мерти [205] доказывает, что наименьшее количество ребер графа из $\mathscr{G}_x(n, 2, l, 1)$ равно $(2n-5)$ (для $n\geqslant 5$ и $l\geqslant 3$), а для графа из $\mathscr{G}_U(n, 2, l, -1)-\left(n-1+\left[\frac{n}{2}\right]\right)$ для $n>8$ и любого $l\geqslant 3$. Дано описание всех графов из этих классов, имеющих наименьшее число ребер.

Диаметр $d(G)$ большинства графов с n вершинами и $C\cdot n$ дугами или ребрами ($C\geqslant 2$) четырех классов (мультиграфов, мультиграфов без петель, графов без кратных дуг или ребер, графов без петель и кратных дуг или ребер) оценен в работе А. Д. Коршунова [33]: для неориентированных графов $\frac{1}{2}\cdot\log_c n<d(G)<20\log_c n$, для ориентированных $\frac{1}{2}\log_c n<d(G)<10\log_c n$.

Пусть $m(n, s)$ — наименьшее число ребер в графе G_n с n вершинами и диаметром 2, в котором после выбрасывания любых s ребер диаметр остается равным 2. Пусть теперь $G_n(s)$ — граф, в котором вершины ($n\geqslant 2s+1$) разбиты на два множества A и $B: |A|=s+1$, $|B|=n-s-1$, никакие две вершины B ребрами не соединены, остальные ребра проводятся, их $f(n, s)=(s+1)(n-s-1)+\frac{s(s+1)}{2}$. Мерти [206] доказал, что если $n\geqslant\frac{(3+\sqrt{s})(s+1)}{2}$, то $m(n, s)=f(n, s)$ и граф $G_n(s)$ — критический по указанному выше свойству.

Максимальное число ребер $f(n, r)$ в графе G_n, имеющем радиус r, оценено в [10]: $f(n, 1)=\frac{n(n-1)}{2}$, $f(n, 2)=\left[\frac{n(n-2)}{2}\right]$, $f(n, r)=\frac{n^2-4nr+5n+4r^2-6r}{2}$ для $r\geqslant 3$.

Оценки числа дуг ориентированного графа G_n с заданным радиусом и числом бикомпонент получены Ш. М. Исмаиловым [27, 28].

Для $f(k, n)$ — наименьшего числа такого, что каждый граф G без петель и кратных ребер, имеющий не менее $f(k, n)$ вершин, содержит или полный подграф с k вершинами, или n попарно не смежных вершин, — в статье [132] получена верхняя оценка $f(k, n) \leqslant C_k \cdot \frac{n^{k-1}}{(k-1)!} + O(n^{k-1})$, где $C_{k+1} < C_k < 1$ для $k \geqslant 3$. Получены оценки максимального числа ребер графов с заданным числом треугольников, не имеющих общих ребер [184].

Наименьшее количество вершин в однородных графах степени g и с заданным обхватом изучается в [4]. Некоторые оценки этой величины в случае ориентированных графов, в которых для каждой вершины имеется одинаковое число входящих и выходящих дуг, получены в [217].

Возможности разложения полного графа на факторы заданного диаметра, в частности, диаметра 2, рассматриваются в [214, 215, 216, 218].

Относительно непересекающихся (по вершинам) полных подграфов в данном графе Эрдёш предположил, что всякий граф с $l \cdot n$ вершинами $(l > 1)$, в котором все вершины имеют степени $\geqslant (l-1)\,n$, содержит n непересекающихся полных подграфов, каждый с l вершинами. Эта задача решена положительно для $l = 2, 3, 4$ и произвольного n, а также для $n = 2, 3$ и произвольного l. Обзор решенных и нерешенных задач дан Эрдёшем в [113, 115, 116].

Если $G_1, G_2, \ldots, G_k$ — некоторые графы, то $f(n, G_1, \ldots, G_k)$ означает наименьшее число такое, что любой граф с n вершинами и $f(n, G_1, \ldots, G_k)$ ребрами содержит частичный подграф, изоморфный одному из графов $G_1, \ldots, G_k$. В [113] показано, что: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n, G_1, \ldots, G_k)}{n^2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1}\right)$, где $r = \min\limits_{1 \leqslant l < k} \chi(G_l)$; 2) для $r \geqslant 3$ и графа G с n вершинами и $\frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{r-1} + o(1)\right)$ ребрами, не содержащего (для некоторого t) полного r-дольного графа $K_r(t, t, \ldots, t)$, существуют такие числа $p_1, \ldots, p_{r-1}$, что $\sum\limits_{i=1}^{r-1} p_i = n$, $p_i = (1 + o(1))\frac{n}{r-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, r-1)$, и граф $K'_{r-1}(p_1, \ldots, p_{r-1})$ может быть получен из G добавлением и удалением $o(n^2)$ ребер; 3) для графа $G(k)$, полученного из двудольного графа G добавлением k новых вершин, смежных со всеми вершинами G и не смежных между собой, имеет место оценка числа ребер $f(n, G(k)) < \frac{n^2}{4} + c_k \cdot f(n, G)$, также $f(n, K_2(r, r)) < c_1 \cdot n^{2-1/r}$ и $f(n, K_2(3, 3)) > c_2 n^{\frac{5}{3}}$; 4) для элементарного цикла c_4 длины 4 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n, c_4)\, n^{-3/2} = \frac{1}{2}$. Более короткое доказательство и обобщение теоремы Эрдёша—Поша [219] о представляющем множестве в графе без $(k+1)$ независимых циклов привел Симонович [251] в следующем уточненном виде $(1/2 + o(1))\, k \log_2 k < r(k) < (4 + o(1))\, k \log_2 k$. Гантелью автор называет граф, состоящий из двух элементарных независимых циклов и элементарного пути, соединяющего эти циклы и имеющего с каждым из них точно одну общую вершину. Обозначим через $s(k)$ наименьшее число s такое, что любой граф без $(k+1)$ независимых гантелей имеет s-вершинное множество, представляющее все его гантели. Для $s(k)$ при $k \geqslant 2$ Симонович [251] получил неравенства $(1 + o(1))\, k \log_2 k < s(k) < (4000 + o(1))\, k \log_2 k$.

В. Г. Визинг [11] показал, что такие задачи теории графов, как нахождение чисел внутренней и внешней устойчивости, определение хроматического числа и нахождение гамильтоновой цепи связного графа G, можно свести к одной — нахождению связного подграфа специального вида с наименьшим числом вершин.

Ф. Я. Ветухновский [5] доказал, что любую задачу о покрытии графа системой окрестностей радиуса r можно свести к задаче о покрытии одного из остовов графа. Им исследовалась сложность покрытий при различных дополнительных ограничениях на структуру покрытий.

Обзор результатов по минимальным покрытиям и максимальным упаковкам графов дан в [69].

Эллиотом [112] получены нижние оценки для числа паросочетаний двудольного графа $G_{n,n}$ при достаточно большом количестве ребер. Обобщения теорем Татта и Бержа о необходимых и достаточных условиях существования паросочетаний, содержащих определенные вершины, даны в [90].

«Почти все» графы с n вершинами имеют асимптотически наибольшие паросочетания $\left[\frac{n}{2}\right]$, которые можно эффективно находить с помощью простого алгоритма [39].

Относительно баз дуг ориентированных графов были получены следующие результаты. Для любой базы дуг $\vec{w}$ сильно связного графа G_n справедлива оценка $|\vec{w}| \leqslant 2n-2$, точная в том смысле, что при любом $n \geqslant 1$ существует такой n-вершинный орграф, в котором есть база ровно с $2n-2$ дугами [11].

В работе С. Е. Маркосяна [35] получено необходимое и достаточное условие единственности базы дуг произвольного конечного ориентированного графа и на его основе дан критерий единственности. Х. Ураков [49] получил необходимое и достаточное условие единственности слабо условной базы дуг.

Позже [36] был получен критерий единственности базы дуг ориентированного графа с помощью матрицы смежности и описан метод нахождения некоторой базы дуг. Другой алгоритм дан в [47].

Изучалась связь геометрических свойств графов и их собственных значений (собственными значениями $\lambda_i(G)$ графа G называются собственные значения $\lambda_i(A)$ его матрицы смежности A). Упорядочим собственные значения в порядке возрастания $\lambda_i(G) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(G)$ и в порядке убывания $\lambda^1(G) \leqslant \ldots \leqslant \lambda^n(G)$. В статье Уилфа [279] хроматическое число $\chi(G)$ графа G оценивается $\chi(G) \leqslant 1 + \lambda_1(G)$. Сверху оценка $\chi(G)$ следующая $\frac{\lambda_1(G)}{|\lambda^1(G)|} + 1 \leqslant (G)$ [165, 166], если $\chi(G) \geqslant 2$.

Бонди [84] дал нижнюю оценку $\chi(G)$ через $\{d_i(G)\}$ ($d_i(G)$ — число вершин степени i графа G). Эти оценки удается сравнить в случае, когда G — однородный граф степени d. Тогда $\chi(G) \geqslant \frac{\lambda_1(G)}{|\lambda^1(G)|} + 1 \geqslant \frac{n}{n-d}$.

Другая геометрическая характеристика, оцениваемая с помощью собственных значений графа G с n вершинами, — наименьшее число $k(G)$ клик G, объединение которых дает все множество вершин G, $n - k(G) \leqslant \sum^{k(G)} \lambda_i(G)$, в частности, $k(G) \geqslant \frac{n - \lambda_2(G) - \lambda_1(G)}{1 + \lambda_2(G)}$, изучалась Гоффманом [165, 166].

2. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФОВ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

Здесь рассматриваются результаты о существовании или несуществовании графов, обладающих заданными свойствами, приводятся условия, при выполнении которых можно построить граф с выделенными свойствами, для некоторых задач обсуждаются условия единственности построения.

Задача о реализации заданного набора целых неотрицательных чисел степенями вершин некоторого графа [154] была решена Эрдёшем и Галлаи и конструктивно Гавелом и Хакими. Естественно рассматривать условия реализации для различных классов графов. Так, многими авторами были получены необходимые и достаточные условия для реализации заданного набора чисел степенями вершин дерева.

Получены необходимые и достаточные условия реализуемости двух наборов $p = (p_3, p_5, \ldots)$ и $v = (v_3, v_5, \ldots)$ целых неотрицательных чисел степенями вершин и граней графов, допускающих расположение на ориентируемой поверхности рода g, когда $g=0$ и 1 (расположение на сфере и торе). Пусть для 3-связного графа G, расположенного на поверхности рода g, $v_k(G)$ — число вершин G степени k, $p_k(G)$ — число граней G степени k (степень грани — число ребер, ее ограничивающих) [60, 61, 62, 135]. Формулу Эйлера можно записать в следующем виде:

$$\sum_{k\geqslant 3}(4-k)\,p_k(G)+\sum_{k\geqslant 3}(4-k)\,v_k(G)=8\,(1-g).$$

Суммы $\sum\limits_{k\geqslant 3} kp_k(G)$ и $\sum\limits_{k\geqslant 3} kv_k(G)$ равны удвоенному числу ребер графа G. Достаточность этих условий доказана для случаев $g=0$ и $g=1$. Именно: $p=(p_3, p_5, \ldots)$ и $v=(v_3, v_5, \ldots)$ можно реализовать 3-связным плоским графом тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k\geqslant 3}(4-k)\,p_k+$ $+\sum\limits_{k\geqslant 3}(4-k)\,v_k=8$ и суммы Σkp_k и $\Sigma k\cdot v_k$ должны быть одновременно четными [53]. Наборы p и v можно реализовать 3-связным графом, который можно расположить на торе, если и только если $\Sigma(4-k)\,p_k+\Sigma(4-k)\,v_k=0$, Σkp_k и Σkv_k четны, а также $p\neq(1, 1, 0, 0, \ldots)$ и $v\neq(0, 0, \ldots)$ или $p\neq(0, 0, \ldots)$ и $v\neq(1, 1, 0, 0, \ldots)$.

Если рассматривать вложения такие, что только $v_4\neq 0$, а $v_i=0$ при $i\neq 4$, то Заксом [281] доказана достаточность условия $\Sigma(4-k)\,p_k=8\,(1-g)$ при $g=1$, за исключением случая $p=(1, 1, 0, 0, \ldots)$, который, как показал Барнетт, не реализуется.

В указанных выше работах реализация заданных наборов может достигаться при большом количестве вершин и граней степени 4, (ведь) количество их заранее не фиксируется. Если и общее число всех вершин фиксируется, то известны только необходимые условия реализуемости. Так, Хватал [107] привел следующие условия реализуемости набора $d_1, d_2, \ldots, d_n$, $n\geqslant 3$, $n\geqslant d_{i+1}$: $\sum\limits_{i=1}^{k} d_i\leqslant s(k, n)$, где

$$s(k, n)=\begin{cases} k(n-1) & \text{при } 1\leqslant k\leqslant 2,\\ 2n+6k-16 & \text{при } 3\leqslant k<\frac{1}{3}(n+4),\\ 3n+3k-12 & \text{при } \frac{1}{3}(n+4)\leqslant k\leqslant n.\end{cases}$$

Причем для любых k, n существует реализуемый плоским графом набор, на котором достигаются все равенства. Для случая $d_1=d_2=\ldots=d_n=d$ условия $n\cdot d=0\,(\mathrm{mod}\,2)$ и

$n \cdot d \leqslant 6(n-2)$ являются необходимыми и достаточными, за исключением двух случаев $d=4$, $n=7$ и $d=5$, $n=14$, которые не реализуются.

Приведены необходимые условия существования плоского графа, степени вершин которого равны заданным натуральным числам $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$. Эти условия достаточны, если $d_1 = d_2 = \ldots = d_n$, за исключением двух случаев: 1) $d_1 = \ldots = d_7 = 4$, 2) $d_1 = \ldots = d_{14} = 5$ [53].

Известны условия реализации пар чисел $\{(d_i^+, d_i^-)\}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ полустепенями захода и исхода вершин ориентированного графа с n вершинами, без петель (кратные дуги допускаются). В статье [89] показано, что для реализуемого набора $\{(d_i^+, d_i^-)\}$ все реализации являются графами без контуров тогда и только тогда, когда неравенство $\min(d_i^+, d_i^-) > 0$ выполняется не более чем для одного i.

В [222] изучаются вопросы реализации заданного набора натуральных чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ мощностями вершин графа G. Мощностью $p(x)$ вершины x связного графа G называется число компонент графа $G \setminus x$. Необходимым и достаточным условием реализации данного набора связным графом является выполнение неравенства $\sum_{i=1}^{n} p_i \leqslant 2(n-1)$. В случае равенства получаем дерево. Для реализации связным графом $G_{n,m}$ с n вершинами и $m \geqslant n$ ребрами необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^{n} p_i < 2(n-1)$ и $m \leqslant \binom{k+2}{2} + n - k - 2$, где $k = 2(n-1) - \sum_{i=1}^{n} p_i$. Максимальная мощность $p(G) = \max_x p(x)$ связного графа $G_{n,m}$ равна $r(n, m) + 1 = \max\left\{q : q \leqslant n-2, \ m \leqslant \binom{n-q}{2} + q\right\} + 1 = \left[n - \frac{3}{2} - \sqrt{2m - 2n + \frac{9}{4}}\right] + 1$. Дано описание связных графов $G_{n,m}$ с максимальной мощностью.

Конструктивно исследуется вопрос о существовании надграфа G_1 с заданным диаметром d для произвольного графа G, который обладает свойствами: 1) множества соседей любых двух различных вершин G_1 различны, 2) после удаления из G_1 любого ребра или любой вершины вместе с инцидентными ей ребрами диаметр G_1 строго возрастает [130].

Многими авторами были получены отдельные результаты о существовании или несуществовании (v, k, λ)-графов, т. е. графов, у которых число вершин равно v, степень каждой из них равна k и любые две (различные) вершины одновременно смежны точно с λ вершинами. Например, в работе Уоллиса [271] получено новое семейство таких графов. Необходимые условия на параметры v, k, λ существования (v, k, λ)-графов определяются довольно легко. В статье того же автора [270] построена бесконечная серия наборов (v, k, λ), удовлетворяющих необходимым условиям, для которых не существует (v, k, λ)-графов.

Рассматривались задачи построения регулярных графов степени k с n вершинами и обхватом d. Так, для $k=4$, $n=19$, $d=5$ существует единственный граф и не существует для $k=4$, $n\leqslant 18$, $d=5$. В [87] доказано, что нет графов для любого k с $d=5$ и k^2+2 вершинами. В [192] строятся регулярные графы степени k с $2(k^2-k+1)$ вершинами и $d=6$. Описаны свойства и построены графы, в которых каждая пара вершин смежна одинаковому числу k других вершин [86].

Для однородных графов степени $d>2$, диаметра k, обхвата $2k$, с $n=2((d-1)^k-1)/(d-2)$ В. Г. Визинг [9] показал, что при $k\neq 2,3,4,6$ таких графов не существует, при $k=2$ и любом d существует только один граф, при $k=3$ и $k=4$ — один граф для каждой конечной проективной геометрии с d точками на прямой размерности соответственно 2 и 3.

Для локально конечного ориентированного графа G, у которого полустепени исхода и захода каждой вершины не менее k, доказано, что существуют такие частичные графы $H_1, H_2, \ldots, H_k$ графа G, что каждая дуга G входит в один и только один граф H_i и в каждом графе H_i для любой его вершины имеются по крайней мере одна входящая и одна выходящая дуги [11].

С. Я. Агакишиевой [2] установлено существование графов, у которых окружение каждой вершины (подграф, порожденный вершинами, смежными с данной, сама вершина в этот подграф не входит) изоморфно: 1) простой цепи заданной длины $l\neq 2$; 2) простому циклу длины $l\geqslant 3$. Получены нижние оценки рода поверхностей, на которых данные графы реализуемы.

Свойства критических (по добавлению дуг) орграфов с заданным диаметром описаны Л. С. Мельниковым [38]. Класс графов, реберно критических по отношению к числу внутренней устойчивости, изучается Кригером [183].

Описание и классификация по длине наибольшего цикла без хорд дал Вессель [278] для графов G, критических по свойству вершинного покрытия — наименьшее покрытие G содержит p вершин, и удаление любого ребра из G приводит к вершинному покрытию из $p-1$ вершин.

В работе [97] изучаются графы G, обладающие свойством P_l (G не содержат подграфов, гомеоморфных полному графу K_l или полному двудольному $K_{\left[\frac{n+2}{2}\right], \left\{\frac{n+2}{2}\right\}}$). Для небольшого количества вершин такие графы хорошо изучены: это пустые графы, леса, плоские и внешнеплоские графы. Изучались характеристики, связанные с разбиением графа на части, каждая из которых обладает свойством P_l, такие, как толщина, древесность, хроматическое число, мощность наибольшего паросочетания и т. д.

3. ИЗУЧЕНИЕ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

Введение ориентации ребер часто приводит к необходимости корректировать результаты, полученные для неориентированных графов. Так, графы, простые для изучения в неориентированном случае, после ориентации ребер могут потерять эту простоту. Например, возникает много задач при изучении турниров — полных ориентированных графов. Иногда для ориентированных графов нужно определять новые понятия, как при изучении связности.

Пусть $w_G(x, y)$ — максимальное число попарно различных путей из вершины x в вершину y конечного орграфа $G(X, U)$, не имеющих общих дуг, $\sigma_G(x, y)$ — максимальное количество контуров, проходящих через x и y и не имеющих общих дуг. Орграф G называется симметричным по путям, если $w_G(x, y) = w_G(y, x)$, и симметричным по контурам, если $\sigma_G(x, y) = w_G(x, y)$ в каждом случае для любых вершин $x, y \in X$. Было доказано, что из псевдосимметрии графа (полустепень исхода равна полустепени захода для каждой вершины $x \in X$) следует его симметрия по контурам, а из симметрии по контурам — симметрия по путям. В [249] доказано, что из симметрии по контурам следует псевдосимметрия.

Ориентированный граф G_n с n вершинами называется базисным, если в нем не существует частичного графа $H_n (H_n \neq G_n)$ с таким же отношением достижимости вершин. Базисные графы имеют следующие свойства [138]: 1) наибольшее число дуг базисного графа G_n без контуров равно $\left[\frac{n^2}{4}\right]$; 2) наибольшее число базисного сильно связного графа G_n равно $2(n-1)$; 3) наибольшее число дуг базисного графа G_n с k компонентами сильной связности равно $2(n-k) + \left[\frac{n^2}{4}\right]$. Для всех оценок приведены экстремальные графы, на которых они достигаются.

В ряде работ изучались свойства транзитивно-ориентируемых графов [24]. В этих графах возможно такое упорядочение вершин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что при $i<j<k$ существование дуг $\overrightarrow{(x_i, x_j)}$ и $\overrightarrow{(x_j, x_k)}$ определяет существование дуги $\overrightarrow{(x_i, x_k)}$. Граф G_n называется графом перестановок, если существуют такая перестановка $P=[P(1), P(2), \ldots, P(n)]$ чисел $1, 2, \ldots, n$ и такая нумерация вершин $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что две вершины x_i и x_j смежны тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $(i-j)[P^{-1}(i)-P^{-1}(j)]<0$, где $P^{-1}(i)$ — натуральное число, которое P отображает на i. В [218] показано, что данный граф G является графом перестановок, если и только если G и $\bar{G}$ — транзитивно-ориентируемые графы. Свойство транзитивной ориентируемости может быть эффективно использовано для нахождения максимальных клик и хроматического числа графов, обладающих этим свойством*).

Результаты, полученные о свойствах полных ориентированных графов (турниров), в которых каждая пара вершин соединена одной дугой, собраны достаточно полно в монографии Муна [202]. Турнир T_n с n вершинами называется сводимым, если его вершины можно разбить на два непустых множества A и B такие, что дуги, соединяющие A и B, ориентированы от вершин A к вершинам B. В ином случае турнир называется несводимым. Для вероятности $Q(n)$ встретить несводимый турнир среди всех турниров с n вершинами доказано, что $|Q(n)-n/2^{n-2}|<\frac{1}{2}(n/2^{n-2})^2$, $n\geqslant 2$. Пусть $\Gamma(A)=\{y: x\in\Gamma y$ для некоторой $x\in A\}$, где A — произвольное подмножество множества вершин X турнира T_n, $\Gamma^m(X)=\Gamma(\Gamma^{m-1}(X))$, $m=2, 3, \ldots$; T_n — сильный турнир, если и только если для любой вершины x множество $x\cup\Gamma(x)\cup\cup\Gamma^2(x)\cup\ldots\cup\Gamma^{n-1}(x)$. Доказано, что турнир является сильным тогда и только тогда, когда он несводимый. Получены также оценки для наибольшего числа $u(n, k)$ транзитивных подтурниров с k вершинами.

Множество S дуг турнира T_n называется совместимым, если в T_n нет контуров, дуги которых принадлежат S. Обозначим через $w(n)$ наибольшее целое число такое, что каждый турнир с n вершинами содержит совместимое множество с $w(n)$ дугами. Эрдёш и Мун доказали [121], что $w(n)\geqslant\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+1}{2}\right]$ и $w(n)\leqslant\frac{1}{2}(1+\varepsilon)C_n^2$ для любого $\varepsilon>0$ и достаточно больших значений n.

---

*) О результатах, посвященных базам вершин и базам дуг орграфов, см. раздел 1, а также монографию А. А. Зыкова [24].

Будем говорить, что турнир T_n обладает свойством $S(k, m)$, если для любого подмножества A существует по крайней мере m вершин, каждая из которых соединена с вершинами A дугами в направлении A. Для таких турниров $n \geqslant 2^k(m+1)-1$ [202].

Редеи (1934 г.) доказал, что каждый турнир имеет гамильтонов путь. Харари и Мозер [1] получили одно из обобщений этого утверждения: любой сильно связный турнир T_n с n вершинами имеет контур длины p, где $p=3, 4, \ldots, n$. В работе [72] доказано, что в турнире с полустепенями исхода $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ число транзитивных троек равно $\sum\limits_{i=1}^{n} s_i(s_i-1)/2$. Здесь же получена верхняя оценка $f_k(n)$ числа сильных связных k-вершинных подтурниров в T_n

$$f_k(n)=\begin{cases} C_n^k - n\cdot C^k_{\frac{n-1}{2}}, & \text{если } n \text{ — нечетно,} \\ C_n^k - \frac{n}{2}\left(C^{k-1}_{n/2} + C^{k-1}_{\frac{n-2}{2}}\right), & \text{если } n \text{ — четно.} \end{cases}$$

Турнир $\widetilde{T}_n$ называется транзитивным, если полустепени исхода его вершин образуют последовательность $(0, 1, \ldots \ldots, n-1)$. Эрдёшем и Мозером [122] рассматривалась следующая задача: какова наибольшая целочисленная функция $f(n)$ такая, что каждый турнир T_n содержит $\widetilde{T}_{f(n)}$? Были получены оценки $[\log_2 n]+1 \leqslant f(n) \leqslant 2[\log_2 n]+1$. В статье [227] было показано, что $f(14)=5$, т. е. $f(n) \neq [\log_2 n]+1$; приведены также значения $f(n)$ для $1 \leqslant n \leqslant 23$.

Муном [203] получен ответ на вопрос: для каких целых чисел h в турнире T_n существует контур длины h, содержащий все вершины некоторого заданного множества из r вершин. Если в турнире T существует элементарный контур длины $n>3$, то в T имеется по крайней мере один контур длины $(n-1)$.

Изучено предельное поведение наибольшего числа $t(n)$ гамильтоновых путей в турнирах с n вершинами $\lim\left(\frac{t(n)}{n!}\right)^{1/n}=\alpha$, где $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 2^{-3/4}$. Дугласом [110] получены необходимые и достаточные условия, чтобы турнир T_n имел единственный гамильтонов контур. Описание всего класса таких турниров позволило подсчитать их количество.

В диссертации Алспача [59] доказано, что турнир с $2n+1$ вершинами регулярен (полустепени исхода и захода каждой вершины равны n), если и только если он содержит $\frac{(p^3-p)}{24}$

3-контуров, приведены четыре метода построения всех регулярных турниров.

Турнир T обладает свойством S_k, если для любых k его вершин $x_1, x_2, \ldots, x_k$ существует такая вершина x, что дуги (x, x_i) $(1 \leqslant i \leqslant k)$ ориентированы от x к x_i. Пусть $n = f(k)$ — наименьшее число для данного k, для которого существуют турниры с $f(k)$ вершинами, обладающие свойством S_k. Эрдёш доказал, что $2^{k+1} - 1 \leqslant f(k) \leqslant C_k^2 \cdot k^2$. В работе [72] нижняя оценка улучшена $f(k) \geqslant (k+2) \cdot 2^{k-1} - 1$, а для $k = 3$ показано, что $f(3) = 19$.

Рид [225] получил следующую оценку для $f(n)$ — наибольшего k такого, что любой турнир T_n с n вершинами содержит множество из k дуг, которые в T_n не образуют контура: для $2 \leqslant n \leqslant 7$ $f(n) = \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+3}{2}\right] - 1$, для $n \geqslant 8$ $f(n) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n+3}{2}\right]$.

Турниры с регулярно размещенными 3-контурами (каждая дуга входит в одинаковое число 3-контуров) изучались Котцигом [181]. В однородном турнире, в котором каждое ребро принадлежит точно k 3-контурам, как показано в [215], имеется $2k(k-1)$ 4-контуров и $k(4k-3) \cdot (k-1)$ 5-контуров.

4. ОБХОДЫ ГРАФОВ

В данном разделе помещены результаты о гамильтоновых и эйлеровых циклах и цепях, о длиннейших цепях в графах, приводятся условия существования таких обходов, а также различные их обобщения как для неориентированных, так и для ориентированных графов.

Гуйа-Ури (1960 г.) доказал, что если ориентированный сильно связный граф G_n с n вершинами обладает свойством: для любой вершины x имеет место $d_G^+(x) + d_G^-(x) \geqslant n$, то в G существует гамильтонов контур. Одним из многих обобщений этой теоремы является следующее утверждение [77]: если $d^+{}_G(x) \geqslant \frac{n+k}{2}$, $d^-{}_G(x) \geqslant \frac{n+k}{2}$, где $0 \leqslant k \leqslant n-1$, то любой элементарный путь длины k может быть включен в некоторый гамильтонов контур.

Пусть вершины графа $G_n^=(x,E)(n \geqslant 3)$ перенумерованы так, что $d_G(x_1) \leqslant d_G(x_2) \leqslant \ldots \leqslant d_G(x_n)$. Если выполняется следующее условие для некоторого q: $0 \leqslant q \leqslant n-2$,

$$\left.\begin{array}{r} j < k,\ d_G(x_j) \leqslant j + q \\ d_G(x_k) \leqslant k + q + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow d_G(x_j) + d_G(x) \geqslant n + q,$$

то для каждой элементарной цепи с k ребрами существует содержащий ее гамильтонов цикл [75]. Из этой теоремы можно получить результаты Бонди [83] и Кронка [185].

В первом приводится следующее достаточное условие существования гамильтонова цикла: если $j<k$, $d_G(x_j)\leqslant j$, $d_G(x_k)\leqslant k-1$, то $d_G(x_j)+d_G(x_k)\geqslant n$. Во втором: если граф G_n, $n\geqslant 3$, имеет свойства: 1) для любого целого k: $q<k<\frac{1}{2}(n+q-1)$, где $0\leqslant k\leqslant n-2$, множество S_k вершин со степенями, не превышающими k, содержит меньше $k-q$ вершин; 2) для $k=\frac{1}{2}(n+q-1)$, если оно целое, $|S_k|\leqslant k-q$, тогда для каждой элементарной цепи с k ребрами можно найти содержащий ее гамильтонов цикл [75]. Из этой теоремы также вытекает ряд следствий:

1. если для каждого $j\leqslant\frac{n+q}{2}$ множество $S_j=\{x/x\in X, d_G(x)\leqslant j\}$ содержит меньше $(j-k)$ вершин и для каждого $k\leqslant n+q$ множество $T_k=\{y/y\in Y, d_G(y)\leqslant k\}$ содержит меньше $(k-q)$ вершин $(q\geqslant 0)$, то любое множество, содержащее k ребер, которые образуют попарно непересекающиеся (по вершинам) цепи, принадлежит некоторому гамильтоновому циклу;

2. $d_G(x_j)\leqslant g$, $d_G(x_k)\leqslant k\Rightarrow d_G(k_j)+d_G(x_k)\geqslant n+1$,

или

3. для любого $k\leqslant\frac{n}{2}$ $|S_k|<k$, $|T_k|<k$,

или

4. $d_G(x)+d_G(y)\leqslant n\Rightarrow[x, y]\in E$,

или

5. $|x|=|y|=n$, $|E|=m>n^2-n+2$, то при выполнении каждого из последних четырех условий в G имеется гамильтонов цикл.

Существенным результатом являются достаточные условия, найденные Поша [219]:

1) для каждого $k: 1\leqslant k<\frac{n-1}{2}$ число вершин со степенями $\leqslant k$ меньше k,

2) (если n нечетно) число вершин со степенями $\leqslant\frac{n-1}{2}$ не более $\frac{n-1}{2}$.

Если число ребер в графе G_n достаточно велико, именно $m\geqslant\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$, то в G_n имеется гамильтонов цикл (теорема Оре). Эта оценка неулучшаема, так как существует граф G_1^0 с $m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ ребрами, который не имеет гамильтонова цикла.

Ряд результатов был получен для двудольных графов $G=(X, Y, E)$, $|X|=|Y|=n\geqslant 2$. Пусть, как и раньше, вершины множеств X и Y перенумерованы так, что $d_G(x_1)\leqslant$

$\leqslant d_G(x_2) \leqslant \ldots \leqslant d_G(x_n)$ и $d_G(y_1) \leqslant d_G(y_2) \leqslant \ldots \leqslant d_G(y_n)$. Пусть также $d_G(x_1) \geqslant q$, $d_G(y_1) \geqslant q$ $(q \geqslant 0)$, и если j и k такие первые индексы, что $d_G(x_j) \leqslant j+q$, $d_G(y_k) \leqslant k+q$, $d_G(x_j) + d_G(y_k) \geqslant n+q+1$, тогда любая элементарная цепь с k ребрами может быть включена в некоторый гамильтонов цикл [65].

Граф G называется гамильтоново связным, если любая пара его различных вершин соединяется гамильтоновой цепью. Оре [209] показал: для того чтобы граф G_n был g-гамильтоново связным, достаточно, чтобы в G_n было $m = \frac{(n-1)\cdot(n-2)}{2} + 3$ ребер. Мун [202] нашел, что каждый гамильтоново связный граф G_n, $n \geqslant 4$, должен иметь по крайней мере $\left[\frac{3n+1}{2}\right]$ ребер. Если в графе G_n, $n \geqslant 3$, выполняются два условия: 1) для каждого целого $k \left(1 < k < \frac{n}{2}\right)$ множество S_k вершин со степенями $\leqslant k$ содержит меньше $k-1$ ребер и 2) для $k = \frac{n}{2}$ (если n—четно) $|S_k| \leqslant k-1$, то G — гамильтоново связен. В случае двудольного графа $G(X, Y; E)$, $|X| = |Y| = n \geqslant 2$ и $d(x_1) \leqslant \ldots \leqslant d(x_n)$; $d(y_1) \leqslant \ldots \leqslant d(y_n)$, если выполняется $d(x_j) + d(y_k) \geqslant 2$ для двух первых индексов j и k таких, что $d(x_j) \leqslant j+1$, $d(y_k) \leqslant k+1$, также получаем достаточное условие для гамильтоновой связности $G(X, Y; E)$. Известен другой набор достаточных условий: 1) для любого $j \leqslant \frac{n+1}{2}$ множество вершин x_j со степенями $\leqslant j$ содержит меньше $j-1$ вершин и 2) для каждого $k \leqslant \frac{n+1}{2}$ множество вершин y_k со степенями $\leqslant k$ содержит меньше $k-1$ вершин.

Связный граф G называется гипогамильтоновым, если он не содержит гамильтонова цикла, но каждый подграф, получаемый удалением из G любой вершины с инцидентными ей ребрами, содержит гамильтонов цикл. В [191] дается способ построения гипогамильтоновых графов с любым числом вершин $n \geqslant 10$. Для $n < 10$ таких графов не существует.

В реберном графе $K(G)$ графа G существует гамильтонова цепь (цикл) тогда и только тогда, когда в G имеется цепь (цикл) Q со свойством: каждое ребро графа G инцидентно хотя бы одной вершине цепи (цикла) Q [160]. Обозначим через $K^n(G)$ n-ую итерацию перехода от данного графа G к реберному графу. Если граф $K^{n_0}(G)$ имеет гамильтонов цикл, то и любой граф $K^n(G)$, $n > n_0$, также имеет; наименьшее из таких чисел n_0 называется гамильтоновым индексом (обозначение $\mathrm{Ham}(G)$). Если такого n_0 не существует, то полагаем $\mathrm{Ham}(G) = +\infty$. В работе [160] исследуется, когда $\mathrm{Ham}(G)$

конечен и когда бесконечен. Здесь также получена оценка для связного графа G_n, отличного от простой цепи: $\mathrm{Ham}(G_n) \leqslant \leqslant n-3$.

Для существования эйлерова цикла реберного графа $K(G)$ графа G необходимо и достаточно, чтобы степени всех вершин G имели одинаковую четность [160].

Для тотальных графов Бехзадом [66] доказываются следующие утверждения: если граф G имеет гамильтонов цикл, то его тотальный граф $T(G)$ имеет гамильтонов цикл; если граф G связный, то $T(G)$ имеет эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степени всех вершин G имеют одинаковую четность; если некоторый частичный граф графа G содержит эйлеров цикл, то граф $T(G)$ содержит эйлеров цикл; для каждого связного графа G (кроме одновершинного) граф $T(T(G))$ имеет гамильтонов цикл.

Ориентированный граф $G(X, \Gamma)$ называется случайно гамильтоновым, если в нем гамильтонов путь всегда можно получить следующим образом: 1) начать с любой вершины, 2) из любой промежуточной вершины x перейти в любую из еще не пройденных вершин Γx, 3) из последней вершины перейти в первую. В [102] перечислены все такие графы. Это 1) контур C_n, 2) полный симметрический граф K_n и 3) граф $D(n, k)$, имеющий следующую структуру: его множество вершин разбито на n непересекающихся подмножеств, в каждом по k вершин, и дуги соединяют любые для вершины из i-того и j-того множеств, если и только если $j-i \equiv 1 \pmod{n}$. Отсюда в качестве следствия вытекает результат, полученный ранее для неориентированных случайно гамильтоновых графов: такими графами являются цикл C_n, полный граф K_n и полный двудольный граф $K_{n,n}$.

Оре [209] определил эйлеров граф, случайный из вершины x: любая цепь, начинающаяся в x, должна принадлежать некоторому эйлеровому циклу. Чартранд и Уайт [105] доказали, что эйлеров граф G_n имеет 0,1,2 или n вершин, для которых G_n случайно эйлеров. Граф называется трансверсабельным из вершины x, если любая цепь, начинающаяся в x, принадлежит некоторой эйлеровой цепи. Пусть x и y — две вершины нечетной степени трансверсабельного графа G. Тогда G — произвольно трансверсабельный из x, если и только если каждый цикл G содержит y. Аналогичные результаты получены для обобщений введенных выше графов — для n-трансверсабельных и произвольно n-трансверсабельных графов.

Кронком [185] это определение естественным образом распространяется на ориентированные графы. Для этих графов получены следующие результаты: 1) эйлеров орграф G является случайным из вершины x тогда и только тогда, когда любой контур G содержит x; 2) пусть G — эйлеров орграф, случайный из любой вершины x множества S. Тогда вершины из S встречаются в одном и том же порядке в каждом контуре G; 3) для эйлерова орграфа G с вершинами $(n \geqslant 2)$, случайного из p вершин, имеет место или $0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, или $p = n$.

Найдена рекуррентная формула для числа $H_n(r)$ всех различных гамильтоновых циклов, которые имеют ровно r $(0 \leqslant r \leqslant n-2)$ общих ребер с некоторым заданным гамильтоновым циклом полного графа P_n [208]. В случае $r=0$ показано, что $\frac{H_n(0)}{(n-1)!} \to h(0)$ при $n \to \infty$, где $0{,}088 < h(0) < 0{,}5$.

Если G — связный граф с $n \geqslant 2$ вершинами, то G^3 (куб G в смысле прямого произведения) гамильтоново связен [172]. Доказательство проводится для дерева. Более того, не только G^3 — гамильтонов, но и граф, получаемый из G^3 выбрасыванием любой вершины, также гамильтонов [98].

Татт [261] доказал, что любой плоский 4-связный (по вершинам) граф обладает гамильтоновым циклом. Вальтер [274] показывает, что этот результат для регулярных графов улучшить нельзя; для этого он строит два регулярных 3-связных графа со степенями вершин 4 и 5, не имеющим гамильтоновых циклов.

Исследовались возможные количества различных гамильтоновых циклов в кубических графах. Так, доказано, что число гамильтоновых циклов кубического графа G четно тогда и только тогда, когда число разбиений G на три (линейных) фактора четно. Каждый двудольный кубический граф $G_n (n \geqslant 3)$ имеет четное число гамильтоновых циклов [85].

Достаточные условия существования гамильтоновых циклов и цепей, полученные разными авторами, приводятся в статье Нэш-Вильямса [207].

Палашти [213] доказала, что гамильтоновыми циклами обладают «почти все» графы с n вершинами и m ребрами, начиная с $m(n) = n(\log_2 n + c)$, где c — константа.

Конечная последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ вершин единичного n-мерного куба E^n называется цепью $\rho(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$, и $\rho(\alpha_i, \alpha_j) > 1$, если $|i-j| > 1$, где $\rho(\alpha, \beta)$ — расстояние Хэмминга между вершинами α и β в E^n. В статье А. А. Евдокимова [21] получен порядок функции $l(n)$ — длины максимальной цепи в E^n. Именно, было показано, что $l(n) > C \cdot 2^n$, где C — константа.

Длина цепи максимальной длины — длина обхода — изучается в работе [171]. Так, для связного графа G_n с минимальной степенью r длина обхода $\partial(G_n) \geqslant \min(n-1, 2r)$, для полного k-дольного графа $G = K(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ $\partial(G) =$

$=\min(2n-2p_k,\ n-1)$, где $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_k$ — числа вершин в подмножествах, $\sum_{i=1}^{k} p_i = n$.

Вальтером [272] построена последовательность регулярных графов $\{G_n\}$ степени k, произвольной связности по вершинам (начиная с двусвязности) и длиной максимального цикла b таких, что $\lim_{r\to\infty} \frac{b}{n} = 0$. Он же [273] описал бесконечную последовательность плоских кубических 3-связных (по ребрам) графов $\{G_n\}$ со свойством: в каждом графе G_n любая вершина, принадлежащая хотя бы одному длиннейшему элементарному циклу, принадлежит и всем длиннейшим элементарным циклам и отношение числа вершин длиннейшего элементарного цикла к числу всех вершин этого графа стремится к нулю при $n \to \infty$.

В [188] построена последовательность плоских кубических трехсвязных графов $\{G_n\}$, которые имеют точно одну длиннейшую цепь и длина этой цепи есть $o(n)$.

5. ИЗУЧЕНИЕ СВЯЗНОСТИ ГРАФОВ

Понятие связности графов является естественным обобщением таких простых понятий, как вершина сочленения, мост, блок, а также разрез. Были введены понятия вершинной и реберной связности. Прошедшее десятилетие характеризуется прежде всего попытками обобщить классические результаты Менгера и Уитни, распространить их на различные классы графов, а также уточнить для более узких классов графов. Исследуются свойства h-связных графов. Здесь также рассматриваются вопросы реализации графами данной метрики.

Понятия соединимости и отделимости вершин графа $G(X, U)$ [24] обобщаются на соединимость и отделимость множеств X_1 и X_2 относительно разбиения $X = X_1 \cup X_2$ на непересекающиеся подмножества. Используя эти понятия, в [284] доказана теорема, аналогичная теореме Менгера. Подобным образом обобщаются понятия сплетаемости и отрезаемости.

Пусть две различные вершины x и y соединены h попарно непересекающимися по ребрам цепями. Тогда x и y соединены такими цепями, что общие вершины произвольных двух цепей расположены в одинаковом порядке вдоль обеих цепей от x к y. В [150] приведен пример с $h = \aleph_0$, показывающий, что это утверждение не верно, когда h — бесконечное кардинальное число.

«Ориентированный» вариант теоремы Менгера — Уитни дан в [136]: если x и y — различные вершины орграфа G, которые не соединены дугой (x, y), и если удаление любых $k-1$ или меньше вершин G не разделяет x и y, то G содержит k путей таких, что любые два не имеют общих вершин.

Пусть в графе G вершины занумерованы так, что $d(x_1) \leqslant \leqslant d(x_2) \leqslant \ldots \leqslant d(x_n) = d$. Пусть также $i_1 < i_2 < \ldots$ — такой набор индексов, что $d(x_i) < i$; введем для l-того индекса этого набора величину $q(l) = \left[\frac{1}{l} \sum_{k=1}^{l} d(x_k)\right]$. Тогда число p компонент связности G удовлетворяет неравенству

$$p \leqslant \max\left\{l, \left[\frac{n+q(l)-d}{q(l)+1}\right]\right\}.$$

Одним из следствий этого утверждения является следующий результат Бонди: если для целого q первые q степеней в приведенной выше последовательности удовлетворяют $d(x_k) \geqslant k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$, то для числа p компонент связности G справедливо неравенство $p \leqslant \frac{n+q-d}{q+1}$. Если же при этом $d(x_k) \geqslant k$ для каждого $k \leqslant n-d-1$, то граф G — связный. Наконец, граф G h-связный, если для некоторого целого $h < n$ справедливо $d(x_k) \geqslant k+h-1$ $(k \leqslant n - - d(x_{n-k+1}) - 1)$. Были получены и другие достаточные условия h-связности. Пусть $h < n$. В работе [100] приведены два условия: 1) для каждого $k \leqslant \frac{n-h}{2}$ число вершин со степенями, меньшими $k+h-1$, меньше k; 2) число вершин со степенями, меньшими $\frac{n+k}{2} - 1$, меньше $n-h+1$. Тогда граф G_n h-связен $(h < n)$.

2-связный граф G, не обязательно конечный, критический (по реберной связности) тогда и только тогда, когда не существует ребра, соединяющего две вершины цикла G и не принадлежащего этому циклу [109]. Описание ориентированных графов, критических по сильной связности, дал Геллер [127]. Определения четырех типов связности для орграфов можно найти в [128].

Вершинная $K(L(G))$ и реберная $\lambda(L(G))$ связности реберного графа $L(G)$ в [104] связываются с этими же характеристиками графа G. Если G — h-связен (по ребрам), то $L(G)$ — $(2h-2)$-связен (по ребрам). Если G — h-связен (по вершинам), то $L(G)$ — h-связен (по вершинам) $(h \geqslant 2)$. Если G — h-связен (по вершинам), то $L(L(G))$ — $(2h-2)$-связен (по вершинам), и далее $L^k(G)$ — $[2^{k-1}(h-2)+2]$-связен (по вершинам) и $[2^k(n-2)+2]$-связен (по ребрам). Для графа G с реберной связностью $\lambda(G)$ $\lambda(L^{k+1}(G)) = 2\lambda(L^k(G)) - 2$ тогда и только тогда, когда G содержит цикл C, все вершины которого имеют степень $\lambda(G)$.

Пламмер [217] изучает свойства минимальных блоков — двусвязных (по вершинам) графов, которые перестают быть двусвязными после удаления любого ребра. Двусвязный граф G — минимальный блок тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий: 1) G — простой цикл; 2) если S — множество вершин степени 2 в G, то $G-S$ распадается по крайней мере на две связные компоненты T_j, каждая из которых является деревом, и для любого цикла C в G и каждого T_j либо $C \cap T_j = \varnothing$, либо $C \cap T_j$ связен. Показано, что хроматическое число минимального блока, содержащего цикл нечетной длины, равно 2. Реберная связность минимального блока равна 2. Изучается взаимное расположение тех двух ребер, удаление которых делает граф несвязным. Приводится критерий плоскостности минимального блока.

Связность графа (число компонент), являющегося одним из следующих произведений — кронекерова, декартова, лексикографического, а также симметрической разности, выражается через связности графов, составляющих произведение [226].

Пусть $G(X, U)$ — k-связный (по вершинам) граф. Обозначим через ζ наибольшее целое число $z \leqslant |X|$ такое, что для любого подмножества $X' \subset X$ с z вершинами в G существует цикл, содержащий X'. В статье [276] описываются графы, для которых $k = \zeta \geqslant 2$. В случае $k \geqslant 3$ необходимым и достаточным условием является существование подмножества $S \subset X$ с k вершинами, выбрасывание которого из G приводит к появлению по крайней мере $(k+1)$ компонент. Более сложно формулируются условия в случае $k=2$.

Для k-связности графа G_n $(1 \leqslant h < n)$ достаточно выполнения двух условий: 1) для любого p, удовлетворяющего неравенству $h-1 \leqslant p \leqslant \frac{n+h-3}{2}$, число вершин степени не выше p не превосходит $p+1-h$; 2) число вершин не выше $\frac{n+h-3}{2}$ не превосходит $n-h$ [100]. Показано на примерах, что эти условия не улучшаемы.

Критические по реберной h-связности графы G изучаются Мадером [198]. Число вершин $n(G)$ и число ребер $m(G)$ таких графов связаны следующим образом: 1) если $m(G) > (h-1) \cdot n(G) - \binom{h}{2}$ и $n(G) \geqslant h$, то в графе G существует h-связный подграф; 2) если G — критический по h-связности и $n(G) \geqslant 3h-2$, то $m(G) \leqslant h \cdot n(G) - \binom{h+1}{2}$, приче равенство (при $n \geqslant 2$) имеет место только для полного графа K_{h+1}; 3) для каждого натурального h существует такое число l_h, что любой критический граф G, у которого $n(G) \geqslant l_h$, имеет число ребер $m(G) \leqslant h \cdot n(G) - h^2$, причем равенство выполняется только для полного двудольного графа $K_{h,h}$.

Свойства этих же графов изучает Халин [148—150]. Так он показал, что каждый (конечный или бесконечный) критический по реберной h-связности граф содержит вершину степени h [148]; для $h \geqslant 2$ каждый бесконечный локально конечный критический граф содержит бесконечное множество вершин степени h.

Сильно связный орграф называется C-минимальным, если в нем число элементарных контуров равно цикломатическому числу. Саати [240] получил необходимое и достаточное условие, чтобы граф G был C-минимальным: для любых двух вершин x и y, принадлежащих одному и тому же элементарному контуру в G, существует единственный элементарный путь из x в y или единственный элементарный путь из y в x. Сильно связный граф G называется H-минимальным, если он содержит C-минимальный частичный граф. Справедливо утверждение: сильно связный граф G является H-минимальным, если он содержит такое удаляемое множество дуг V, что граф G', полученный из G изменением направления дуг V, является C-минимальным. Здесь множество дуг V графа G называется удаляемым, если после выбрасывания V из G получается граф с тем же транзитивным замыканием, что и G.

Алгоритм определения вершинной связности предложен в [126]. Алгоритм представляет модификацию алгоритма Форда — Фалкерсона построения максимального потока в сети, в которой упрощена процедура расстановки меток. Чисто комбинаторный алгоритм определения реберной связности графа G_n, предложенный В. Д. Поддерюгиным [43], требует $O(n^4)$ шагов.

И. А. Фараджевым [50] и А. В. Карзановым [31] предложены алгоритмы выделения бикомпонент ориентированного графа с n вершинами и m дугами, число необходимых действий в первом $O(m + n\log_2 n)$, во втором — $O(m)$.

Метрика $\rho(x, y)$ реализуется в графе $G(X, U)$ множеством $X' \subseteq X$, если расстояния в графе между вершинами из X' совпадают с расстояниями между соответствующими точками метрики. Реализация метрики ρ графом G называется оптимальной, если любой другой граф H, реализующий ρ, не может иметь меньше ребер, чем G. В [26] показано, что метрика ρ однозначно определяет совокупность S всех вершин сочленения любой ее оптимальной реализации. При этом каждая оптимальная реализация ρ содержит точки сочленения S и не имеет других точек сочленения. Пополнение метрики всеми точками сочленения приводит к метрике ρ^*, имеющей те же оптимальные реализации, что и метрика ρ. Отсюда как следствие вытекают полученные ранее результаты Е. А. Смоленского, Э. Д. Стоцкого и Симойнса Перейры.

Имрихом [169] рассмотрена реализация w-квазиметрик, т. е. метрик без условия симметричности, в ориентированные графы. Так, доказано, что всякую w-квазиметрику с диаметром $D_m>0$ можно вложить в орграф G с таким диаметром D_g, что $D_m \leqslant D_g \leqslant 3D_m-2$.

К. А. Зарецкий [22] рассмотрел задачу о построении дерева Хусими — связного графа, в котором каждое ребро принадлежит не более чем одному простому циклу, по известным длинам простых циклов и попарным расстояниям между всеми циклами и висячими вершинами. Получено необходимое и достаточное условие существования такого дерева и доказана его единственность.

В [250] доказано, что метрика, заданная некоторой $(n \times n)$-матрицей A, D, может быть реализована в виде дерева, если и только если каждую 4×4 главную подматрицу A можно реализовать в виде дерева.

6. РАСКРАСКИ ГРАФОВ

Здесь можно выделить следующие вопросы: определение хроматического числа $\chi(G)$ одного графа G и отдельных классов графов; изучение однозначно раскрашиваемых и критических по раскраске графов, изучение гомоморфизмов графов и свойств хроматических многочленов.

Описание графов G с хроматическим числом $\chi(G)=p$ для $p\geqslant3$, по-видимому, очень трудная задача. Нет также удобных методов определения $\chi(G)$ произвольного графа G. Исследования последних лет велись по установлению связей хроматического числа графа с другими его характеристиками [см. 1].

В работе [157] показано, что для любого элементарного гомоморфизма ε произвольного графа G имеют место оценки $\chi(G) \leqslant \chi(\varepsilon G) \leqslant 1+\chi(G)$, где εG — граф, полученный из G склеиванием некоторой одной пары несмежных вершин. Максимальный порядок $\psi(G)$ всех полных гомоморфизмов графа G называется его ахроматическим числом. Для каждого графа G и любого целого, заключенного между $\chi(G)$ и $\psi(G)$, существует полный гомоморфизм G порядка n, а следовательно, и полная раскраска G (для любых двух красок найдется пара вершин G, раскрашенных этими красками). Многие верхние оценки $\chi(G)$ являются также оценками $\psi(G)$.

Если в графе $G_{n,m}$ число вершин n и число ребер m таково, что $\frac{m}{n} \geqslant 2^{k-3}$, то $G_{n,m}$ гомоморфен полному графу P_k [195]. Для функции $d(k)(d(k)=\operatorname{Inf}\{t/t$ — действительное число такое, что каждый граф $G_{n,m}$ с $\frac{m}{n} \geqslant t$ гомоморфен $P_k\}$) получена оценка $d(k) \leqslant 8\left\{\frac{n \log n}{\log 2}\right\}^3$ [196].

Гипотеза Хадвигера — любой связный граф G с $\chi(G)=n$ можно привести с помощью стягиваний его ребер к полному графу K_n — была подтверждена Дираком для $n \leqslant 4$. Вагнер [269] показал эквивалентность гипотезы Хадвигера для $n = 5$ гипотезе о четырех красках. А. А. Зыков [25] предложил алгебраический вариант этой гипотезы.

Изучаются ослабления гипотезы Хадвигера. Тафтеберг [256] доказал, что граф G с $\chi(G)=8$ гомоморфен полному семивершиннику без ребра, а граф G с $\chi(9)=9$ гомоморфен полному семивершиннику.

Граф G, имеющий единственную раскраску $\chi(G)$ цветами, называется однозначно раскрашиваемым. Картрайт и Харари [93] получили необходимое условие, чтобы граф G был однозначно p-раскрашиваемым: подграф, порождаемый объединением любых двух классов, соответствующих разным краскам, должен быть связным. С другой стороны, каждый однозначно p-раскрашиваемый граф — $(p-1)$-связен.

Рядом авторов было доказано, что для любых натуральных p и q существует граф G с $\chi(G)=p$, в котором длина минимального цикла превышает q (см., например, [194]).

В [97] получен следующий уточняющий результат: для любого $p \geqslant 3$ существует однозначно p-раскрашиваемый граф, который не содержит подграфов, изоморфных K_p.

В [159] изучаются свойства графов G, однозначно раскрашиваемых $\chi(G)$ цветами: 1) Если G — однозначно k-раскрашиваемый граф и k меньше числа вершин G, то $k=\chi(G)$ и подграф, образованный вершинами любых двух цветов n-раскраски G, связен. 2) Если G — однозначно раскрашиваемый граф и H — гомоморфный образ G такой, что $\chi(G) = \chi(H)$, то H — однозначно раскрашиваемый граф. 3) Пусть G — однозначно k-раскрашиваемый и $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ — его k-раскраска. Граф G_w получается из G добавлением одной вершины w и ребер, соединяющих w по крайней мере с одной вершиной из каждого $X_2, \ldots, X_k$. Тогда G_w — однозначно раскрашиваемый граф. 4) Для любого $k \geqslant 3$ существует однозначно k-раскрашиваемый граф, который не содержит подграфа, изоморфного P_k. 5) Если G — однозначно k-раскрашиваемый граф и x — вершина G степени $k-1$, то $G-x$ — единственно раскрашиваемый граф.

Более точно описываются свойства однозначно раскрашиваемых плоских графов [95]. 1. Связный плоский граф G_n $(n \geqslant 2)$ является однозначно 2-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда каждая грань G ограничена циклом четной длины. 2. Если G_n — однозначно 3-раскрашиваемый плоский граф ($n \geqslant 4$), то G имеет по крайней мере два треугольника. 3. Каждый однозначно 4-раскрашиваемый плоский граф является максимальным плоским. 4. Никакой плоский граф не является однозначно 5-раскрашиваемым.

Раскраска вершин графа G называется k-допустимой, если в G нет одноцветного полного подграфа P_k; наименьшее число цветов при k-допустимой раскраске обозначим через $\chi_k(G)$. В [44] доказано, что для любых натуральных чисел $kd \geqslant 1$, $d \geqslant 1$, $l \geqslant d$ существует граф G со следующими свойствами: 1) G не содержит K_{d+1}, 2) $\chi_k(G) = d$, 3) при каждой k-допустимой раскраске не менее чем l цветами в G найдутся d попарно непересекающихся одноцветных полных подграфа с (k—1) вершиной.

l — хроматическое число $\chi_l(G)$ графа G, т. е. это наименьшее число цветов, которыми можно раскрасить вершины G так, что не все вершины любой цепи длины l раскрашены одинаково. Для графа $G_{n,m}$, у которого длина самой длинной цепи равна e, получена верхняя оценка $\chi_l(G_{n,m}) \leqslant e - n + 2$ для $1 \leqslant n \leqslant e$. Для плоских графов показано, что для любого натурального l найдется плоский граф G такой, что $\chi_l(G) = 4$ [96].

Другой тип раскраски предложен в [182]. Любые две вершины x и y связного графа G_n, расстояние между которыми $1 \leqslant d(x, y) \leqslant p$ (p — некоторое натуральное число), должны быть разного цвета. Пусть $\chi(p, G_n)$ — минимальное число цветов, необходимое для такой раскраски. Для $\chi(p, G_n)$ получены следующие результаты: 1) $\min(p+1, n) \leqslant \chi(p, G) \leqslant n$; 2) $\chi(p, G_n) = n$ тогда и только тогда, когда $d(G_n) \leqslant p$, где $d(G_n)$ — диаметр G_n; 3) $\chi(p, G_n) = p+1$ ($p \geqslant 2$) тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий: а) $n = p+1$, б) G — цепь длины, большей p, в) G_n — цикл, длина которого кратна ($p+1$); 4) для натурального h такого, что $1 \leqslant h < n-(p+1)$, если $\chi(p, G_n) = n-h$, то $p < d(G_n) \leqslant p+h$; 5) $\chi(p, G_n) = n-1$ тогда и только тогда, когда существует пара вершин a и b, для которой $d(a, b) = p+1$, и какие бы ни были вершины x и y с $d(x, y) = p+1$, имеет место или $x = a$, или $y = a$; 6) граф G содержит частичный p-критический подграф G' такой, что $\chi(p, G_n) = \chi(p, G')$.

Оре и Пламмер [211] изучают следующую раскраску плоских графов — вершины раскрашиваются таким образом, чтобы вершины, принадлежащие одной грани, имели различные цвета. Для минимального числа $K(G)$ таких раскрасок плоского графа G получены две верхние оценки: 1) $k(G) \leqslant \max \gamma(F_1, F_2)$, где максимум берется по всем парам соприкасающихся граней F_1 и F_2, а $\gamma(F_1, F_2) = \rho(F_1) + \rho(F_2)$.

Для мультиграфа G без петель, у которого любая пара вершин соединена не более p ребрами, В. Г. Визинг доказал, что $\chi_1(G) \leqslant \Delta + p$ [6, 7, 9].

Следствием этой теоремы для графов без кратных ребер и петель является неравенство $\Delta(G) \leqslant \chi_1(G) \leqslant \Delta(G)+1$. Для более узких классов графов были получены и более точные результаты. Так, для регулярного графа G четной степени d с нечетным числом вершин $\chi_1(G)=d+1$. Для любых целых чисел m, $k \geqslant 3$ существует граф G с обхватом $t(G) \geqslant k$, $\Delta(G)=m$ и $\chi_1(G)=m+1$. Изучались свойства графов, критических по раскраске ребер, например, доказывается, что в критическом графе G с $\Delta(G)=m$ каждая вершина, смежная с вершиной степени k, смежна по крайней мере с $(m-k+1)$ вершинами степени m; в G имеется элементарный цикл длины $m+1$; число ребер в G не менее $\frac{3m^2+6-1}{8}$. Указаны два класса графов, для которых $\chi_1(G)=\Delta(G)$. Это графы, у которых каждый подграф содержит вершину степени, не превышающей k (здесь $\Delta(G) \geqslant 2k$), и плоские графы с $\Delta(G) \geqslant 8$.

Для мультиграфа G без петель, с максимальной степенью Δ, как показал Оре [210], справедливо неравенство

$$\chi_1(G) \leqslant \max\left\{\Delta, \max_{[x_1, x_2, x_3]}\left[\frac{1}{2}d(x_1)+d(x_2)+d(x_3)\right]\right\},$$

где максимум в скобках берется по всем элементарным цепям $[x_1, x_2, x_3]$ длины 2. Если граф G еще обладает тем свойством, что не содержит в качестве частичного подграфа треугольник, в котором каждая пара вершин соединена двумя ребрами, то справедлива оценка [123]

$$\chi_1(G) \leqslant 3\left[\frac{\Delta+1}{2}\right]-\left[\frac{\Delta+1}{4}\right].$$

В ряде работ изучается возможность раскрасить тремя красками регулярные графы степени 3 (раскраски Тэта). Известно, что так называемый граф Петерсена имеет хроматический класс 4. Обобщенным петерсеновским графом $G(n, k)$ называется граф с множеством вершин $\{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ и множеством ребер (x_i, x_{i+1}), (x_i, y_i), (y_i, y_{i+k}) (суммирование по $\mathrm{mod}\ n$). Для некоторых значений параметров n, k в [275] доказано существование раскраски Тэта: 1) если n — четно, 2) $n=5m$, $k=2m$ при $m>1$, 3) если $k=1$. Высказывается предположение, что все определенные выше графы имеют раскраску Тэта, за исключением $G(5,2)$ — графа Петерсена.

Тотальное хроматическое число $\chi_2(G)$ графа $G=(X, U)$ — это наименьшее число независимых множеств в разбиении $X \cup U$, т. е. минимальное число красок для одновременной раскраски вершин и ребер. Известно, что $\chi_2(G) \geqslant \Delta(G)+1$ где $\Delta(G)$ — степень графа G. Бехзад в 1965 г. высказал предположение: $\chi_2(G) \leqslant \Delta(G)+2$. В обзорной статье [65] приводятся случаи, когда это предположение верно, например, для двудольных графов, полных трехдольных графов, полных сбалансированных k-дольных графов, кубических графов.

Гипотеза Бехзада в [236] доказана для полных 3-дольных графов, для полных уравновешенных k-дольных графов (графов с одинаковыми независимыми множествами) и графов с наибольшей степенью (вершин) $\nu(G) \leqslant 3$.

Одно из обобщений тотальной раскраски на комплексы введено (для плоских карт) Рингелем [230, 231], но решение также не полное.

Исследовались свойства хроматического многочлена $f(G, t)$, которым перечисляются числа различных раскрасок t цветами перенумерованного графа G. Ясно, что $f(G, t) = 0$, если $t < \chi(G)$. Обзор свойств коэффициентов $f(G, t)$ для разных типов графов можно найти в монографии Харари [154].

Для плоской триангуляции T_n Татт [264] исследовал поведение $f(T_n, t)$ вблизи значения $t = 1 + \tau$, где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ — «золотое отношение». Было показано, что $|f(T_n, 1+\tau)| \leqslant \tau^{5-n}$.

Эквивалентность проблемы 4-х красок задаче нахождения решения определенной системы алгебраических уравнений по модулю 3 показана в [34]. Многочлен, построенный на основе этой системы, тождественно равен нулю по модулю 3, если и только если соответствующая задача о раскраске не имеет решения.

Проблема 4-х красок в статье [55] сведена к нахождению максимальных внутренне устойчивых множеств (заданного размера) двух вспомогательных графов. Г. А. Донец [20] показал, что гипотеза 4-х красок справедлива для плоских графов с числом вершин, не превышающим 41. При введении дополнительных условий, например, наличия в плоском графе триады — трех попарно смежных вершин степени 5 — указанное число вершин может быть значительно увеличено. В [18, 19] описываются некоторые классы плоских графов G, у которых $\chi(G) = 4$.

Грюнбаумом [133] доказано, что любой плоский граф с менее чем четырьмя треугольниками имеет хроматическое число 3.

Задача о раскраске графов в [119] обобщается на системы множеств и бесконечные графы. В [14] устанавливается хроматическое число (равное 5) одного бесконечного графа, у которого множеством вершин является множество всех натуральных чисел и две вершины с номерами i и j смежны, если и только если $|i-j| \leqslant f(i+j)$. Здесь $f(n)$ — наибольшая степень двойки, делящая n.

Критические по раскраске вершин графы, их построение и свойства подробно описываются в книге Бержа [75].

Раскраски вершин графов $G_{n,m}$, когда $m = c_n$, c — константа, изучались А. А. Калниньшем [29, 30]. Показано, что хроматическое число почти всех графов $G_{n,m}$ имеет хроматическое число $\chi(G)$, удовлетворяющее неравенствам $\frac{c}{\ln e} < \gamma(G) \leqslant 4c$. Исследовалась трудоемкость получения правильной раскраски почти всех графов $G_{n,m}$.

7. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задачи о расположении графов на поверхностях имеют большое практическое и теоретическое значение. Здесь приводятся результаты о следующих топологических характеристиках графов: род графа G, толщина, крупность, число скрещиваний.

Многие задачи и результаты этого раздела обобщаются и находят применение и приводят к появлению новых задач в комбинаторной топологии. Например, пусть симплициальный комплекс $\mathscr{C}$ имеет f_k k-граней, запишем f_k в виде $f_k = \binom{a_{k+1}}{k+1} + \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \ldots$, где a_{k+1} выбирается вначале как можно большим, затем a_k выбирается как можно большим и т. д. Тогда число m-граней $\mathscr{C}$ (если $m > k$) по крайней мере равно $\binom{a_{k+1}}{m+1} + \binom{a_k}{m} + \binom{a_{k-1}}{m-1} + \ldots$. Эти оценки достигаются для всех k, f_k и m [187]. Сформулирован аналог проблемы 4-х красок для симплициальных k-комплексов, вкладываемых в евклидово k-мерное пространство [134].

Пусть $\mathscr{C}^n(v)$ — полный n-комплекс с v вершинами, $\vee$ — операция «объединения». Известно, что $\mathscr{C}^n(2n+3)$ и $\mathscr{C}^0(3) \vee \ldots \vee \mathscr{C}^0(3)$ (повторение $n+1$ раз) — комплексы, не допускающие вложение в E^{2n} (для $n=1$ получаем два графа из теоремы Понтрягина — Куратовского). В общем случае существуют только два экстремальных среди комплексов, не допускающих вложение в E^{2n}.

Боланд [80] привел следующий критерий вложимости графов в ориентируемую поверхность T_g рода g: связный граф G вложим в T_g тогда и только тогда, когда в G существует такое множество $\{C_i\}$ элементарных циклов, которое порождает нормальный делитель N фундаментальной группы $\pi_1(G)$, причем: 1) каждое ребро G принадлежит самое большее двум циклам C_i, 2) имеет место следующее разложение в свободное произведение некоторой свободной группы

F конечного ранга: $\pi_2(G)/N = F_{p_0} \prod_{i=1}^{r_*} \pi_1/T_{g_i}$, где $\sum_{i=1}^{r} g_i \leqslant g$ и F_{p_0} — свободная группа ранга p_0*.

Строение самосопряженных графов (конечных, локально конечных и бесконечных), т. е. графов, изоморфных своим реберным графам, было описано в [242].

Граф G — почти плоский, если он не плоский, но при удалении любой вершины становится плоским. Вагнер в [267] дает описание множества всех почти плоских графов. Это множество состоит из четырех классов. Хроматическое число всякого почти плоского графа не превышает пяти, причем равно пяти только для одного графа.

Для того чтобы тотальный граф $T(G)$ был плоским, необходимо и достаточно, чтобы каждая вершина графа G имела степень не больше 3 и все вершины степени 3 в G были разделяющими [64].

Вагнер [268] нашел примеры графов, не вложимых в проективную плоскость, минимальных относительно некоторого частичного порядка графов. Для почти плоских графов — графов, которые становятся плоскими после выбрасывания любой вершины и инцидентных с ней ребер, была доказана вложимость в проективную плоскость.

В работе Рингеля и Янгса [232] была решена гипотеза Хивуда, именно для любого натурального p хроматическое число ориентируемой поверхности рода p равно $\chi(S_p) = \left[\frac{7+\sqrt{1+48p}}{2}\right]$. Установление этого равенства основано на доказательстве этих же авторов равенства рода полного графа K_n числу $\left\{\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\}$. История решения гипотезы Хивуда и промежуточные результаты приведены в книге Харари [154].

Вершинной древесностью $\rho(G)$ графа G называется наименьшее число подмножеств, на которые можно разбить множество вершин G таким образом, что каждое подмножество индуцирует подграф без циклов. Вершинной древесностью $\rho(S_n)$ поверхности S_n есть максимум $\rho(G)$ по всем графам G, которые можно расположить на S_n. Кронк [186] доказал, что $\rho(S_n) = \left[\frac{9+\sqrt{1+48n}}{4}\right]$.

Число скрещиваний графа G для данной топологической поверхности равно минимальному числу пересечений ребер G,

---

*) Исследованию вложимости графов в 2-многообразия с помощью так называемого метода φ-преобразования посвящены статьи сб. «Топологические аспекты теории графов» под ред. Н. П. Хоменко (см. РЖМат, 1972, 6В275 К).

которые граф G может иметь при различных расположениях (вложениях) на этой поверхности. Число скрещиваний графа G при расположении на замкнутой ориентируемой поверхности рода i обозначим $c_i^+(G)$, на замкнутой неориентируемой поверхности рода $i - c_i^-(G)$. Полученные результаты относятся, прежде всего, к расположениям на сфере и торе (ориентируемые поверхности) и на проективной плоскости и бутылке Клейна (неориентируемые поверхности).

Для полного двудольного графа $K_{m,n}$ Заранкевич доказал неравенство $c_0^+(K_{m,n}) \leqslant \left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{m-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]$. Блажек и Коман [79] показали, что равенство в этой формуле достигается для m и n, удовлетворяющих одному из неравенств $\min(m, n) \leqslant 4$ или $\max(m, n) \leqslant 6$. Клейтман [175] доказал равенства для $m \leqslant 6$ и любого n и дал нижнюю оценку $c_0^+(K_{m,n}) \geqslant \frac{1}{5}m(m-1)\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]$ для $n \geqslant m \geqslant 5$. Известно, что при $m=3, 5, 6$ равенство выполняется. Для $c_0^+(K_{7,7}) \geqslant 77$, но неизвестно, равно ли это число 77, 79 или 81.

Для полного графа K_n с n вершинами доказаны неравенства [79]

$$D_0^+(n) = \frac{1}{84}n(n-1)(n-2)(n-3) \leqslant c_0^+(K_n) \leqslant H_0^+(n) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{n}{2}\right]\left[\frac{n-1}{2}\right]\left[\frac{n-2}{2}\right]\left[\frac{n-3}{2}\right].$$

Гипотеза заключается в том, что $c_0^+(K_n) = H_0^+(n)$. В работе [170] найдено предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty} c_0^+(K_n)\,.\,n^{-4} = 64^{-1}.$$

Рингель показал [229], что для любого расположения графа G на плоскости имеется самое большее $h(n) = 2n-2$ ребер без пересечений и все расположения с $h(n)$ непересекающимися ребрами гомеоморфны.

Для полных k-дольных графов $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ получены некоторые частные результаты [178], например, Харборт [162] доказал, что $c_0^+(K_{2,2,\ldots,2}) = 6\cdot\binom{k}{4}$.

В работах ряда авторов [178] получены верхние оценки для чисел $P(N, k) = \max\limits_{D(N,k)} c_0^+(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$ и $p(N, k) = \min\limits_{D(N,k)} c_0^+(K_{n_1,n_2,\ldots,n_k})$, где через $D(N, k)$ обозначено множество всех разбиений числа N на k положительных целых слагаемых.

При расположении полного графа K_n на торе получены следующие оценки

$$H_1^+(n)=\frac{59}{5184}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\geqslant c_1^+(K_n)\geqslant$$
$$\geqslant D_1^+(n)=\frac{1}{210}n(n-1)(n-2)(n-3),$$

для полного двудольного графа $K_{m,n}$

$$\frac{1}{15}C_m^2C_n^2\leqslant c_1^+(K_{m,n})\leqslant\frac{1}{6}C_{m-1}^2C_{n-1}^2.$$

Точные равенства были получены лишь в отдельных случаях [145].

Для графов $G(n, m, t)$ без кратных ребер и петель, с n вершинами, m ребрами и обхватом t (минимальная длина циклов) для всех ориентируемых поверхностей рода $g\geqslant 0$ Кэйненом была найдена нижняя оценка. В частности, для $t=3$ $c_g^+(G(n, m, t))=m-\frac{t}{t-2}[n-2(1-g)]$. В этой же работе получены частные результаты для мультиграфов, в которых любая пара вершин может соединяться самое большее k параллельными ребрами [177].

Для проективной плоскости и бутылки Клейна известны точные значения оценки числа скрещиваний для полных графов K_n, $n\leqslant 15$; точные значения получены для проективной плоскости — при $n\leqslant 10$, для бутылки Клейна — при $n\leqslant 9$. Таблицы этих оценок можно найти в [177]. Получены также оценки для $n>15$, например, для бутылки Клейна $H_{1(n)}^+=\frac{37}{8190}n(n-1)(n-2)(n-3)\leqslant c_2(K_n)\leqslant H_1\frac{37\cdot 3^3}{59\cdot 24}\cdot H_1^+(n)$.

Для n-мерного куба E_n в [143] получена оценка $c_0^+(E_n)\leqslant\frac{5}{32}\cdot 4^n-\left[\frac{n^2+1}{2}\right]\cdot 2^{n-2}$.

Оуэнс [212] изучает двуплоское число скрещиваний $C_{r_2}(G)=\min\limits_{F\bigcup H}[C_{r_1}(F)+C_{r_1}(H)]$, где минимум берется по всем разбиениям графа G на непересекающиеся по ребрам подграфы F и H, объединение которых дает G. Получены верхние оценки для P_n и $P_{n,m}$.

Род $\gamma(K_n)$ полного графа K_n равен $\gamma(K_n)=\left\{\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\}$, как было показано Рингелем и Янгсом [232, 233]. Род полного двудольного графа $\gamma(K_{n,m})=\left\{\frac{(m-2)(n-2)}{4}\right\}$, как было доказано Рингелем. Род n-мерного куба равен $\gamma(E_n)=1+$ $+(n-4)2^{n-3}$. Если граф G имеет блоки $B_1, B_2, \ldots, B_k$, то $\gamma(G)=\sum\limits_{i=1}^{k}\gamma(B_i)$. Пусть G — h-связный граф, являющийся объединением двух $(h+1)$-компонент B и C, G_{ij} — граф, получаемый из G добавлением ребра (x_i, x_j), соединяющего некоторые вершины $x_i, x_j \in B \cap C$. Если $\gamma(G_{ij}) = \gamma(G) + 1$ для любых двух вершин из $B \cap C$, соединяемых ребром, то $\gamma(G) = \gamma(B) + \gamma(C) + |B \cap C| - 1$. Обзор этих результатов можно найти в [164].

Толщиной $\theta(G)$ графа G называется минимальное число его плоских подграфов, объединение которых дает G. Для многих значений n было доказано, что $\theta(K_n) = \left[\frac{n+7}{6}\right]$, при $n \neq 9$ и $n \not\equiv 4 \pmod 6$ [68]. В настоящее время для $n \leqslant 45$ неизвестным значением является $n = 16$. Толщина полного двудольного графа $\theta(K_{m,n}) = \left\{\frac{m \cdot n}{2(m+n-2)}\right\}$, за исключением, возможно, случая $m < n$, m, n — нечетны [248]. Толщина n-мерного куба $\theta(G_n) = \left\{\frac{n+1}{4}\right\}$ [174].

Изучалась другая характеристика графов — крупность, т. е. наибольшее число не имеющих общих ребер неплоских подграфов, содержащихся в данном графе. Как и для других характеристик, получены значения крупности для полных K и полных двудольных $K_{m,n}$ графов.

Число скрещиваний $\nu(G)$ графа G — это минимальное число пересечений ребер G при различных расположениях его на плоскости. Для полных K_n и полных двудольных $K_{m,n}$ графов также получены оценки сверху, причем равенства доказаны для K_n при $n \leqslant 10$, для $K_{m,n}$ при $m \leqslant 6$.

В работе [167] показано, что за $C_n \log n$ шагов можно определить, является ли граф G_n плоским, т. е. равно ли $\nu(G)$ нулю.*)

Крупность $C(G)$ графа G — это наибольшее количество непересекающихся по ребрам полных подграфов графа G.

Для крупности полного графа K_n были получены следующие оценки [142, 144]]: для $n = 3r$ $C(K_n) = C_r^2 + \left[\frac{r}{5}\right]$, если $r \geqslant 10$, и $C(K_n) = C_r^2$, если $r \leqslant 5$; для $n = 3r+1$ $C_r^2 + 2\left[\frac{r}{3}\right] \leqslant C(K_n) \leqslant C_r^2 + \left[\frac{2r}{3}\right]$, если $r \neq 3, 4$, и $C(K_{10}) = 4$, $7 \leqslant C(K_{13}) \leqslant 8$; для $n = 3r+2$ $C(K_n) = C_r^2 + \left[\frac{14r+1}{15}\right]$.

8. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Рассматриваются различные средства описания с помощью графов взаимосвязей между известными математическими объектами (графы пересечений, графы интервалов и т. д.).

Для системы $\mathfrak{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_n\}$ произвольных подмножеств графом пересечений $G(\mathfrak{M})$ называется граф с множест-

*) Эти же авторы доказали, что изоморфизм двух плоских графов можно определить за Cn^2 шагов [168].

вом вершин $M_1, M_2, \ldots, M_n$, и две вершины $M_i, M_j (i \neq j)$ смежны, если и только если $M_i \cap M_j \neq \varnothing$. Если на систему $\mathfrak{M}$ не налагать никаких ограничений, то ясно, что любой граф изоморфен графу пересечений некоторой системы множеств. Естественно изучать такие системы $\mathfrak{M}$, для которых число элементов $\left|\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right|$ — наименьшее. В статье [118] доказано: для графа G_n в множестве M с $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ элементами всегда существует такая система $\mathfrak{M}$ подмножеств, что граф $G(\mathfrak{M})$ изоморфен G. Для связных графов $G_{n,m}$ без треугольников необходимо и достаточно m элементов.

Одним из естественных ограничений является следующее: множества $M_1, M_2, \ldots, M_n$ должны быть интервалами некоторого линейно упорядоченного множества [254]. Граф G называется графом интервалов, если существует такое линейно упорядоченное множество M и такая система $\mathfrak{M}$ интервалов этого множества, что граф пересечений $G(\mathfrak{M})$ изоморфен G. Триангулятор цикла в графе — это такое ребро графа, которое образует треугольник с некоторой парой последовательных ребер цикла. Граф называется триангулированным, если любой его цикл обладает хотя бы одним триангулятором. Среди других свойств этих графов, в частности, справедливо, что каждый граф интервалов является триангулированным [24]. В работе [129] приведены необходимые и достаточные условия, когда граф G является графом интервалов: любой простой цикл графа L длины 4 имеет хотя бы один триангулятор, а граф $\bar{G}$, дополнительный к G, допускает ориентацию ребер, переводящую $\bar{G}$ в транзитивный ориентированный граф. Двудольный граф является графом интервалов тогда и только тогда, когда каждая его компонента является деревом, которое либо состоит не более чем из двух вершин, либо обладает тем свойством, что после удаления всех его висячих вершин остается простая цепь [254].

В [228] в качестве системы множеств $\{M_i\} = \mathfrak{M}$ берется множество цепей некоторого графа H. В частности, здесь получено необходимое и достаточное условие, когда граф G можно представить цепями дерева.

В [258] установлен критерий представимости графа G в виде графа пересечений дуг окружности: существует такая нумерация вершин G, при которой от каждой единицы матрицы смежности G можно дойти до главной диагонали либо по строке влево, либо по столбцу вверх (циклически), не встретив на пути ни одного нуля.

Для частично упорядоченного множества $(X, \geqslant)$ вводится понятие графа сравнимости множества G. Два элемента x, $y \in X$ сравнимы, если либо $x<y$, либо $y<x$. Граф G с множеством вершин X, называется графом сравнимости $(X, \geqslant)$, ес-

ли x и y смежны в G тогда и только тогда, когда x и y сравнимы; просто граф сравнимости — это граф, изоморфный графу сравнимости некоторого частично упорядоченного множества. Доказано [24], что граф является графом сравнимости, если и только если он транзитивно ориентируем. В работе [53] дано описание графов сравнимости и найдены необходимое и достаточное условия σ-изоморфизма двух частично упорядоченных множеств (σ-изоморфизм для отношения сравнимости σ индуцируется изоморфизмом графов сравнимости частично упорядоченных множеств). Сформулированы также необходимые и достаточные условия для того, чтобы σ-изоморфизм частично упорядоченного множества $(X, \geqslant)$ был изоморфизмом или антиизоморфизмом.

Неориентированный граф G называется соотносимым частично упорядоченному множеству $(X, \geqslant)$, если он может быть так ориентирован, что в получаемом орграфе упорядоченная пара $<x, y>$ является дугой, если и только если $x>y$ и не существует элемента z такого, что $x>z>y$. Такая ориентация G называется допустимой. Необходимым условием для того, чтобы граф G имел допустимую ориентацию, является выполнение неравенства для обхвата $\delta(G) \geqslant 4$. Для плоских графов оно достаточное. Для произвольного графа G достаточным условием является выполнение $\delta(G) \geqslant \chi(G)$ [146].

В [56] описываются графы, представимые как графы некоторых отношений частичного порядка или полупорядка. Из этих графов выделены и описаны графы, единственным образом доупорядочиваемые (дополуупорядочиваемые) — они не должны содержать подграфов определенного вида.

Представление графа G ориентированным графом $S(G)$ без контуров, при котором вершины, смежные в G, переходят в вершины, соединенные путем в одном из направлений, изучается в [32]. Получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых граф G представим орграфом без контуров.

Граф $G=(X, U)$ вкладывается в n-мерное пространство, если существуют функции действительного переменного $f_1, f_2, \ldots, f_n$, определенные на X, такие, что для любых смежных вершин x и y имеет место $|f_i(x)-f_i(y)| \leqslant 1$ $(i=1, 2, \ldots, n)$. Кубичностью (обозначается $\operatorname{cub}(G)$) графа G называется наименьшее n, для которого G вкладывается в n-мерное пространство. Робертсом [234] получены некоторые результаты по изучению кубичности и блоковости графов. Последнее понятие связано с представлением графа G с помощью блоков (например, единичных кубов) n-мерного пространства, причем блоковостью (обозначения $\operatorname{box} G$) графа G называется наименьшее представление G как графа пересечений блоков n-мерного пространства. Так, для полного k-дольного графа $K(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ имеют место равенства

$$\operatorname{cub} K(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \sum_{j=1}^{k} \operatorname{cub} S(n_j),$$

$$\operatorname{box} K(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{box} S(n_i),$$

где $S(n) = K(1, n)$ и $\operatorname{cub} S(n) = [\log_2(2n-1)]$, а сумма $\Sigma \operatorname{box} S(n_i)$ равна числу n_i, больших 1.

Граф блоков $B(G)$ для графа G определяется следующим образом: его вершинами являются блоки G (максимальные связные подграфы G, не имеющие своих точек сочленения) и смежность различных блоков означает наличие у них общей вершины. В [151] доказано, что граф L без петель является графом блоков, если и только если все блоки L есть полные графы. Обозначим через $B^n(G)$ n-ую итерацию перехода к графу блоков. Если ни один из блоков графа G не является компонентой связности, то $B^2(G)$ изоморфен графу сочленений $C(G)$ — вершинами $C(G)$ служат точки сочленения G, и две различные вершины $C(G)$ смежны, если и только если они принадлежат одному и тому же блоку [151]. Аналогичный результат имеет место и для последних графов, именно, граф G без петель есть граф сочленений тогда и только тогда, когда каждый блок G — полный граф.

Граф клик $H = K(G)$ графа G определяется следующим образом. Вершинами $H(G)$ являются клики G, и две вершины $H(G)$ смежны, если соответствующие им клики G имеют хотя бы одну общую вершину G. Набор $\mathscr{K}$ полных подграфов H обладает свойством J для пересечений, если в $\mathscr{K}$ какие бы ни взять $L_1, L_2, \ldots, L_p$ и если $L_i \cap L_j \neq \varnothing$ для любых $i, j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, то $\bigcap_{l=1}^{p} L_l \neq \varnothing$. Робертс [234] получил полное описание графов клик: граф H является графом клик некоторого графа G тогда и только тогда, когда в H имеется набор $\mathscr{K}$ полных подграфов таких, что $\mathscr{K}$ покрывает все ребра H и $\mathscr{K}$ имеет свойство J.

Теорема Крауса о существовании реберных графов в работе [246] обобщается следующим образом: локально конечный граф G не более чем с одной петлей в каждой вершине является реберным графом, если и только если он может быть разбит на полные подграфы, не имеющие общих ребер, так, что каждая вершина G принадлежит не более чем двум подграфам. В [223] доказано, что если граф G обладает свойствами: 1) минимальная степень вершин G больше 43, 2) наименьшим характеристическим числом матрицы смежностей $A(G)$ является 2, 3) число вершин, смежных одновременно обоим концам любого ребра (x, y), меньше $\min(d(x)-2,\ d(y)-2)$, то G изоморфен реберному графу $L(H)$ для некоторого H. Обратно, если G изоморфен $L(H)$ с наименьшей степенью, большей 3, то граф удовлетворяет условиям 2) и 3). Ранее Гоффман и Рой-Чоудхури охарактеризовали реберные графы конечных проективных и аффинных плоскостей, а также BIB-схем в терминах собственных значений матриц смежностей этих графов (полностью ими определяются). Комбинаторное описание реберного графа проективной плоскости порядка n дано в [111].

Присоединенным графом $A(G)$ графа G (в G могут быть петли и кратные ребра) называется граф, вершины которого соответствуют ребрам G, и две вершины в $A(G)$ соединяются столькими ребрами, каково число вершин, общих соответствующим ребрам в G. По индукции определяются повторно присоединенные графы: $A^l(G)=A(A^{l-1}(G))$, $l\geqslant 2$. В статье Менона [200] дано полное описание множества конечных графов G, для которых $G=A^l(G)$ при некотором l. Именно, показано, что следующие четыре утверждения эквивалентны: 1) G и $A^l(G)$ изоморфны для всех $l\geqslant 0$, 2) G и $A^l(G)$ изоморфны при некотором $l\geqslant 1$, 3) G не имеет петель и степени всех его вершин равны 2, 4) каждая связная компонента G является циклом по крайней мере с двумя вершинами.

Для ориентированного графа G без кратных дуг графом дуг $L(G)$ называется ориентированный граф, множеством вершин которого являются дуги G, и в $L(G)$ дуга идет из вершины x в вершину y, если и только если в G конец дуги x совпадает с началом дуги y. В статье [56] получены необходимые и достаточные условия, когда граф G' является графом дуг некоторого графа: G' должен разбиваться на сумму графов L_i, удовлетворяющих условиям: 1) любые два графа L_i, L_j $(i\neq j)$ не имеют общих дуг, 2) каждый граф L_i — или полный двудольный, ориентированный граф (дуги ориентированы от вершин одного множества X к вершинам другого Y), или получается из полного двудольного добавлением новой вершины z с петлей и дугами, ведущими из всех вершин X к z и из z во все вершины Y, 3) каждая вершина x графа G' содержится или в одном, или в двух графах L_i, причем в последнем случае x в одном из графов L_1 принадлежит множеству X, а в другом — множеству Y, 4) два различных графа L_i, L_j имеют не более двух общих вершин, причем если таких вершин две, то одна из них — в X_i, а другая — в Y_j (или наоборот).

Связный регулярный граф G является тотальным графом некоторого графа H тогда и только тогда, когда: 1) в G имеется $p(1+d/2)$ вершин и их степень $2d$ для некоторых натуральных p и d таких, что $2<d<p-1$, 2) G имеет точно p специальных вершин и 3) $G=T(G_0)$, где G_0 — подграф G, образованный специальными вершинами [158].

БИБЛИОГРАФИЯ

1. **Авондо-Бодино Дж.,** Применение в экономике теории графов. М., «Прогресс», 1966, 160 с. (РЖМат, 1967, 4В256К)
2. **Агакишиева С. Я.,** Графы, окружением вершин которых служат простые цепи или простые циклы. Мә'рузәләр. АзССР Елмләр Акад., Докл. АН АзССР, 1970, 26, № 12, 7—10 (РЖМат, 1971, 11В523)
3. **Алферова З. В.,** Езжева В. П., Применение теории графов в экономических расчетах. М., «Статистика», 1971, 150 с. (РЖМат, 1971, 6В398К)
4. **Беккенбах Э.** (Ред.), Прикладная комбинаторная математика. Сб. статей. Перев. с англ. М., «Мир», 1968, 362 с. (РЖМат, 1968, 9В196К)
5. **Ветухновский Ф. Я.,** Задачи о покрытиях графа системой окрестностей его вершин. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 19. М., «Наука», 1967, 47—74 (РЖМат, 1968, 7В262)
6. **Визинг В. Г.,** Об оценке хроматического класса p-графа. В сб. «Дискретн. анализ». Вып. 3, Новосибирск, 1964, 25—30 (РЖМат, 1965, 11А285)
7. —, Критические графы с данным хроматическим классом. В сб. «Дискретн. анализ». Вып. 5. Новосибирск, 1965, 9—17 (РЖМат, 1967, 8Б201)
8. —, Оценка числа внешней устойчивости графа. Докл. АН СССР, 1965, 164, № 4, 729—731 (РЖМат, 1966, 2А356)
9. —, Хроматический класс мультиграфа. Кибернетика, 1965, № 3, 29—39 (РЖМат, 1966, 2А355)
10. —, О числе ребер в графе с данным радиусом. Докл. АН СССР, 1967, 173, № 6, 1245—1246 (РЖМат, 1967, 10В218)
11. —, Сводимость ряда задач теории графов к задаче о минимальной связке. В сб. «Вычисл. мат. и вычисл. техн.» Вып. 2. Харьков, 1971, 52—55 (РЖМат, 1972, 3В275)
12. —, Гольдберг М. К., О длине обхода сильно связного графа. Кибернетика, 1969, № 1, 79—82 (РЖМат, 1969, 8В196)
13. **Герман Л. Ф.,** О гипотезе В. Г. Визинга относительно числа внешней устойчивости декартова произведения двух графов. В сб. «Материалы Науч. конференции проф.-преподават. состава Кишинев. ун-та по итогам науч.-исслед. работы за 1970 г. Секц. естест. и эксперим. н.» Кишинев, 1970, 27—28 (РЖМат, 1971, 10В549)
14. **Глаголев В. В.,** Евдокимов А. А., О минимальной раскраске одного бесконечного графа. В сб. «Дискретн. анализ». Вып. 17. Новосибирск, 1970, 9—17 (РЖМат, 1971, 7В525)
15. **Гольдберг М. К.,** Некоторые применения операции стягивания к сильно связным графам. Успехи мат. наук, 1965, 20, № 5, 203—205 (РЖМат, 1966, 6А261)
16. —, О диаметре сильно связного графа. Докл. АН СССР, 1966, 170, № 4, 767—769 (РЖМат, 1967, 4В184)
17. **Гроссман И.,** Магнус В., Группы и их графы. М., «Мир», 1971, 246 с.
18. **Донец Г. А.,** О числе раскрасок некоторых T-графов. Ч. I. В сб. «Теория оптимальн. решений. Тр. Семинара. Вып. 4». Киев, 1969, 63—81 (РЖМат, 1970, 2В355)
19. —, О числе раскрасок некоторых T-графов. Ч. II. В сб. «Теория оптимальн. решений. Тр. Семинара. Вып. 5». Киев, 1969, 77—99 (РЖМат, 1970, 2В356)
20. —, О нижней границе числа вершин плоских критических графов. Кибернетика, 1971, № 4, 76—85 (РЖМат, 1972, 2В341)
21. **Евдокимов А. А.,** О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе. Мат. заметки, 1969, 6, № 3, 309—319 (РЖМат, 1970, 4В336)
22. **Зарецкий К. А.,** О деревьях Хусими. Мат. заметки, 1971, 9, № 3, 253—262 (РЖМат, 1971, 8В464)
23. **Зыков А. А.,** Теория графов. В сб. «Алгебра. Топология. 1962 (Итоги

науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1963, 188—223 (РЖМат, 1965, 2А387)
24. —, Теория конечных графов. Т. I. Новосибирск, «Наука», 1969, 543 с. (РЖМат, 1970, 7В300К)
25. —, Об одном векторном пространстве, связанном с гипотезой Хадвигера. Докл. АН СССР, 1969, 187, № 6, 1235—1238 (РЖМат, 1970, 3В293)
26. **Имрих В.**, Стоцкий Э., Об оптимальных вложениях метрик в графы. *Докл. АН СССР*, 1971, **200**, № 2, 279—281 (*РЖМат*, 1972, 2В363)
27. **Исмаилов Ш. М.**, Верхняя оценка числа дуг небисвязного орграфа с заданным числом бикомпонент и радиусом. Ин-т кибернет. АН АзССР. Баку, 1971, 7 с., № 3245—71 Деп (РЖМат, 1972, 1В596Деп)
28. —, О числе дуг орграфа данного радиуса с заданными количествами вершин и бикомпонент. *Мә'рузәләр. АзССР Елмләр Акад., Докл. АН АзССР*, 1971, **27**, № 2, 8—12 (РЖМат, 1972, 1В572)
29. **Калниньш А. А.**, Статистическая оценка хроматического числа для одного класса графов. Латв. мат. ежегодник, 1970, 7, 111—125 (РЖМат, 1970, 11В252)
30. —, *Оценка сложности раскраски графов на машине Тьюринга. Пробл.* передачи информ., 1971, 7, № 4, 59—72 (РЖМат, 1972, 3В293)
31. **Карзанов А. В.**, Экономный алгоритм нахождения бикомпонент графа. Тр. 3-й Зимн. школы по мат. программир. и смежн. вопр., 1970. Вып. 2. М., 1970, 343—347 (РЖМат, 1971, 9В363)
32. **Козырев В. П.**, О *представлении графов сетями*. В сб. «Вопросы кибернетики». (Информ. материалы). М., «Советское радио», 1972
33. **Коршунов А. Д.**, О диаметре графов. Докл. АН СССР, 1971, **196**, № 5, 1013—1015 (РЖМат, 1971, 6В368)
34. **Кратко М. И.**, О степени информационного графа. В сб. «Вычисл. системы». Вып. 34. Новосибирск, «Наука», 1969, 64—70 (РЖМат, 1970, 4В331)
35. **Маркосян С. Е.**, Критерий единственности базы дуг конечных ориентированных графов. Айкакан ССР Гитутюннери Академиаи тегекагир. Математика, Изв. АН АрмССР. Математика, 1967, **2**, № 6, 399—403 (РЖМат, 1968, 8В238)
36. —, Матричный критерий единственности базы дуг и нахождение некоторой базы. Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1968, **46**, № 2, 60—66 (РЖМат, 1968, 11В286)
37. **Мелихов А. Н.**, Ориентированные графы и конечные автоматы. М., «Наука», 1971, 416 с. (РЖМат, 1971, 10В573К)
38. **Мельников Л. С.**, Критические ориентированные графы с данным диаметром. В сб. «Управляемые системы». Вып. 7. Новосибирск, 1970, 37—45 (РЖМат, 1971, 8В468)
39. **Нигматуллин Р. Г.**, Паросочетания графов. Уч. зап. Казанск. ун-т, 1968, **128**, № 2, 91—94 (РЖМат, 1969, 2В217)
40. —, О покрытии графа ребрами. В сб. «Пробл. кибернетики». Вып. 21. М., «Наука», 1969, 241—248 (РЖМат, 1970, 3В296)
41. **Оре О.**, Графы и их применение. М., «Мир», 1965, 174 с. (РЖМат, 1966, 4В136К)
42. —, Теория графов. М., «Наука», 1968, 352 с. (РЖМат, 1968, 11В265К)
43. **Поддерюгин В. Д.**, Алгоритм определения реберной связности графа. В сб. «Вопросы кибернетики». (Информ. материалы). М., «Советское радио», 1972
44. **Робишо Л.**, Буавер М., Робер Ж. М., Направленные графы и их приложение к электрическим цепям и машинам. М.—Л., «Энергия», 1964, 248 с. (РЖМат, 1965, 10В185К)
45. **Саати Т. Л.**, О числе пересечений в полных графах. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 6, 151—154 (РЖМат, 1972, 3В290)
46. **Сешу С.**, Рид М. Б., Линейные графы и электрические цепи. Учебн. пособие для студ. вузов спец. «Радиотехника», «Электронная техни-

ка», «Электроприборостроение и автоматика». М., «Высш. школа», 1971, 448 с. (РЖМат, 1971, 8В478К)
47. Ураков Х., О базах дуг ориентированного графа. В сб. «Вопр. кибернет. и вычисл. мат.». Ташкент, «Фан», 1968, 103—109 (РЖМат, 1969, 6В243)
48. —, О базах ребер частично ориентированного графа. В сб. «Вопр. киберн. и вычисл. мат.» Вып. 24. Ташкент, «Фан», 1969, 114—122 (РЖМат, 1969, 11В322)
49. —, Условные базы дуг ориентированного графа. В сб. «Вопр. кибернет. и вычисл. мат.» Вып. 25. Ташкент, «Фан», 1969, 101—108 (РЖМат, 1970, 2В359)
50. Фараджев И. А., Алгоритм выделения бикомпонент ориентированного графа. Тр. 3-й Зимн. школы по мат. программир. и смежн. вопр., 1970. Вып. 3. М., 1970, 650—654 (РЖМат, 1971, 9В364)
51. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р., Потоки в сетях. М., «Мир», 1966, 276 с. (РЖМат, 1966, 11В249К)
52. Хватал В., Плоские графы с заданными степенями точек. В сб. «Рефераты докл. Научн. конференции молодых ученых МГУ». М., Моск. ун-т, 1968, 22 (РЖМат, 1969, 7В218)
53. Шеврин Л. Н., Филиппов Н. Д., Частично упорядоченные множества и их графы сравнимости. Сиб. мат. ж., 1970, 11, № 3, 648—667 (РЖМат, 1971, 1В318)
54. Шор Н. З., Донец Г. А., Алгебраический подход к исследованию задачи о четырех красках. В сб. «Теория оптимальн. решений. Семинар. Вып. 3». Киев, 1967, 57—72 (РЖМат, 1968, 12В352)
55. —, Землянухина Л. Н., Некоторые комбинаторные задачи теории графов, связанные с максимальным внутренне устойчивым множеством. В сб. «Мат. методы исслед. и оптимизации систем. Вып. 5». Киев, 1970, 13—24 (РЖМат, 1971, 9В378)
56. **Aigner M.**, On the linegraph of a directed graph. Math. Z., 1967, **102**, № 1, 56—61 (РЖМат, 1968, 8В249)
57. —, Prins G., Uniquely partially orderable graphs. J. London Math. Soc., 1971, 3, № 2, 260—266 (РЖМат, 1972, 1В581)
58. **Alavi Y.**, Behzad M., Complementary graphs and edge chromatic numbers. SIAM J. Appl. Math., 1971, **20**, № 2, 161—163 (РЖМат, 1971, 9В380)
59. **Alspach B. R.**, A class of tournaments. Doct. diss. Santa Barbara, Univ. Calif., 1966, 63 pp. Diss. Abstrs, 1967, **B28**, № 3, 983—984 (РЖМат, 1968, 8В255Д)
60. **Alvarez L. R.**, Undirected graphs realizable as a graphs of modular lattices. Can. J. Math., 1965, **17**, № 6, 923—932 (РЖМат, 1966, 7А337)
61. **Anderson S. S.**, Graph theory and finite combinatorics. Chicago, Markham Publ. Co., 1970, VIII, 180 pp. Publishers' Weekly, 1970, **198**, № 19, 64—65 (РЖМат, 1971, 5В409 К)
62. **Barnette D.**, Jucovič E., Trenkler M., Toroidal maps with prescribed types of vertices and faces. Mathematika (Gr. Brit.), 1971, **18**, № 1, 82—90 (РЖМат, 1972, 2В362)
63. **Battersby A.**, Network analysis for planning and scheduling transportation. MacMillan, New York, 1964
64. **Behzad M.**, A criterion for the planarity of the total graph of a graph. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1967, **63**, № 3, 679—681 (РЖМат, 1968, 6В279)
65. —, The total chromatic number of a graph: a survey. Combinator. Math. and Appl. London—New York, 1971, 1—8 (РЖМат, 1971, 11В506)
66. —, Chartrand G., Total graphs and traversability. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1966, **15**, № 2, 117—120 (РЖМат, 1968, 2В251)
67. —, Radjavi H., Structure of regular total graphs. J. London Math. Soc., 1969, **44**, № 3, 433—436 (РЖМат, 1969, 10В205)

68. **Beineke L. W.**, The decomposition of complete graphs into planar subgraphs. Graph Theory and Theor. Phys. London—New York, Acad. Press, 1967, 139—153 (РЖМат, 1969, 3В201)
69. —, A survey of packings and coverings of graphs. Lect. Notes Math., 1969, **110**, 45—53 (РЖМат, 1970, 8В250)
70. —, Chartrand G., The coarseness of a graph. Compos. math., 1968, **19**, № 4, 290—298 (РЖМат, 1970, 11В298)
71. —, Harary F., The genus of the n-cube. Can. J. Math., 1965, **17**, № 3, 494—496 (РЖМат, 1966, 1А434)
72. —, —, The maximum number of strongly connected subtournaments. Can. Math. Bull., 1965, 8, № 4, 491—498 (РЖМат, 1966, 6А260)
73. Beiträge zur Graphentheorie. Internat. Kolloq., Manebach (DDR), 9—12 Mai 1967. Leipzig, B. G. Teubner Verlagsges., 1968, 394 S. (РЖМат, 1969, 5В289 К)
74. **Bellman R.**, Cooke K. L., Lockett J. A., Algorithms, graphs, and computers. New York—London, Acad. Press, 1970, 246 pp.
75. **Berge C.**, Graphes et hypergraphes. Paris, Dunod, 1970, XVIII, 502 p. (РЖМат, 1971, 6В370 К)
76. —, Ghoila-Houri A., Programming, games and transportation networks. Methuen. London, 1965
77. **Bermond J. C.**, Graphes orientés fortement k-connexes et graphes k-arc-hamiltoniens. C. r. Acad sci., 1970, **271**, № 3, A141—A144 (РЖМат, 1971, 3В286)
78. Bibliographie. Beitr. Graphentheorie. Internat. Kolloq. Manebach. 1967. Leipzig, 1968, 233—394 (РЖМат, 1969, 7В193)
79. **Blažek J.**, Koman M., Průsečíkové číslo úplných k-chromatických grafů. Mat. Geometrie a teorie grafů. Praha, 1970, 69—84 (РЖМат, 1971, 9В362)
80. **Boland J. Ch.**, Embedding of graphs in orientable surfaces. Theory graphs. Budapest, 1968, 27 (РЖМат, 1968, 10В293)
81. **Bondy J. A.**, A note on the diameter of a graph. Can. Math. Bull., 1968, **11**, № 3, 499—501 (РЖМат, 1969, 7В200)
82. —, Bounds for the chromatic number of a graph. J. Combin. Theory, 1969, 7, № 1, 96—98 (РЖМат, 1970, 2В362)
83. —, Properties of graphs with constraints on degrees. Stud. sci. math. hung., 1969, 4, № 1-4, 473—475 (РЖМат, 1970, 6В355)
84. **Bosák J.**, The graphs of semigroups. Theory Graphs and Appl. Prague, 1964, 119—125 (РЖМат, 1967, 7В202)
85. —, Hamiltonian lines in cubic graphs. Théorie graphes. Journées internat. étude, Rome, 1966. Paris—New York, 1967, 35—46 (РЖМат, 1968, 4В242)
86. **Bose R. C.**, Shrikhande S. S., Graphs in which each pair of vertices is adjacent to the same number d of other vertices. Stud. sci. math. hung., 1970, **5**, № 1-2, 181—195 (РЖМат, 1971, 6В346)
87. **Brown W. G.**, On the non-existence of a type of regular graphs of girth 5. Can. J. Math., 1967, **19**, № 3, 644—648 (РЖМат, 1968, 9В215)
88. —, Moon J. W., Sur les ensembles de sommets indépendants dans les graphes chromatiques minimaux. Can. J. Math., 1969, **21**, № 2, 274—278 (РЖМат, 1970, 2В357)
89. **Brownlee A.**, Directed graph realization of degree pairs. Amer. Math. Mon., 1968, **75**, № 1, 36—38 (РЖМат, 1968, 12В363)
90. **Brualdi R. A.**, Matchings in arbitrary graphs. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1971, **69**, № 3, 401—407 (РЖМат, 1971, 10В553)
91. **Busacker R. G.**, Saaty T. L., Finite graphs and networks. McGraw Hill Inc. New York, 1965
92. **Capobianco M.**, Frechen J. B., Kronk M. (Eds.), Recent trends in graph theory. Proc. first New York City graph theory Conf. June 11—13, 1970. (Lect. Notes Math., **186**). Berlin e. a., Springer, 1971, 219 pp. (РЖМат, 1971, 10В550 К)

93. **Cartwright D.**, Harary F., On the coloring of signed graphs. Elem. Math., 1968, **23**, № 4, 85—89 (РЖМат, 1969, 1B238)
94. **Chartrand G.**, On hamiltonian linegraphs. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, **134**, № 3, 559—566 (РЖМат, 1971, 5B364)
95. —, Geller D. P., On uniquely colorable planar graphs. J. Combin. Theory, 1969, **6**, № 3, 271—289 (РЖМат, 1969, 11B305)
96. —, —, Hedetniemi S., A generalization of the chromatic number. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1968, **64**, № 2, 265—271 (РЖМат, 1969, 4B248)
97. —, —, —, Graphs with forbidden subgraphs. J. Combin. Theory, 1971, **B10**, № 1, 12—41 (РЖМат, 1972, 1B578)
98. —, Kapoor S. F., The cube of every connected graph is 1-hamiltonian. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1969, **B73**, № 1, 47—48 (РЖМат, 1969, 12B330)
99. —, — (Eds.), The many facets of graph theory. Proc. Conf. held at Western Michigan Univ. Kalamazoo/Ml., Oct. 31—Nov. 2, 1968. Berlin, Springer, 1969, VIII, 290 pp. (РЖМат, 1971, 7B516 K)
100. —, —, Kronk H. V., A sufficient condition for n-connectedness of graphs. Mathematika, 1968, **15**, № 1, 51—52 (РЖМат, 1969, 1B255)
101. —, —, —, A generalization of hamiltonian-connected graphs. J. math. pures et appl., 1969, **48**, № 2, 109—116 (РЖМат, 1970, 5B302)
102. —, Kronk H. V., Lick D. R., Randomly hamiltonian digraphs. Fund. math., 1969, **65**, № 2, 223—226 (РЖМат, 1970, 3B298)
103. —, Lick D. R., Randomly eulerian digraphs. Czechosl. Mat. J., 1971, **21**, № 3, 424—430 (РЖМат, 1972, 1B589)
104. —, Stewart M. J., The connectivity of line-graphs. Math. Ann., 1969, **182**, № 3, 170—174 (РЖМат, 1970, 4B328)
105. —, White A. T., Randomly traversable graphs. Elem. Math., 1970, **25**, № 5, 101—107 (РЖМат, 1971, 4B423)
106. **Chaty G.**, Unicité de certains chemins dans des graphes fortement connexés. C. r Acad. sci., 1971, **272**, № 11, A710—A713 (РЖМат, 1971, 10B557)
107. **Chvátal V.**, Planarity of graphs with given degrees of vertices. Nieuw arch. wisk., 1969, **17**, № 1, 47—60 (РЖМат, 1970, 4B324)
108. **Dirac G. A.**, On rigid circuit graphs. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1961, **25**, № 1-2, 71—76 (РЖМат, 1962, 9A173)
109. —, Minimally 2-connected graphs. J. reine und angew. Math., 1967, **288**, 204—216 (РЖМат, 1968, 11B275)
110. **Douglas R. J.**, Tournaments that admit exactly one hamiltonian circuit. Proc. London Math. Soc., 1970, **21**, № 4, 716—730 (РЖМат, 1971, 7B512)
111. **Dowling T. A.**, Laskar R., A geometric characterization of the line graph of a projective plane. J. Combin. Theory, 1967, **3**, № 4, 402—410 (РЖМат, 1968, 10B294)
112. **Elliott D.**, Erdös P., Some matching theorems. J. Indian Math. Soc., 1968(1969), **32**, № 3-4, 215—219 (РЖМат, 1970, 5B311)
113. **Erdös P.**, Some recent results on extremal problems in graph theory. (Results). Théorie graphes. Journées internat étude, Rome, 1966. Paris—New York, 1967, 117—130 (РЖМат, 1968, 9B205)
114. —, Some remarks on chromatic graphs. Colloq. math., 1967, **16**, 253—256 (РЖМат, 1968, 2B247)
115. —, Problems and results in chromatic graph theory. Proof Techn. Graph Theory. New York—London, 1969, 27—35 (РЖМат, 1971, 3B300)
116. —, Some unsolved problems in graph theory and combinatorial analysis. Combinator. Math. and Appl. London—New York, 1971, 97—109 (РЖМат, 1971, 11B512)
117. —, Gerencsér L., Máté A., Problems of graph theory concerning optimal design. Combin. Theory and Appl. (Colloq. Balatonfüred (Hungary) from Aug. 24—29, 1969) Ed. by P. Erdös a. o. Amsterdam—London, North—Holland, 1970, v. 1, 317—326

118. —, Goodman A. W., Pósa L., The representation of a graph by set intersections. Can. J. Math., 1966, 18, № 1, 106—112 (РЖМат, 1968, 1В258)
119. —, Hajnal A., On chromatic number of graphs and set-systems. Acta math. Acad. sci. hung., 1966, 17, № 1-2, 61—99 (РЖМат, 1968, 2В256)
120. —, Katona G. (Eds.), Theory of graphs. Proc. Colloq. Tihany, Hungary, Sept. 1966. Budapest, Akad. Kiadó, 1968, 370 pp. (РЖМат, 1969, 11В299К)
121. —, Moon J. W., On sets of consistent arcs in a tournament. Can. Math. Bull., 1965, 8, № 3, 269—271 (РЖМат, 1966, 3А150)
122. —, Moser L., On the representation of directed graphs as unions of orderings. Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1964, 9, № 1-2, 125—132 (РЖМат, 1965, 11А280)
123. Flamčik J., Jucovič E., Colouring the edges of a multigraph. Arch. Math., 1970, 21, № 4, 446—448 (РЖМат, 1971, 4В406)
124. Flament C., Applications of graph theory to group structure. Sociology. Prentice Hall Englewood Cliffs. New York, 1963
125. Folkman J. H., An upper bound on the chromatic number of a graph. Rand Corporation Memorandum RM—5808—PR, February, 1969
126. Frisch I. T., An algorithm for vertex-pair connectivity. Int. J. Contr., 1967, 6, № 6, 579—593 (РЖМат, 1968, 9В209)
127. Geller D. P., Minimally strong digraphs. Proc. Edinburgh Math. Soc., 1970, 17, № 1, 15—22 (РЖМат, 1971, 3В304)
128. —, Harary F., Connectivity in digraphs. Lect. Notes Math., 1971, 186, 105—115 (РЖМат, 1971, 12В578)
129. Gilmore P. C., Hoffman A. J., A characterization of comparability graphs and of interval graphs. Can. J. Math., 1964, 16, № 3, 539—548 (РЖМат, 1966, 1А421)
130. Glivjak F., Plesník J., On the existence of certain overgraphs of given graphs. Acta Fac. rerum natur. Univ. comen. Math., 1970, 23, 113—119 (РЖМат, 1971, 8В463)
131. Graphentheorie. Math. Forschungsinst. Oberwolfach. Tagung, 30. Juni — 6. Juli 1967 (РЖМат, 1969, 11В300К)
132. Graver J. E., Yackel J., An upper bound for Ramsey numbers. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, 72, № 6, 1076—1079 (РЖМат, 1968, 1В265)
133. Grünbaum B., Grötzsch's theorem on 3-colorings. Mich. Math. J., 1963, 10, № 3, 303—310 (РЖМат, 1964, 9А266)
134. —, Convex polytopes. (Pure and Appl. Math. Vol. 16). London—New York—Sydney, Intersci. 1967, XIV, 456 pp. (РЖМат, 1968, 10А542)
135. —, Planar maps with prescribed types of vertices and faces. Mathematika, 1969, 16, № 1, 28—36 (РЖМат, 1970, 1В289)
136. —, On n-connected graphs. Math. Nachr., 1969, 39, № 4-6, 345—347 (РЖМат, 1969, 10В204)
137. —, Higher-dimensional analogs of the four-color problem and some inequalities for simplicial complexes. J. Combin. Theory, 1970, 8, № 2, 147—153 (РЖМат, 1970, 12В363)
138. Gupta R. P., On basis digraphs. J. Combin. Theory, 1967, 3, № 1, 16—24 (РЖМат, 1969, 1В257)
139. —, A decomposition theorem for bipartite graphs. (Results). Théorie graphes. Journées internat. étude, Rome, 1966. Paris—New York, 1967, 135—138 (РЖМат, 1968, 8В251)
140. —, Independence and covering numbers of line graphs and total graphs. Proof Techn. Graph Theory. New York—London, 1969, 61—62 (РЖМат, 1971, 2В353)
141. —, Bounds on the chromatic and achromatic numbers of complementary graphs. Recent Progr. Combinator. New York—London, 1969, 229—235 (РЖМат, 1971, 12В631)
142. Guy R. K., A coarseness conjecture of Erdös. J. Combin. Theory, 1967, 3, № 1, 38—42 (РЖМат, 1969, 1В258)

143. —, Latest results on crossing numbers. Lect. Notes Math., 1971, **186**, 143—156 (РЖМат, 1971, 12B588)
144. —, Beineke L. W., The coarseness of the complete graph. Can. J. Math., 1968, **20**, № 4, 888—894 (РЖМат, 1969, 3B200)
145. —. Jenkyns T. A., The toroidal crossing number of $K_{m,n}$. J. Combin Theory, 1969, **6**, № 3, 235—250 (РЖМат, 1969, 12B328)
146. **Haff C. E.**, Murty U. S. R., Wilton R. C., A note on undirected graphs realizable as p. o. sets. Can. Math. Bull., 1970, **13**, № 3, 371—374 (РЖМат, 1971, 5B383)
147. **Hakimi S. L.**, Frahk H., Maximum internally stable sets of a graph. J. Math. Anal. and Appl., 1969, **25**, № 2, 296—308 (РЖМат, 1969, 10B224)
148. **Halin R.**, A theorem on n-connected graphs. J. Combin. Theory, 1969, **7**, № 2, 150—154 (РЖМат, 1970, 1B303)
149. —, Studies on minimally n-connected graphs. Combinator. Math. and Appl. London—New York, 1971, 129—136 (РЖМат, 1971, 11B515)
150. —, Unendliche minimale n-fach zusammenhängende Graphen. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1971, **36**, 75—88 (РЖМат, 1972, 2B336)
151. **Harary F.**, A characterization of block-graphs. Can. Math. Bull., 1963, **6**, № 1, 1—6 (РЖМат, 1964, 1A328)
152. — (Ed.), Graph theory and theoretical physics. London—New York, Acad. Press, 1967, XVI, 358 pp. (РЖМат, 1969, 2B253К)
153. — (Ed.), Proof techniques in graph theory. Proc. 2nd Ann Arbor Graph Theory Conf., Febr. 1968. New York—London, Acad. Press, 1969, XV, 330 pp. (РЖМат, 1970, 1B285К)
154. —, Graph theory. Addison—Wesley Reading. Massachusetts, 1969, 274 pp. (РЖМат, 1972, 8B404 К)
155. —, The Greek alphabet of «graph theory». Recent Progr. Combinator. New York—London, 1969, 13—20 (РЖМат, 1972, 1B582)
156. —, Beineke L. (Eds.), A seminar on graph theory. New York, Holt, Rinehart and Winston, 1967, X, 116 pp. (РЖМат, 1969, 8B184К)
157. —, Hedetniemi S., The achromatic number of a graph. J. Combin. Theory, 1970, **8**, № 2, 154—161 (РЖМат, 1970, 10B226)
158. —, —, Prins G., An interpolation theorem for graphical homomorphisms. Port. math., 1967, **26**, № 3-4, 453—462 (РЖМат, 1970, 6B348)
159. —, —, Robinson R. W., Uniquely colorable graphs. J. Combin. Thery, 1969, **6**, № 3, 264—270 (РЖМат, 1969, 11B304)
160. —, Nash-Williams C. St. J. A., On Eulerian and Hamiltonian graphs and line graphs. Can. Math. Bull., 1965, **8**, № 6, 701—709 (РЖМат, 1966, 12A147)
161. —, Norman R. Z., Cartwright D., Structural models (An introduction to the theory of directed graphs). New York—London—Sydney, J. Wiley and Sons, 1965 (РЖМат, 1967, 11B208 К)
162. **Harborth H.**, Diagonalen in regulären n-Eck. Elem. Math., 1969, **24**, 104—109
163. **Havel I.**, On the completeness-number of a finite graph. Beitr. Graphentheorie. Internat. Kolloq. Manebach, 1967. Leipzig, 1968, 71—74 (РЖМат, 1969, 9B203)
164. **Hobbs A. M.**, A survey of thickness. Recent Progr. Combinator. New York—London, 1969, 255—264 (РЖМат, 1971, 12B634)
165. **Hoffman A. J.**, On eigenvalues and colorings of a graph. Graph Theory and Appl. Proc. Advanced Seminar. New York—London, Acad. Press, 1970, 79—91
166. —, Howes L., On eigenvalues and colorings of graphs. Ann. N. Y. Acad. Sci., 1970, **175**, № 1, 238—242 (РЖМат, 1971, 5B372)
167. **Hopcroft J.**, Tarjan R., Planarity testing in $N \log N$ steps: extended abstracts. Proc. IFIP Congr. 71. Booklet TA—2. Ljubljana, 1971, 18—22
168. —, —, A V^2 algorithm for determining isomorphism of planar graphs. Inf. Process. Lett., 1971, **1**, № 1, 32—34 (РЖМат, 1971, 10B799)

169. **Imrich W.**, Realisierung von Metriken in Graphen. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1970, Abt. 2, **178**, № 1-3, 19—24 (РЖМат, 1971, 4В407)

170. **Kainen P.**, On a problem of P. Erdös. J. Combin. Theory, 1968, **5**, № 4, 374—377

171. **Kapoor S. F.**, Kronk H. V., Lick D. R., On detours in graphs. Can. Math. Bull., 1968, **11**, № 2, 195—201 (РЖМат, 1969, 9В196)

172. **Karaganis J. J.**, On the cube of a graph. Can. Math. Bull., 1968, **11**, № 2, 295—296 (РЖМат, 1969, 9В195)

173. **Kaufmann A.**, Introduction a la combinatorique en vue des applications. Paris, Dunod, 1968, 609 p. (РЖМат, 1968, 11В312 К)

174. **Kleinert M.**, Die Dicke des *n*-dimensionalen Würfel—Graphen. J. Combin. Theory, 1967, **3**, № 1, 10—15 (РЖМат, 1968, 12В366)

175. **Kleittman D. J.**, The crossing number of $K_{5,n}$. J. Combin. Theory, 1970, **9**, № 4, 315—323 (РЖМат, 1971, 9В375)

176. **Knödel K.**, Graphentheoretische Methoden und ihre Anwendungen. Berlin, Springer, 1969, VIII, 111 S. (РЖМат, 1971, 9В397 К)

177. **Koman M.**, On the crossing numbers of graphs. Acta Univ. carol. Math. et phys., 1969, **10**, № 1-2, 9—46 (РЖМат, 1972, 1В594)

178. —, Extremal crossing numbers of complete *k*-chromatic graphs. Mat. čas., 1970, **20**, № 4, 315—325 (РЖМат, 1971, 5В378)

179. **Kotzig A.**, Paare Hajóssche Graphen. Caš. péstov. mat., 1963, **88**, № 2, 236—240 (РЖМат, 1963, 12А309)

180. —, Des cycles dans des tournois. Théorie graphes. Journées internat. étude, Rome, 1966. Paris—New York, 1967, 203—208 (РЖМат, 1968, 7В244)

181. —, Sur les tournois avec des 3-cycles regulièrement placés. Mat. čas., 1969, **19**, № 2, 126—134 (РЖМат, 1970, 3В302)

182. **Kramer F.**, Kramer H., Un probléme de coloration des sommets d'un graphe. C. r. Acad. sci., 1969, **268**, № 1, A46—A48 (РЖМат, 1969, 8В186)

183. **Krieger M. M.**, Graphs edge-critical with respect to independence number. Ann. N. Y. Acad. Sci., 1970, **175**, № 1, 265—271 (РЖМат, 1971, 5В371)

184. **Kronk H. V.**, A note on *k*-path Hamiltonian graphs. J. Combin. Theory, 1969, **7**, № 2, 104—106 (РЖМат, 1970, 1В302)

185. —, Variations on a theorem of Pósa. Lect. Notes Math., 1969, **110**, 193—197 (РЖМат, 1970, 7В322)

186. —, An analogue to the Heawood map-colouring problem. J. London Math. Soc., 1969, **1**, № 4, 750—752 (РЖМат, 1971, 12В607)

187. **Kruskal J. B.**, The number of simplices in a complex. Math. optimiz. techn. Berkeley—Los Angeles, Univ. California Press, 1963, 251—278 (РЖМат, 1965, 10В225)

188. **Lang R.**, Walther H., Über die Anzahl der Knotenpunkte eines längsten Weges in planaren, kubischen, dreifach zusammenhängenden Graphen. Stud. sci. math. hung., 1970, 5, № 3-4, 221—228 (РЖМат, 1972, 4В322)

189. **Las Vergnas M.**, Une propriété forte de connexité en théorie des graphes. C. r. Acad. sci., 1968, **266**, № 11, A561—A563 (РЖМат, 1968, 11В289)

190. —, Une propriété forte de connexité en théorie des graphes. C. r. Acad. sci., 1968, **266**, № 12, A616—A618 (РЖМат, 1968, 11В290)

191. **Lindgren W. F.**, An infinite class of hypohamiltonian graphs. Amer. Math. Mon., 1967, **74**, № 9, 1087—1089 (РЖМат, 1968, 8В231)

192. **Longyear J. Q.**, Regular *d*-valent graphs of girth 6 and $2(d^2-d+1)$ vertices. J. Combin. Theory, 1970, **9**, № 4, 420—422 (РЖМат, 1971, 7В521)

193. **Lorens C. S.**, Flowgraphs for the modeling and analysis of linear systems. New York—London, McGraw-Hill Book Co., 1964, IX, 178 pp. Brit. Nat. Bibliogr., 1964, № 779, 20
194. **Lovász L.**, On chromatic number of finite set-systems. Acta math. Acad. sci. hung., 1968, **19**, № 1-2, 59—67 (РЖМат, 1969, 1В248)
195. **Mader W.**, Homomorphieeigenschaften und mittlere Kantendichte von Graphen. Math. Ann., 1967, **174**, № 4, 265—268 (РЖМат, 1968, 7В259)
196. —, Homomorphiesätze für Graphen. Math. Ann., 1968, **178**, № 2, 154—168 (РЖМат, 1969, 5В292)
197. —, Minimale n-fach kantenzusammenhängende Graphen. Math. Ann., 1971, **191**, № 1, 21—28 (РЖМат, 1971, 8В462)
198. —, Minimale n-fach zusammenhängende Graphen mit maximaler Kantenzahl. Z. reine und angew. Math., 1971, **249**, 201—207 (РЖМат, 1972, 2В338)
199. **Magnus W.**, K a r r a s s A., S o l i t a r D., Combinatorial group theory: presentations of groups in terms of generators and relations. (Pure and Appl. Math., Vol. 13). New York—London—Sydney, Intersci., 1966, XII, 444 pp.
200. **Menon V. V.**, Repeated adjoints of graphs. Théorie graphes. Journées internat. étude, Rome, 1966. Paris—New York, 1967, 245—248 (РЖМат, 1968, 4В253)
201. **Mitchem J.**, On the point-arboricity of a graph and its complement. Can. J. Math., 1971, **23**, № 2, 287—292 (РЖМат, 1971, 10В548)
202. **Moon J. W.**, Topics on tournaments. New York—Montreal, Que—London, 1968, VIII, 104 pp.
203. —, On cycles in tournaments. Mat. čas., 1969, **19**, № 2, 121—125 (РЖМат, 1970, 1В288)
204. —, M o s e r L., Generating oriented graphs by means of team comparisons. Pacif. J. Math., 1967, **21**, № 3, 531—535 (РЖМат, 1968, 4В249)
205. **Murty U. S. R.**, On some extremal graphs. Acta math. Acad. sci. hung., 1968, **19**, № 1-2, 69—74 (РЖМат, 1968, 12В357)
206. —, On critical graphs of diameter 2. Math. Mag., 1968, **41**, № 3, 138—140 (РЖМат, 1970, 1В291)
207. **Nash-Williams C. St. J. A.**, Hamiltonian arcs and circuits. Lect. Notes Math., 1971, **186**, 197—210 (РЖМат, 1971, 9В389)
208. **Nemetz T.**, A teljes gráf adott Hamilton körével adott számú közös élt tartalmazó Hamilton közök számaról. Mat. lapok, 1970, **21**, № 1-2, 65—81 (РЖМат, 1972, 2В376)
209. **Ore O.**, Hamilton connected graphs. J. math. pures et appl., 1963, **42**, № 1, 21—27 (РЖМат, 1964, 1А330)
210. —, The four-color problem. (Pure and Appl. Math., Ser. Monogr. and Textbooks, N. 27). New York—London, Acad. Press, 1967, XVI, 259 pp. (РЖМат, 1969, 10В211 К)
211. —, P l u m m e r M. D., Cyclic coloration of plane graphs. Recent Progr. Combinator. New York—London, 1969, 287—293 (РЖМат, 1972, 1В587)
212. **Owens A.**, On the biplanar-crossing number. IEEE Trans. Circuit Theory, 1971, **18**, № 2, 277—280 (РЖМат, 1971, 12В582)
213. **Palásti I.**, On hamilton-cycles of random graphs. Period. math. hung., 1971, **1**, № 2, 107—112 (РЖМат, 1972, 4В324)
214. **Pape U.**, Eine Bibliographie zu Kürzeste Weglängen und Wege in Graphen und Netzwerken. Elektron. Datenverarb., 1969, **11**, № 6, 271—274 (РЖМат, 1970, 1В314)
215. **Plesník J.**, On homogeneous tournaments. Acta Fac. rerum natur. Univ. comen. Math., 1969, № 21, 26—34 (РЖМат, 1970, 10В234)
216. **Plummer M. D.**, On the theory of graphical coverings. Doct. diss. Univ. Mich., 1966, 98 pp. Diss. Abstrs, 1967, **B27**, № 7, 2449 (РЖМат, 1968, 9В202Д)

217. —, On minimal blocks. Trans. Amer. Math. Soc., 1968, **134**, № 1, 85—94 (РЖМат, 1971, 9В385)
218. **Pnueli A.**, Lempel A., Even S., Transitively orientable graphs. Proc. 13th Midwest Symp. Circuit Theory, Minneapolis, Minn., 1970. New York, N. Y., 1970, VII. 7/1—VII. 7/2 (РЖМат, 1971, 3В296)
219. **Pósa L.**, A theorem concerning Hamilton lines. Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1962, 7, № 1-2, 225—226 (РЖМат, 1963, 6А264)
220. **Rajappan K. P.**, Realisation of cutset matrices into graphs. Electron. Lett., 1967, 3, № 10, 449—450 (РЖМат, 1968, 6В304)
221. **Ramachandra R. A.**, An extremal problem in graph theory. Isr. J. Math., 1968, 6, № 3, 261—266 (РЖМат, 1969, 5В300)
222. —, Rao S. B., On the power sequence of a graph. Isr. J. Math., 1970, 8, № 4, 398—402 (РЖМат, 1971, 6В356)
223. **Ray-Chaudhuri D. K.**, Characterization of line graphys. J. Combin. Theory, 1967, 3, № 3, 201—214 (РЖМат, 1968, 10В290)
224. **Read R. C.**, An introduction to chromatic polynomials. J. Combin. Theory, 1968, 4, № 1, 52—71
225. **Reid K. B.**, On sets of arcs containing no cycles in a tournament. Can. Math. Bull., 1969, **12**, № 3, 261—264 (РЖМат, 1970, 5В304)
226. —, Connectivity in products of graphs. SIAM J. Appl. Math., 1970, **18**, № 3, 645—651 (РЖМат, 1971, 1В308)
227. —, Parker E. T., Disproof of a conjecture of Erdös and Moser on tournaments. J. Combin. Theory, 1970, **9**, № 3, 225—238 (РЖМат, 1971, 5В362)
228. **Renz P. L.**, Intersection representations of graphs by arcs. Pacif. J. Math., 1970, **34**, № 2, 501—510 (РЖМат, 1971, 5В376)
229. **Ringel G.**, Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen. Berlin Dtsch. Verl. Wiss., 1959, VIII, 132 S. Dtsch. Nationalbibliogr. 1960, **A**, № 8, 542
230. —, Das Geschlecht des vollständigen paaren Graphen. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1965, **28**, № 3-4, 139—150 (РЖМат, 1966, 7А340)
231. —, Ein Sechsfarbenproblem auf der Kugel. Abh. math. Semin. Univ. Hamburg, 1965, **29**, № 1-2, 107—117 (РЖМат, 1968, 1В241)
232. —, Youngs J. W. T., Solution of the Heawood map-coloring problem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1968, **60**, № 2, 438—445 (РЖМат, 1969, 4В247)
233. —, —, Lösung des Problems der Nachbargebiete. Arch. Math., 1969, **20**, № 2, 190—201 (РЖМат, 1970, 1В292)
234. **Roberts F. S.**, On the boxicity and cubicity of a graph. Recent Progr. Combinator. New York—London, 1969, 301—310 (РЖМат, 1971, 12В639)
235. **Robinson D. F.**, Symmetric embeddings of graphs. J. Combin. Theory, 1970, 9, № 4, 377—400 (РЖМат, 1971, 9В376)
236. **Rosenfeld M.**, On a problem of C. E. Shannon in the graph theory. Proc. Amer. Math. Soc., 1967, **18**, № 2, 315—319 (РЖМат, 1968, 3В268)
237. **Rosenstiehl R.** (Ed.), Theory of graphs. International Symposium. Rome, 1967. Gordon and Breach, New York, 1967
238. **Roy B.**, Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales Ier T. Notions et résultats fondamentaux. Paris, Dunod, 1969, 502 p. (РЖМат, 1970, 4В418)
239. —, Algèbre moderne et théorie des graphes orientées vers les sciences économiques et sociales. Applications et problèmes spécifiques. Paris, Dunod, 1970, XXIV, 759 p. (РЖМат, 1970, 12В362 К)
240. **Saaty T. L.**, On polynomials and crossing numbers of complete graphs. J. Combin. Theory, 1971, **A10**, № 2, 183—184 (РЖМат, 1971, 10В562)
241. **Sabidussi G.**, Existence and structure of self-adjoint graphs. Math. Z., 1968, **104**, № 4, 257—280 (РЖМат, 1969, 1В241)

242. **Sachs H.**, Schauble M., Konstruktion von Graphen mit gewissen Färbungseigenschaften. Beitr. Graphentheorie. Internat. Kolloq. Manebach, 1967. Leipzig, 1968, 131—136 (РЖМат, 1969, 5В305)
243. **Sauer N.**, Extremaleigenschaften regulärer Graphen gegebener Taillenweite. I. Teil. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1967, Abt. 2, 176, № 1-3, 9—25 (РЖМат, 1969, 5В301)
244. —, Extremaleigenschaften regulärer Graphen gegebener Taillenweite. II. Teil. Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1967, Abt. 2, 176, № 1-3, 27—43 (РЖМат, 1969, 5В302)
245. —, On the maximal number of edges in graphs with a given number of edgedisjoint triangles. J. London Math. Soc., 1971, 4, № 1, 153—156 (РЖМат, 1972, 1В600)
246. **Schwartz B. L.**, Infinite self-interchange graphs. Pacif. J. Math., 1969, 31, № 2, 497—504 (РЖМат, 1970, 11В239)
247. **Sedláček J.**, Einführung in die Graphentheorie. Leipzig, Teubner, 1968, 171 S. (РЖМат, 1970, 4В323 К)
248. **Shirakawa Isao**, Takahashi Hiromitsu, Ozaki Hiroshi, Planar decomposition of a complete bipartite graph. Technol. Repts Osaka Univ., 1967, 17, № 769-800, 221—227 (РЖМат, 1968, 12В367)
249. **Simões Pereira J. M. S.**, Pseudosymmetry, circuit-symmetry, and path-symmetry of digraph. Recent Progr. Combinator. New York—London, 1969, 295—299 (РЖМат, 1971, 12В638)
250. —, A note on the tree realizability of a distance matrix. J. Combin. Theory, 1969, 6, № 3, 303—310 (РЖМат, 1969, 11В310)
251. **Simonovits M.**, A new proof and generalizations of a theorem of Erdös and Pósa on graphs without $k+1$ independent circuits. Acta math. Acad. sci. hung., 1967, 18, № 1-2, 191—206 (РЖМат, 1968, 5В202)
252. **Singleton R.**, On minimal graphs of maximum even girth. J. Combin. Theory, 1966, 1, № 3, 306—332 (РЖМат, 1968, 8В241)
253. **Stewart B. M.**, On a theorem of Nordhaus and Gaddum. J. Combin. Theory, 1969, 6, № 2, 217—218 (РЖМат, 1969, 10В212)
254. **Szekeres E.**, Szekeres G., On a problem of Schütte and Erdös. Math. Gaz., 1965, 49, № 369, 290—293 (РЖМат, 1968, 1В253)
255. **Szekeres G.**, Wilf H. S., An inequality for the chromatic number of a graph. J. Combin. Theory, 1968, 4, № 1, 1—3
256. **Tafteberg J.-I.**, Weakenings of the conjecture of Hadwiger for 8- and 9-chromatic graphs. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1970—1971, № 22, 17 pp. (РЖМат, 1972, 2В374)
257. Théorie des graphes. Journées internationales d'étude, Rome, juillet 1966. Paris, Dunod. New York, Gordon and Breach, 1967, XI, 416 p. (РЖМат, 1968, 6В267 К)
258. **Tucker A.**, Characterizing circular-arc graphs. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, 76, № 6, 1257—1260 (РЖМат, 1971, 9В365)
259. **Turner J.**, Key-word indexed bibliography of graph theory. Proof Techn. Graph Theory. New York—London, 1969, 189—330 (РЖМат, 1971, 2В357)
260. —, Kautz W. H., A survey of progress in graph theory in the Soviet Union. SIAM Rev., 1970, 12, Suppl, 1—68 (РЖМат, 1971, 2В327)
261. **Tutte W. T.**, A theorem on planar graphs. Trans. Amer. Math. Soc., 1956, 82, № 1, 99—116 (РЖМат, 1959, 6704)
262. —, Connectivity in graphs. Univ. of Toronto Press. Toronto, 1966
263. — (Ed.), Recent Progress in Combinatorics. Proc. Third Waterloo Conf. Combinator., May 1968. New York—London, Acad. Press, 1969, XIV, 347 pp. (РЖМат, 1971, 12В620 К)
264. —, On chromatic polynomials and the golden ratio. J. Combin. Theory, 1970, 9, № 3, 289—296 (РЖМат, 1971, 5В395)
265. **Vijayaditya N.**, On total chromatic number of a graph. J. London Math. Soc., 1971, 3, № 3, 405—408 (РЖМат, 1971, 12В617)

266. **Wagner K.**, Beweis einer Abschwächung der Hadwiger—Vermuttung. Math. Ann., 1964, **153**, № 2, 139—141 (РЖМат, 1964, 8А274)
267. —, Fastplättbare Graphen. J. Combin. Theory, 1967, **3**, № 4, 326—365 (РЖМат, 1968, 9В211)
268. —, Zum Basisproblem der nicht in die projektive Ebene einbettbaren Graphen. I. J. Combin. Theory, 1970, **9**, № 1, 27—43 (РЖМат, 1971, 2В316)
269. —, Graphentheorie. Mannheim—Wien—Zürich, Bibliogr. Inst., 1970, 220 S. Dtsch. Bibliogr., 1971, **A**, № 1, 39 (РЖМат, 1971, 5В408 К)
270. **Wallis W. D.**, A non-existence theorem for (v, k, λ)-graphs. J. Austral. Math. Soc., 1970, **11**, № 3, 381—383 (РЖМат, 1971, 5В387)
271. —, Construction of strongly regular graphs using affine designs. Bull. Austral. Math. Soc., 1971, **4**, № 1, 41—49 (РЖМат, 1971, 7В524)
272. **Walther H.**, Über die Länge eines längsten Kreises in regulären Graphen beliebigen Zusammenhanges. Wiss. Z. Techn. Hochschule Ilmenau, 1967, **13**, № 4, Teil 2, 427—429 (РЖМат, 1969, 3В208)
273. —, Über die Anzahl der Knotenpunkte eines längsten Kreises in planaren, kubischen, dreifach knotenzusammenhängenden Graphen. Stud. sci. math. hung., 1967, **2**, № 3-4, 391—398 (РЖМат, 1968, 9В208)
274. —, Über das Problem der Existenz von Hamiltonkreisen in planaren, regulären Graphen. Math. Nachr., 1969, **39**, № 4-6, 277—296 (РЖМат, 1969, 11В325)
275. **Watkins M. E.**, A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs. Proof Techn. Graph. Theory. New York—London, 1969, 171—178 (РЖМат, 1971, 3В290)
276. —, Mesner D. M., Cycles and connectivity in graphs. Can. J. Math., 1967, **19**, № 6, 1319—1328 (РЖМат, 1968, 10В291)
277. **Welsh D. J. A.** (Ed.), Combinatorial mathematics and its applications. Proc. Conf. Math. Inst., Oxford, 7—10 July, 1969. London—New York, Acad. Press, 1971, X, 364 pp. (РЖМат, 1971, 11В505 К)
278. **Wessel W.**, Eine Methode zur Konstruktion von kanten-p-kritischen Graphen. Beitr. Graphentheorie. Internat. Kolloq. Manebach, 1967. Leipzig, 1968, 207—210 (РЖМат, 1969, 7В201)
279. **Wilf H. S.**, The eigenvalues of a graph and its chromatic number. J. London Math. Soc., 1967, **42**, № 2, 330—332 (РЖМат, 1968, 1В264)
280. **Youngs J. W. T.**, The mystery of Heawood conjecture. Graph Theory and Appl. Proc. Advanced Seminar. New York—London, Acad. Press, 1970, 17—51
281. **Zaks J.**, The analogue of Eberhard's theorem for 4-valent graphs on the torus. Isr. J. Math., 1971, **9**, № 3, 299—305 (РЖМат, 1971, 9В374)
282. **Zelinka B.**, Graf systému tětiv dané kružnice. Mat.-fyz. čas. 1965, **15**, № 4, 273—279 (РЖМат, 1966, 5А290)
283. —, On the number of independent complete subgraphs. Publs math., 1966, 13, № 1-4, 95—97 (РЖМат, 1968, 1В250)
284. —, Poznámka nekonečných hranově disjunktních systémech cest v grafu. Čas. pěstov. mat., 1967, **92**, № 3, 289—293 (РЖМат, 1968, 1В268)
285. —, Some remarks on Menger's theorem. Čas. pěstov. mat., 1971, **96**, № 2, 145—150 (РЖМат, 1971, 11В530)