

## ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ЭЙЛЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ДРОБНОГО АНАЛОГА ФУНКЦИИ ГРИНА

Н. В. Жуковская

Белгородский государственный национальный исследовательский университет,  
Белгород, Россия  
nataliazhukouskaya@gmail.com

С помощью применения прямого и обратного преобразований Меллина дано решение неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера с дробными производными Римана — Лиувилля на полуоси  $(0; +\infty)$  в классе  $I_{0+}^{\alpha}$  ( $L_1(0; +\infty)$ ) функций, представимых дробным интегралом порядка  $\alpha$  с плотностью из  $L_1(0; +\infty)$  в терминах дробного аналога функции Грина. Построены дробные аналоги функции Грина в том случае, когда все корни характеристического многочлена различны, а также в случае, когда среди корней характеристического многочлена есть кратные. Сформулированы и доказаны теоремы разрешимости неоднородного дробно-дифференциального уравнения типа Эйлера на полуоси  $(0; +\infty)$ . Рассмотрены частные случаи и примеры.

**Ключевые слова:** дробный интеграл Римана — Лиувилля, дробная производная Римана — Лиувилля, прямое и обратное преобразования Меллина, дробный аналог функции Грина.

### 1. Решение неоднородного дифференциального уравнения типа Эйлера дробного порядка на полуоси $(0; +\infty)$

Напомним некоторые определения из теории специальных функций и интегральных преобразований [1–7].

**Определение 1.** *Обобщённая гипергеометрическая функция  ${}_pF_q(z)$  определена для  $z \in \mathbb{C}$  и  $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ ,  $b_j \neq 0$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $j = 1, \dots, q$ ) рядом:*

$${}_pF_q(z) \equiv {}_pF_q \left[ \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z \right] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \cdots (a_p)_k}{(b_1)_k \cdots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (1)$$

Здесь  $(z)_k$  — символ Похгаммера.

Известно, что ряд (1) абсолютно сходится для всех  $z \in \mathbb{C}$ , если  $p \leq q$ , и для  $|z| < 1$  и  $|z| = 1$ ,  $\operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i \right) > 0$ , если  $p = q + 1$ .

**Определение 2.** *Для  $z \in \mathbb{C}$ ,  $a_i, b_j \in \mathbb{C}$  и  $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$  ( $\alpha_i, \beta_j \neq 0$ ;  $i = 1, 2, \dots, p$ ;  $j = 1, 2, \dots, q$ ) обобщённая гипергеометрическая функция Райта  ${}_p\Psi_q(z)$  определяется*

рядом

$${}_p\Psi_q(z) \equiv {}_p\Psi_q \left[ \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i k)}{\prod_{j=1}^q \Gamma(b_j + \beta_j k)} \frac{z^k}{k!}. \quad (2)$$

Условия существования функции  ${}_p\Psi_q \left[ \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right]$  выражаются с помощью вспомогательных величин  $\Delta$ ,  $\delta$  и  $\mu$ , определяемых формулами [8]

$$\Delta = \sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{i=1}^p \alpha_i, \quad \delta = \prod_{i=1}^p |\alpha_i|^{-\alpha_i} \prod_{j=1}^q |\beta_j|^{\beta_j}, \quad \mu = \sum_{j=1}^q b_j - \sum_{i=1}^p a_i + \frac{p-q}{2}.$$

Обобщённая функция Райта (2) может быть представлена как H-функция вида

$${}_p\Psi_q \left[ \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = H_{p,q+1}^{1,p} \left[ -z \middle| \begin{matrix} (1-a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (0, 1), (1-b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right].$$

Приведём определения и основные свойства интегральных преобразований Меллина [1; 2; 4–7].

**Определение 3.** Прямое преобразование Меллина  $\mathcal{M}$  функции  $f(x)$  действительной переменной  $x \in \mathbb{R}^+ = (0; +\infty)$  задаётся формулой

$$\mathcal{M}\{f(x)\} = f^*(p) := \int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx, \quad p \in \mathbb{C},$$

а обратное преобразование Меллина  $\mathcal{M}^{-1}$  для  $x \in \mathbb{R}^+$  — формулой

$$\mathcal{M}^{-1}\{f^*(p)\} = f(x) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} x^{-p} f^*(p) dp, \quad \gamma = \text{Re} p.$$

Приведём основные свойства преобразования Меллина:

1. Масштабирующее свойство:

$$\mathcal{M}\{f(ax)\} = a^{-p} f^*(p), \quad a > 0.$$

2. Свойство сдвига:

$$\mathcal{M}\{x^a f(x)\} = f^*(p+a).$$

3.

$$\mathcal{M}\{f(x^a)\} = \frac{1}{a} f^*\left(\frac{p}{a}\right).$$

4.

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)\right\} = f^*(1-p).$$

5.

$$\mathcal{M}\{(\ln x)^n f(x)\} = \frac{d^n}{dp^n} f^*(p), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

6. Преобразование Меллина от производной:

$$\mathcal{M}\{f^{(n)}(x)\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p-n)} f^*(p-n)$$

при условии, что  $x^{p-r-1}f^{(r)}(x) = 0$  при  $x \rightarrow 0$ ,  $r = 0, 1, 2, \dots, n-1$ .

7.

$$\mathcal{M} \{x^n f^{(n)}(x)\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)} f^*(p).$$

8. Преобразование Меллина от дифференциального оператора:

$$\mathcal{M} \left\{ \left( x \frac{d}{dx} \right)^2 f(x) \right\} = \mathcal{M} \{x^2 f''(x) + x f'(x)\} = (-1)^2 p^2 f^*(p);$$

$$\mathcal{M} \left\{ \left( x \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \right\} = (-1)^n p^n f^*(p).$$

9. Преобразование Меллина от интеграла:

$$\mathcal{M} \left\{ \int_0^x f(t) dt \right\} = -\frac{1}{p} f^*(p+1);$$

$$\mathcal{M} \{I_n f(x)\} = \mathcal{M} \left\{ \int_0^x I_{n-1} f(t) dt \right\} = (-1)^n \frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+n)} f^*(p+n),$$

где  $I_n f(x)$  —  $n$ -кратный интеграл от  $f(x)$ , определяемый рекуррентным образом:

$$I_n f(x) = \int_0^x I_{n-1} f(t) dt.$$

10. Свойство свёртки: Если  $\mathcal{M} \{f(x)\} = f^*(p)$  и  $\mathcal{M} \{g(x)\} = g^*(p)$ , то

$$\mathcal{M} [f(x) * g(x)] = \mathcal{M} \left[ \int_0^\infty f(t) g\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} \right] = f^*(p) g^*(p).$$

11.

$$\mathcal{M} [f(x) \circ g(x)] = \mathcal{M} \left[ \int_0^\infty f(xt) g(t) dt \right] = f^*(p) g^*(1-p).$$

Заметим, что операция  $\circ$  не коммутативна.

12. Равенство Парсеваля: Если  $\mathcal{M} \{f(x)\} = f^*(p)$  и  $\mathcal{M} \{g(x)\} = g^*(p)$ , то

$$\mathcal{M} [f(x)g(x)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s) g^*(p-s) ds$$

или

$$\int_0^\infty x^{p-1} f(x)g(x) dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s) g^*(p-s) ds.$$

В частности, при  $p = 1$  получим формулу Парсеваля для преобразования Меллина:

$$\int_0^{\infty} f(x)g(x)dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s) g^*(1-s) ds.$$

Рассмотрим формулы преобразования Меллина от некоторых функций.

**А.** Если  $f(x) = e^{-nx}$ , где  $n > 0$ , то

$$\mathcal{M}\{e^{-nx}\} = f^*(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-nx} dx = \frac{1}{n^p} \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(p)}{n^p}.$$

**Б.** Если  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ , то

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\frac{1}{1+x}\right\} &= f^*(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \frac{dx}{1+x} = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{-p} dt = \\ &= B(p, 1-p) = \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \end{aligned}$$

**В.** Если  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^n}$ , то

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\left\{\frac{1}{(1+x)^n}\right\} &= f^*(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} (1+x)^{-n} dx = \\ &= \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{n-p-1} dt = B(p, n-p) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(n-p)}{\Gamma(n)}, \end{aligned}$$

где  $B(p, q)$  — бета-функция.

**Г.** Если  $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ , то

$$\mathcal{M}\left\{\frac{1}{e^x - 1}\right\} = f^*(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} \frac{1}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-nx} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(p)}{n^p} = \Gamma(p)\zeta(p),$$

где

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \operatorname{Re} p > 1,$$

есть известная дзета-функция Римана.

### 1.1. Дробный аналог функции Грина

На полуоси  $(0; +\infty)$  рассмотрим неоднородное уравнение с конечным числом дробных производных Римана — Лиувилля порядка  $\alpha + n$  [8; 9]

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{\alpha+k} (D_{0+}^{\alpha+k} y)(x) = f(x), \quad (3)$$

где  $0 < \alpha < 1$ ,  $(D_{0+}^{\alpha} y)(x)$  — дробная производная Римана — Лиувилля, определяемая формулой [8; 10; 11]

$$(D_{0+}^{\alpha} y)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Решение  $y(x)$  будем искать в классе  $I_{0+}^{\alpha}(L_1(0; +\infty))$  функций, представимых дробным интегралом порядка  $\alpha$  с плотностью из  $L_1(0; +\infty)$ . Обозначив  $y = I_{0+}^{\alpha}\varphi$ , где  $\varphi \in L_1(0; +\infty)$ , из (3) получим уравнение Эйлера

$$\sum_{k=0}^n a_k x^{\alpha+k} \varphi^{(k)} = f(x). \quad (4)$$

Далее, используя формулы для преобразования Меллина [2; 4; 8; 10–13]

$$\mathcal{M}(t^{\alpha}\varphi(t)) = (\mathcal{M}\varphi)(s + \alpha),$$

$$\mathcal{M}(t^{\alpha+1}\varphi'(t)) = -(s + \alpha)(\mathcal{M}\varphi)(s + \alpha),$$

$$\mathcal{M}(t^{\alpha+2}\varphi''(t)) = (s + \alpha + 1)(s + \alpha)(\mathcal{M}\varphi)(s + \alpha), \dots,$$

$$\mathcal{M}(t^{\alpha+n}\varphi^{(n)}(t)) = (-1)^n (s + \alpha + n - 1)(s + \alpha + n - 2) \dots (s + \alpha)(\mathcal{M}\varphi)(s + \alpha),$$

возьмём преобразование Меллина от обеих частей уравнения (4):

$$(\mathcal{M}\varphi)(s + \alpha) = \frac{(\mathcal{M}f)(s)}{P(s)},$$

где

$$P(s) = (-1)^n a_n (s + \alpha + n - 1)(s + \alpha + n - 2) \dots (s + \alpha) + \dots - a_1 (s + \alpha) + a_0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} x^{\alpha}\varphi(x) &= \mathcal{M}^{-1}((\mathcal{M}\varphi)(s + \alpha)) = \mathcal{M}^{-1}\left[\frac{(\mathcal{M}f)(s)}{P(s)}\right] = \\ &= \mathcal{M}^{-1}[(\mathcal{M}G)(1 - s)(\mathcal{M}f)(s)] = \int_0^{\infty} G(t)f(xt)dt, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $(\mathcal{M}G)(1 - s) = 1/P(s)$ , откуда находим

$$G(x) = \mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{P(1 - s)}\right) = \mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{a_n(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)}\right).$$

Здесь корни  $s_1, s_2, \dots, s_n$  не обязательно различны.

Функцию  $G(x)$  назовём дробным аналогом функции Грина для уравнения (3) [8; 14]. Если  $\varphi(x) \in L_1(0; +\infty)$ , то решение уравнения (3) получим в виде

$$y(x) = I_{0+}^{\alpha}\left(x^{-\alpha}\int_0^{\infty} G(t)f(xt)dt\right). \quad (6)$$

## 1.2. Решение уравнения типа Эйлера на полуоси $(0; +\infty)$ с помощью дробного аналога функции Грина

Выясним, при каких условиях формула (6) даёт искомое решение уравнения (3). Пусть все корни  $s_1, s_2, \dots, s_n$  многочлена  $P(1 - s)$  различны. Тогда

$$\mathcal{M}G(x) = \frac{1}{a_n(s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)} = \frac{A_1}{s - s_1} + \frac{A_2}{s - s_2} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  могут быть найдены методом неопределённых коэффициентов. Несложно показать, что тогда

$$G(x) = \begin{cases} A_1 x^{-s_1} + A_2 x^{-s_2} + \dots + A_n x^{-s_n}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{cases} \quad (7)$$

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть все корни  $s_1, s_2, \dots, s_n$  многочлена  $P(1-s)$  различны, функция  $f$   $n$  раз дифференцируема и  $f, f', \dots, f^{(n)} \in L_{1-\alpha,1}$ . Если  $\text{Res}_j < \alpha$ , при всех  $j = 1, \dots, n$ , то уравнение (3) имеет единственное решение  $y(x) = I_{0+}^\alpha \left( x^{-\alpha} \int_0^\infty G(t)f(xt)dt \right)$ , где  $G(t)$  – дробный аналог функции Грина (7).

*Доказательство.* 1. Покажем, что  $x^\alpha \varphi(x)$  в (5) принадлежит  $L_{1-\alpha,1}$ . Пусть  $s_j$  – корень многочлена  $P(1-s)$ . Имеем:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{-\alpha} dx \left| \int_0^1 \frac{1}{t^{s_j}} f(xt) dt \right| \leq \int_0^1 t^{-s_j} dt \int_0^\infty x^{-\alpha} |f(xt)| dx = [xt = \tau, t dx = d\tau] = \\ & = \int_0^1 t^{\alpha-1-s_j} dt \int_0^\infty \tau^{-\alpha} |f(\tau)| d\tau = \left( \frac{t^{\alpha-s_j}}{\alpha-s_j} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} \cdot \|f\|_{L_{1-\alpha,1}} = \frac{1}{\alpha-s_j} \cdot \|f\|_{L_{1-\alpha,1}} \end{aligned}$$

при  $\text{Res}_j < \alpha$ , откуда вытекает, что  $x^\alpha \varphi(x) \in L_{1-\alpha,1}$ .

2. Докажем, что функция  $x^\alpha \varphi(x)$  дифференцируема. Пусть  $\gamma = 1 - \alpha$ , покажем, что тогда интеграл  $\int_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt) dt$  сходится равномерно на любом отрезке  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \in (0; +\infty)$ . Действительно,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt) dt \right| = \\ & = \left| \int_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) (xt)^{\gamma-1} (xt)^{1-\gamma} f'(xt) dt \right| = \\ & = \left| \int_0^1 x^{1-\gamma} t^{1-\gamma} (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) \{(xt)^{\gamma-1} f'(xt)\} dt \right| \leq \\ & \leq x^{1-\gamma} \int_0^1 (A_1 t^{2-\gamma-s_1} + A_2 t^{2-\gamma-s_2} + \dots + A_n t^{2-\gamma-s_n}) dt \int_0^1 |f'(xt)| (xt)^{\gamma-1} dt = \\ & = x^{1-\gamma} \left( A_1 \frac{t^{3-\gamma-s_1}}{3-\gamma-s_1} + A_2 \frac{t^{3-\gamma-s_2}}{3-\gamma-s_2} + \dots + A_n \frac{t^{3-\gamma-s_n}}{3-\gamma-s_n} \right) \Big|_{t=0}^{t=1} \cdot \int_0^1 |f'(xt)| (xt)^{\gamma-1} dt = \\ & = [xt = \tau] = x^{1-\gamma} \left( \frac{A_1}{3-\gamma-s_1} + \frac{A_2}{3-\gamma-s_2} + \dots + \frac{A_n}{3-\gamma-s_n} \right) \cdot \frac{1}{x} \int_0^x |f'(\tau)| \tau^{\gamma-1} d\tau \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq x^{-\gamma} \left( \frac{A_1}{3-\gamma-s_1} + \frac{A_2}{3-\gamma-s_2} + \dots + \frac{A_n}{3-\gamma-s_n} \right) \cdot \int_0^{\infty} |f'(\tau)| \tau^{\gamma-1} d\tau = \\ &= x^{-\gamma} \left( \frac{A_1}{3-\gamma-s_1} + \frac{A_2}{3-\gamma-s_2} + \dots + \frac{A_n}{3-\gamma-s_n} \right) \cdot \|f'\|_{L_{\gamma,1}}. \end{aligned}$$

Поскольку  $x \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ , то  $0 < \frac{1}{x^\gamma} < \frac{1}{\varepsilon_1^\gamma}$ , следовательно, по признаку Вейерштрасса интеграл  $\int_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt) dt$  сходится равномерно на любом отрезке  $[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \in (0; +\infty)$ , т. е.  $x^\alpha \varphi(x)$  дифференцируема.

3. Докажем, что  $x^{\alpha+1} \varphi'(x) \in L_{\gamma,1}$ . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^\alpha \varphi(x)) &= \alpha x^{\alpha-1} \varphi(x) + x^\alpha \varphi'(x), \\ \varphi'(x) &= x^{-\alpha} \left( \frac{d}{dx} (x^\alpha \varphi(x)) - \alpha x^{\alpha-1} \varphi(x) \right), \\ x^{\alpha+1} \varphi'(x) &= x \frac{d}{dx} (x^\alpha \varphi(x)) - \alpha x^\alpha \varphi(x) = \\ &= x \int_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt) dt - \\ &\quad - \alpha \int_0^1 (A_1 t^{-s_1} + A_2 t^{-s_2} + \dots + A_n t^{-s_n}) f(xt) dt. \end{aligned}$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^1 (A_1 t^{-s_1} + A_2 t^{-s_2} + \dots + A_n t^{-s_n}) f(xt) dt, \\ B(x) &= x \int_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt) dt. \end{aligned}$$

Так же, как в первом пункте доказательства, показывается, что  $A(x) \in L_{\gamma,1}$ .

Докажем, что  $B(x) \in L_{\gamma,1}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} B(x) &= x \int_0^1 (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) f'(xt) dt = \\ &= x (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) \frac{f(xt)}{x} \Big|_{t=0}^{t=1} - \\ &\quad - x \int_0^1 \frac{f(xt)}{x} [A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + \dots + A_n(1-s_n)t^{-s_n}] dt = \\ &= (A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}) f(xt) \Big|_{t=0}^{t=1} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^1 [A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + \dots + A_n(1-s_n)t^{-s_n}] f(xt) dt = \\
& = (A_1 + A_2 + \dots + A_n) f(x) - \\
& - \int_0^1 [A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + \dots + A_n(1-s_n)t^{-s_n}] f(xt) dt \in L_{\gamma,1}.
\end{aligned}$$

Доказательство проводится так же, как и для  $A(x)$ . Здесь использовалась формула интегрирования по частям:

$$u = A_1 t^{1-s_1} + A_2 t^{1-s_2} + \dots + A_n t^{1-s_n}, \quad dv = f'(xt) dt,$$

$$du = [A_1(1-s_1)t^{-s_1} + A_2(1-s_2)t^{-s_2} + \dots + A_n(1-s_n)t^{-s_n}] dt, \quad v = \frac{1}{x} f(xt).$$

4. Аналогично доказывается, что  $x^{\alpha+\nu} \varphi^{(\nu)}(x) \in L_{\gamma,1}$  при всех  $\nu = 1, \dots, n$ . Теорема доказана.  $\square$

Пусть среди корней многочлена  $P(1-s)$  есть кратные. Без ограничения общности будем считать, что  $s_1$  — корень кратности  $l_1$ ,  $s_2$  — корень кратности  $l_2$ ,  $s_k$  — корень кратности  $l_k$ , причём  $l_1 + l_2 + \dots + l_k = n$ . Тогда

$$\begin{aligned}
MG(x) &= \frac{1}{a_n(s-s_1)^{l_1}(s-s_2)^{l_2} \dots (s-s_k)^{l_k}} = \\
&= \frac{A_{11}}{s-s_1} + \frac{A_{12}}{(s-s_1)^2} + \dots + \frac{A_{1l_1}}{(s-s_1)^{l_1}} + \dots + \frac{A_{k1}}{s-s_k} + \frac{A_{k2}}{(s-s_k)^2} + \dots + \frac{A_{kl_k}}{(s-s_k)^{l_k}}.
\end{aligned}$$

В этом случае дробный аналог функции Грина имеет вид

$$G(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^k \sum_{m_j=1}^{l_j} A_{km} \frac{(-1)^{m_j-1}}{(m_j-1)!} x^{-s_j} \ln^{m_j-1} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{cases} \quad (8)$$

Имеет место

**Теорема 2.** Пусть среди корней многочлена  $P(1-s)$  есть кратные, функция  $f$   $n$  раз дифференцируема и  $f, f', \dots, f^{(n)} \in L_{1-\alpha,1}$ . Если  $\text{Res}_j < \alpha$ , где  $j = 1, \dots, k$ , то уравнение (3) имеет единственное решение  $y(x) = I_{0+}^\alpha \left( x^{-\alpha} \int_0^\infty G(t) f(xt) dt \right)$ , где  $G(t)$  — дробный аналог функции Грина (8).

*Доказательство.* Достаточно показать, что

$$\int_0^1 \frac{\ln^m t}{t^s} f(xt) dt \in L_{1-\alpha,1}(0; +\infty) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall s < \alpha.$$

Имеем

$$\left| \frac{\ln^m t}{t^s} \right| \leq \frac{M}{t^{s+\varepsilon}} \quad (9)$$

при  $t \rightarrow 0$ , где  $M > 0$  — постоянная,  $\varepsilon > 0$  — достаточно малое, такое, что  $s + \varepsilon < \alpha$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty x^{-\alpha} dx \left| \int_0^1 \frac{\ln^m t}{t^s} f(xt) dt \right| \leq \int_0^\infty x^{-\alpha} dx \int_0^1 \frac{|\ln^m t|}{t^s} |f(xt)| dt \leq \\ & \leq \int_0^\infty x^{-\alpha} dx \int_0^1 \frac{M}{t^{s+\varepsilon}} |f(xt)| dt \leq \int_0^1 \frac{M}{t^{s+\varepsilon}} dt \int_0^\infty x^{-\alpha} |f(xt)| dx = \\ & = [xt = \tau] = M \int_0^1 t^{\alpha-1-s-\varepsilon} dt \int_0^\infty \tau^{-\alpha} |f(\tau)| d\tau = \frac{M}{\alpha - s - \varepsilon} \cdot \|f\|_{L_{1-\alpha,1}} \end{aligned}$$

при  $s + \varepsilon < \alpha$ . Отсюда следует, что  $x^\alpha \varphi(x) \in L_{1-\alpha,1}$ .

Утверждения о том, что  $x^{\alpha+\nu} \varphi^{(\nu)}(x) \in L_{\gamma,1}$  при всех  $\nu = 1, \dots, n$ , доказываются с учётом (9) так же, как в теореме 1.  $\square$

## 2. Уравнение типа Эйлера с двумя дробными производными Римана — Лиувилля

Рассмотрим неоднородное уравнение с двумя дробными производными Римана — Лиувилля порядка  $\alpha + 1$  [8; 9]

$$x^{\alpha+1} (D_{0+}^{\alpha+1} y)(x) + \lambda x^\alpha (D_{0+}^\alpha y)(x) = f(x). \quad (10)$$

Потребуем, чтобы  $f, f' \in L_{1-\alpha,1}$ . Обозначив  $y = I_{0+}^\alpha \varphi$ , где  $\varphi \in L_1(0; +\infty)$ , из (10) получим уравнение Эйлера

$$x^{\alpha+1} \frac{d\varphi(x)}{dx} + \lambda x^\alpha \varphi(x) = f(x).$$

В этом случае многочлен  $P(1-s) = s + \lambda - \alpha - 1$  имеет единственный корень  $s = \alpha + 1 - \lambda$  и дробный аналог функции Грина имеет вид

$$G(x) = \begin{cases} x^{\lambda-\alpha-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$

Пусть  $\lambda > 1$ . Тогда выполнены условия теоремы 1 и уравнение (10) имеет единственное решение (6).

**Пример 1.** Рассмотрим на полуоси  $(0; +\infty)$  неоднородное дифференциальное уравнение порядка  $3/2$

$$x^{\frac{3}{2}} \left( D_{0+}^{\frac{3}{2}} y \right)(x) + x^{\frac{1}{2}} \left( D_{0+}^{\frac{1}{2}} y \right)(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}. \quad (11)$$

Правая часть  $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2} \in L_{\frac{1}{2},1}$ . Решение  $y(x)$  будем искать в классе  $I_{0+}^{\frac{1}{2}}(L_1(0; +\infty))$  функций, представимых дробным интегралом порядка  $1/2$  с плотностью из  $L_1(0; +\infty)$ .

Обозначив  $y = I_{0+}^{\frac{1}{2}} \varphi$ , где  $\varphi \in L_1(0; +\infty)$ , из (11) получим уравнение

$$x^{\frac{3}{2}} \frac{d\varphi(x)}{dx} + x^{\frac{1}{2}} \varphi(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}. \quad (12)$$

Далее возьмём преобразование Меллина от обеих частей уравнения (12):

$$\mathcal{M}\left(\varphi\left(\frac{1}{2} + s\right)\right) = \frac{\mathcal{M}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\right)}{\frac{1}{2} - s}.$$

Введём в рассмотрение дробный аналог функции Грина:

$$G(x) = \mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{P(1-s)}\right) = \mathcal{M}^{-1}\left(\frac{1}{s - \frac{1}{2}}\right).$$

Тогда  $\mathcal{M}G(x) = \frac{1}{s - \frac{1}{2}}$ . Нетрудно показать, что тогда

$$G(x) = \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$

Отсюда находим:

$$x^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = \int_0^{\infty} G(t)f(xt)dt = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}} \frac{(xt)^{\frac{1}{2}}}{1+(xt)^2} dt = x^{\frac{1}{2}} \int_0^1 \frac{dt}{1+(xt)^2} = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\operatorname{arctg} x}{x}, \quad y(x) = I_{0+}^{\frac{1}{2}}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t dt}{t(x-t)^{\frac{1}{2}}} = [t = x\tau] = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{x}} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}(x\tau)d\tau}{\tau(1-\tau)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} {}_4F_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; -x^2\right). \end{aligned}$$

Заметим, что уравнение (11) можно решить без использования дробного аналога функции Грина на основе непосредственного вычисления интеграла Меллина — Барнса с помощью теоремы Слейтер [12].

Применим к обеим частям уравнения (11) прямое преобразование Меллина:

$$\mathcal{M}\left(x^{\frac{3}{2}}\left(D_{0+}^{\frac{3}{2}}y\right)(x) + x^{\frac{1}{2}}\left(D_{0+}^{\frac{1}{2}}y\right)(x)\right) = \mathcal{M}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\right).$$

Вычислим:

$$\mathcal{M}\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^2}\right) = \int_0^{\infty} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{1+t^2} t^{s-1} dt = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)t^{\frac{1}{2}-s}}.$$

Для вычисления интеграла сделаем замену переменной:

$$t = \sqrt{\tau}, \quad dt = \frac{d\tau}{2\sqrt{\tau}},$$

тогда

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)t^{\frac{1}{2}-s}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{\frac{s}{2}-\frac{3}{4}} d\tau}{1+\tau} =$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}, \frac{3}{4} - \frac{s}{2}\right) = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{s}{2}\right).$$

Далее,

$$\mathcal{M}\left(x^{\frac{3}{2}} \left(D_{0+}^{\frac{3}{2}} y\right)(x) + x^{\frac{1}{2}} \left(D_{0+}^{\frac{1}{2}} y\right)(x)\right) = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} \left(\frac{1}{2}-s\right) (\mathcal{M}y)(s).$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(\frac{1}{2}-s)} \left(\frac{1}{2}-s\right) (\mathcal{M}y)(s) &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{s}{2}\right), \\ (\mathcal{M}y)(s) &= \frac{\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{(\frac{1}{2}-s) \Gamma(1-s)}. \end{aligned}$$

Решение уравнения (11) задаётся интегралом Меллина — Барнса [12]:

$$y(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{(\frac{1}{2}-s) \Gamma(1-s)} x^{-s} ds.$$

Вычислим его с помощью теории вычетов на основе теоремы Слейтер [12]:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \operatorname{res}_{s=-\frac{1}{2}-2m} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{(\frac{1}{2}-s) \Gamma(1-s)} x^{-s} = \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m)! (2x)^{2m}}{(2m+1)(4m+1)!!} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} {}_4F_3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1; \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}; -x^2\right). \end{aligned}$$

### 3. Уравнение типа Эйлера с тремя дробными производными Римана — Лиувилля

Рассмотрим неоднородное уравнение с тремя дробными производными Римана — Лиувилля порядка  $\alpha + 2$  [8; 9]

$$x^{\alpha+2} \left(D_{0+}^{\alpha+2} y\right)(x) + \mu x^{\alpha+1} \left(D_{0+}^{\alpha+1} y\right)(x) + \lambda x^{\alpha} \left(D_{0+}^{\alpha} y\right)(x) = f(x). \quad (13)$$

Потребуем, чтобы  $f, f', f'' \in L_{1-\alpha, 1}$ . Обозначив  $y = I_{0+}^{\alpha} \varphi$ , где  $\varphi \in L_1(0; +\infty)$ , из (13) получим уравнение Эйлера

$$x^{\alpha+2} \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + \mu x^{\alpha+1} \frac{d\varphi(x)}{dx} + \lambda x^{\alpha} \varphi(x) = f(x). \quad (14)$$

Далее, используя формулы для преобразования Меллина [1, 2, 4–7]

$$\mathcal{M}(t^{\alpha} \varphi(t)) = (\mathcal{M}\varphi)(s + \alpha),$$

$$\mathcal{M}(t^{\alpha+1} \varphi'(t)) = -(s + \alpha) (\mathcal{M}\varphi)(s + \alpha),$$

$$\mathcal{M}(t^{\alpha+2} \varphi''(t)) = (s + \alpha + 1)(s + \alpha) (\mathcal{M}\varphi)(s + \alpha),$$

возьмём преобразование Меллина от обеих частей уравнения (14):

$$(\mathcal{M}\varphi)(s + \alpha) = \frac{(\mathcal{M}f)(s)}{P(s)}.$$

Введём в рассмотрение дробный аналог функции Грина:

$$G(x) = \mathcal{M}^{-1} \left( \frac{1}{P(1-s)} \right) = \mathcal{M}^{-1} \left( \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} \right).$$

Пусть  $\operatorname{Res}_1 < \alpha$ ,  $\operatorname{Res}_2 < \alpha$ . Возможны следующие случаи:

1. Пусть  $s_1, s_2$  — различные корни многочлена  $P(1-s)$ . Тогда

$$\mathcal{M}G(x) = \frac{1}{(s-s_1)(s-s_2)} = \frac{1}{s_1-s_2} \left( \frac{1}{s-s_1} - \frac{1}{s-s_2} \right).$$

Несложно показать, что тогда

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{s_1-s_2} (x^{-s_1} - x^{-s_2}), & 0 < x < 1, \\ 0, & \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$

2. Пусть  $s_1$  — корень кратности 2 многочлена  $P(1-s)$ . Тогда

$$\mathcal{M}G(x) = \frac{1}{(s-s_1)^2}.$$

Несложно показать, что тогда

$$G(x) = \begin{cases} x^{-s_1} - x^{-s_1} \ln x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \begin{cases} x \leq 0, \\ x \geq 1. \end{cases} \end{cases}$$

В обоих случаях выполняются условия теоремы 1 и теоремы 2 соответственно и уравнение (13) имеет единственное решение (6).

**Пример 2.** Рассмотрим на полуоси  $(0; +\infty)$  неоднородное дифференциальное уравнение порядка  $5/2$

$$\delta x^{\frac{5}{2}} \left( D_{0+}^{\frac{5}{2}} y \right) (x) + \mu x^{\frac{3}{2}} \left( D_{0+}^{\frac{3}{2}} y \right) (x) + \lambda x^{\frac{1}{2}} \left( D_{0+}^{\frac{1}{2}} y \right) (x) = f(x), \quad \delta \neq 0.$$

Здесь корни  $s_1$  и  $s_2$  многочлена  $P(1-s)$  имеют вид

$$s_{1,2} = \frac{4\delta - \mu \pm \sqrt{\mathcal{D}}}{2\delta}, \quad \mathcal{D} = (4\delta - \mu)^2 - \delta(3\delta - 6\mu + 4\lambda).$$

Частное решение задаётся как

$$y(x) = \int_0^1 G(t) f(xt) dt.$$

Если  $s_1 \neq s_2 \neq \frac{1}{2} - k$  для любого  $k \in \mathbb{N}_0$ , то

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\delta} {}_2\Psi_3 \left[ \begin{matrix} (s_1 - \frac{1}{2}, 1), & (s_2 - \frac{1}{2}, 1) \\ (\frac{1}{2}, -1), & (s_1 + \frac{1}{2}, 1), & (s_2 + \frac{1}{2}, 1) \end{matrix} \mid -x \right] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}}} \left[ \frac{\Gamma(s_1 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_1)} x^{-s_1} - \frac{\Gamma(s_2 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_2)} x^{-s_2} \right] = \\ &= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\delta (s_1 - \frac{1}{2})(s_2 - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} \frac{1}{2}, s_1 - \frac{1}{2}, s_2 - \frac{1}{2} \\ s_1 + \frac{1}{2}, s_2 + \frac{1}{2} \end{matrix} \mid x \right] + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\mathcal{D}}} \left[ \frac{\Gamma(s_1 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_1)} x^{-s_1} - \frac{\Gamma(s_2 - \frac{1}{2})}{\Gamma(s_2)} x^{-s_2} \right]. \end{aligned}$$

## Список литературы

1. **Erdelyi, A.** Higher Transcendental Functions / A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricemi. — New York : McGraw-Hill, 1953. — Vol. I. — 215 p.
2. **Князев, П. Н.** Интегральные преобразования / П. Н. Князев. — Минск : Высш. шк., 1969. — 197 с.
3. **Бейтмен, Г.** Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1973. — Т.1. — 296 с.
4. **Диткин, В. А.** Интегральные преобразования и операционное исчисление / В. А. Диткин, А. П. Прудников. — М. : Наука, 1974. — 544 с.
5. **Debnath, L.** Integral Transforms and Their Applications / L. Debnath, D. Bhatta. — Boca Raton : Chapman & Hall, 2007. — 700 p.
6. **Olver, F. W. J.** NIST Handbook of Mathematical Functions / F. W. J. Olver, D. W. Lozier, R. F. Boisvert, C. W. Clark. — Cambridge : Cambridge University Press, 2010. — 968 с.
7. **Gorenflo, R.** Mittag-Leffler Functions: Related Topics and Applications / R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, S. V. Rogosin. — Berlin, Heidelberg : Springer, 2014. — 443 p.
8. **Kilbas, A. A.** Theory and Applications of Fractional Differential Equations / A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo. — Amsterdam, Boston, Heidelberg : Elsevier Science Publ., 2006. — 541 p.
9. **Podlubny, I.** Fractional Differential Equations / I. Podlubny. — San Diego, Boston : Academic Press, 1999. — 340 p.
10. **Самко, С. Г.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 688 с.
11. **Samko, S. G.** Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications / S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev. — Philadelphia : Gordon and Breach Science Publ., 1993. — 976 p.
12. **Маричев, О. И.** Метод вычисления интегралов от специальных функций / О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1978. — 312 с.
13. **Джрбашян, М. М.** Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области / М. М. Джрбашян. — М. : Наука, 1996. — 672 с.
14. **Miller, K. S.** Fractional Green's functions / K. S. Miller, B. Ross // Indian Journal of Pure and Applied Mathematics. — 1991. — Vol. 22, no. 9. — P. 763–767.

*Поступила в редакцию 21.04.2018*

*После переработки 04.05.2018*

### Сведения об авторе

**Жуковская Наталья Владимировна**, преподаватель-стажёр кафедры дифференциальных уравнений, Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия; e-mail: nataliazhukouskaya@gmail.com.

## REPRESENTATION OF SOLUTIONS TO THE EULER TYPE DIFFERENTIAL EQUATION OF FRACTIONAL ORDER USING THE FRACTIONAL ANALOGUE OF THE GREEN'S FUNCTION

**N.V. Zhukovskaya**

*Belgorod State National Research University, Belgorod, Russia*  
*nataliazhukovskaya@gmail.com*

A solution to the nonhomogeneous Euler-type differential equation with Riemann – Liouville fractional derivatives on the half-axis  $(0; +\infty)$  in the class  $I_{0+}^{\alpha}(L_1(0; +\infty))$  of functions represented by the fractional integral of the order of  $\alpha$  with a density from  $L_1(0; +\infty)$  in terms of the fractional analogue of the Green's function is given by using the direct and inverse Mellin transforms. Fractional analogues of the Green's function are constructed in the case when all roots of the characteristic polynomial are different, and also in the case when there are multiple roots among the roots of the characteristic polynomial. Theorems of solvability of the nonhomogeneous fractional differential equations of Euler-type on the half-axis  $(0; +\infty)$  are formulated and proved. Special cases and examples are considered.

**Keywords:** *fractional Riemann – Liouville integral, Riemann – Liouville fractional derivative, direct and inverse Mellin transforms, fractional analogue of the Green's function.*

### References

1. **Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricemi F.G.** *Higher transcendental functions*. Vol. I. New York, McGraw-Hill, 1953. 215 p.
2. **Knyazev P.N.** *Integral'nye preobrazovaniya* [Integral transforms]. Minsk, Vysshaya Shkola Publ., 1969. 197 p. (In Russ.).
3. **Bateman H., Erdelyi A.** *Higher transcendental functions*. Vol. 1. New York, McGraw-Hill, 1973. 296 p.
4. **Ditkin V.A., Prudnikov A.P.** *Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnoye ischisleniye* [Integral transforms and operational calculus]. M., Nauka Publ., 1974. 544 p. (In Russ.).
5. **Debnath L., Bhatta D.** *Integral Transforms and Their Applications*. Boca Raton, Chapman & Hall, 2007. 700 p.
6. **Olver F.W.J., Lozier D.W., Boisvert R.F., Clark C.W.** *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge, Cambridge University Press, 2010. 968 p.
7. **Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V.** *Mittag-Leffler Functions: Related Topics and Applications*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2014. 443 p.
8. **Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J.** *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam, Boston, Heidelberg, Elsevier Science Publ., 2006. 541 p.
9. **Podlubny I.** *Fractional Differential Equations*. San Diego, Boston, Academic Press, 1999. 340 p.
10. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order and some their applications]. Minsk, Nauka i Tekhnika Publ., 1987. 688 p. (In Russ.).
11. **Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I.** *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Philadelphia, Gordon and Breach Science Publishers, 1993. 976 p.

12. **Marichev O.I.** *Metod vychisleniya integralov ot spetsial'nykh funktsiy* [Method for integrals of special functions calculating]. Minsk, Nauka i Technika Publ., 1978. 312 p. (In Russ.).
13. **Dzhrbashyan M.M.** *Integral'nye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti* [Integral transforms and representations of functions in a complex region]. M., Nauka Publ., 1996. 672 p. (In Russ.).
14. **Miller K.S., Ross B.** Fractional Green's functions. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1991, vol. 22, no. 9, pp. 763–767.

*Accepted article received 21.04.2018*

*Corrections received 04.05.2018*