

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

I. T. Alad'ev, A. N. Ganzhelo, F. M. Krantov,  
S. V. Teplov, Calculation and experimental-study  
of high-efficiency nozzles operating with a 2-phase  
medium,  
*TVT*, 1982, Volume 20, Issue 3, 522–528

<https://www.mathnet.ru/eng/tvt6376>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that  
you have read and agreed to these terms of use  
<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.170

May 22, 2025, 16:26:41



УДК 532.529

## РАСЧЕТ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СОПЛ С БОЛЬШИМИ К. П. Д., РАБОТАЮЩИХ НА ДВУХФАЗНОЙ СРЕДЕ

*Аладьев И. Т., Ганжело А. Н., Грантов Ф. М.,  
Теплов С. В.*

Как известно, решение задачи о построении контура сопла, оптимального по к.п.д., в одномерном приближении в общем случае состоит из участков краевого и двустороннего экстремума. В частном случае лишь один участок краевого экстремума может быть решением такой задачи. При удачном выборе варьируемой функции и ограничений на нее, используя лишь ее граничные значения, можно получить сопла с большими к.п.д. Рассмотрен случай, когда варьируемая функция  $u(z) = (1/p)(dp/dz)$  принимает свои граничные значения по всей длине сопла, при этом задача сводится к обычной обратной задаче сопла Лавалья. По-

казано, что при уменьшении  $\max_{z \in [0,1]} \left| \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} \right|$  и одновременном уве-

личении длины сопла увеличивается его к.п.д. По результатам численных расчетов спроектировано и изготовлено сопло Лавалья. Проведено исследование на специальном пароводяном стенде. Результаты эксперимента хорошо согласуются с расчетом.

1. Оптимизации сопел, работающих на двухфазной среде, посвящен ряд работ. Основными для этой тематики являются публикации [1–5]. В [1] получены необходимые условия существования сопла с максимальной тягой и семейство численных решений для случая однотемпературной двухскоростной среды, когда сила трения между фазами пропорциональна разности скоростей. В [3] рассмотрена аналогичная задача в линейной постановке. В [4, 5] в двумерной постановке получены необходимые условия существования сверхзвуковой части сопла, оптимального по тяге, в виде уравнений с частными производными. Конкретные решения этих уравнений не приводятся.

В отличие от перечисленных публикаций цель данной работы — показать и экспериментально подтвердить, что использование только одного участка краевого экстремума и увеличение длины сопла могут значительно повысить его к.п.д. Вариационная задача фактически не решается, так как используются граничные значения  $(1/p)(dp/dz)$ , а терминология вариационного исчисления используется лишь для того, чтобы показать, что данная задача является тривиальным случаем общей вариационной задачи. Использование  $(1/p)(dp/dz)$  в качестве варьируемой функции объясняется тем, что она входит линейно в исходную систему уравнений, а сами уравнения не имеют особенности в нормальной форме, если считать  $(1/p)(dp/dz)$  заданной. Результаты [1] получены для ряда конкретных параметров при сильных упрощающих систему уравнений допущениях, что помешало провести сравнение с данными нашего исследования.

В основу предлагаемой работы легла модель взаимопроникающего движения двух фаз [6]. Рассматриваемая среда представляет собой пар со взвешенными в нем каплями. Предполагается, что капли друг с другом не взаимодействуют и в данной точке пространства имеют одинаковый размер. Каждая из фаз принимается как континуум. Вязкостью в газовой фазе пренебрегаем. Взаимодействие между фазами учитывается за счет массообмена, теплообмена и обмена количеством движения. Этой модели в одномерном приближении соответствует следующая система обыкновенных дифференциальных уравнений в безразмерном виде

$$\frac{dx}{dz} = \frac{3(1-x)}{\rho_2^0 v_2 r_3^2} K_1^0,$$

$$\frac{dv_1}{dz} = -\frac{(\gamma-1)}{\gamma v_1} E_1 u + \frac{3}{r_3^2} \frac{(1-x)}{x} \frac{1}{\rho_2^0 v_2} K_1^0 (v_2 - v_1) -$$

$$-\frac{(1-x)}{x} F_1 - \frac{\xi}{2R} \frac{v_1}{2} \left[ 1 + \frac{(1-x)}{x} \frac{\rho_1^0 v_1}{\rho_2^0 v_2} \right],$$

$$\frac{dv_2}{dz} = -\frac{p}{\rho_2^0 v_2} u + F_1, \quad (1)$$

$$\frac{de_2}{dz} = -(h_{21} - h_2) \frac{3}{\rho_2^0 v_2 r_3^2} K_1^0 + \frac{Q_1}{\rho_2^0 v_2},$$

$$\frac{dp}{dz} = pu.$$

Здесь  $K_1^0$ ,  $F_1$ ,  $Q_1$  — соответственно испарение, трение и теплообмен между фазами. Для их определения используются общепринятые функциональные зависимости [7, 8]

$$K_1^0 = \frac{\gamma p}{(\gamma-1)} D \left( \frac{p_s}{pnE_2} - \frac{1}{E_1} \right) (1 + 0,3 \text{Re}^{1/2} \text{Sc}^{1/4}),$$

$$F_1 = \frac{3}{4} \frac{1}{\rho_2^0 v_2} \frac{(v_1 - v_2) \mu}{4r_3^2} (24 + 4,4\sqrt{\text{Re}} + 0,32 \text{Re}), \quad (2)$$

$$Q_1 = \frac{3a_1}{r_3^2} (E_1 - nE_2) (1 + 0,3 \text{Re}^{1/2} \text{Pr}^{1/4}).$$

Все величины, входящие в (1), (2), безразмерные. Используемые обозначения и индексы приведены в конце статьи.

Предполагается, что  $\rho_2^0$ ,  $r_4$ ,  $c_{v1}$ ,  $c_{p1}$ ,  $c_2$ ,  $D$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  — постоянные величины, а  $r_3$ ,  $\gamma$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $\xi$ ,  $R$ ,  $\rho_1^0$ ,  $h_{21}$ ,  $h_2$ ,  $p_s$ ,  $\text{Re}$ ,  $\text{Sc}$ ,  $\text{Pr}$ ,  $a_1$ , входящие в (1) и (2), выражаются через основные величины  $x$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $e_2$ ,  $p$  следующим образом:

$$\gamma = c_{p1}/c_{v1}, \quad n = c_{p1}/c_2, \quad m = c_{v1}/c_2,$$

$$E_1 = \frac{c_{p1} T_1^0}{p_+^0 / \rho_+^0}, \quad E_2 = \frac{c_2 T_2^0}{p_+^0 / \rho_+^0}, \quad E_{2+} = \frac{c_2 T_+^0}{p_+^0 / \rho_+^0},$$

$$E_2 = e_2 + E_{2+}, \quad p_s = \exp \left[ \frac{r_4}{m(\gamma-1)} \left( \frac{1}{E_{2+}} - \frac{1}{E_2} \right) \right] \quad (3)$$

$$E_1 = h_1 + E_{2+} - p/\rho_2^0 - r_4 + E_3, \quad E_3 = (n-1) \left/ \left[ \frac{1}{E_{2+}} - \frac{(\gamma-1)m}{r_4} \ln p \right] \right.$$

$$h_1 = \frac{1}{x} \left[ \frac{A}{G} - x \frac{v_1^2}{2} - (1-x) \left( e_2 + \frac{p}{\rho_2^0} + \frac{v_2^2}{2} \right) \right], \quad A, G \sim \text{const},$$

$$\rho_1^0 = \frac{\gamma p}{(\gamma-1)E_1}, \quad R = \sqrt{\frac{G}{\pi}} \left[ \frac{x}{\rho_1^0 v_1} + \frac{(1-x)}{\rho_2^0 v_2} \right]^{1/2},$$

$$r_3 = r_{3+} [(1-x)/(1-x_+)]^{1/2},$$

$$n_2 = e_2 + p/\rho_2^{\circ}, \quad n_{21} = r_4 + p/\rho_2^{\circ} - E_3 + ne_2 + (n-1)E_{2+},$$

$$\xi = y^2, \quad y = \varepsilon [x_{10}(\varepsilon) + \varepsilon x_1(\varepsilon) + \varepsilon^2 x_2(\varepsilon) + \varepsilon^3 x_3(\varepsilon)],$$

$$x_{10}(\varepsilon) = \frac{1}{1 + 2\varepsilon \ln \varepsilon / \ln 10}, \quad \varepsilon = \frac{1}{2 \lg \text{Re}_3}, \quad \text{Re}_3 = \frac{\rho_1^{\circ} v_1 2R}{\mu}, \quad (4)$$

$$x_1(\varepsilon) = 2x_{10}^2(0,4 - \lg x_{10}),$$

$$x_2(\varepsilon) = 4x_{10}^3(0,4 - \lg x_{10})(0,4 - \lg x_{10} - 1/\ln 10),$$

$$x_3(\varepsilon) = -\frac{x_1^3}{x_{10}^2} + \frac{2x_1 x_2}{x_{10}} - \frac{2}{\ln 10} \left( x_2 x_{10} - \frac{1}{2} x_1^2 \right),$$

$$D = \frac{D^{\circ}}{R_{1+}^{\circ} \sqrt{p_{+}^{\circ} / \rho_{+}^{\circ}}}, \quad \text{Sc} = \frac{\nu^{\circ}}{D^{\circ}}, \quad a_1 = \frac{\lambda^{\circ}}{R_{1+}^{\circ} \sqrt{\rho_{+}^{\circ} p_{+}^{\circ} c_{p1}^{\circ}}}, \quad (5)$$

$$\text{Pr} = \frac{\mu^{\circ} c_{p1}^{\circ}}{\lambda^{\circ}}, \quad \text{Re} = \frac{\rho_1^{\circ} (v_1 - v_2) 2r_3}{\mu}, \quad \mu = \frac{\mu^{\circ}}{\sqrt{\rho_{+}^{\circ} p_{+}^{\circ} R_{1+}^{\circ}}}.$$

Формулы (4) используются для определения коэффициента сопротивления трения о стенки сопла  $\xi$  и являются асимптотическим решением уравнения Никурадзе

$$1/\sqrt{\xi} = -0,8 + 2 \lg \text{Re}_3 + \lg \xi.$$

При учете трения о стенки сопла не учитывается влияние взаимодействия капель с жидкой пленкой. Считается, что на входе в сопло заданы все параметры двухфазной среды, находящейся в состоянии насыщения. Задано также давление на срезе сопла  $p_-$ . Используя любую функцию  $u(z)$ , такую, что

$$\int_0^l u(z) dz = \int_0^l \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} dz = \ln \left( \frac{p_-}{p_+} \right), \quad (6)$$

можно получить решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с неизвестными функциями  $x$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $e_2$ ,  $p$ . Но так как представляют интерес функции  $u(z)$ , которым соответствуют большие значения к.п.д., определяемого по формуле

$$\eta = \frac{x(l)(v_1(l))^2 + [1 - x(l)](v_2(l))^2}{(v_1(l))^2} 100\%, \quad (7)$$

необходимо обосновать выбор  $u(z)$ . Для этого формулируется вариационная задача: среди всех кусочно-непрерывных функций  $u(z)$ , удовлетворяющих условию (6) и ограничениям

$$u_1(z) \leq u(z) \leq 0, \quad (8)$$

найти такую, которой соответствует максимальный к.п.д. В общем случае решение состоит из участков краевого и двустороннего экстремума [1, 2].

Но если длина сопла такова, что  $\int_0^l u_1(z) dz = \ln \left( \frac{p_-}{p_+} \right)$ , то решение вариационной задачи будет состоять из одного участка краевого экстремума

$u(z) = u_1(z)$ .

Отсюда видно, что приведенная выше вариационная задача существенно зависит от длины  $l$  и нижней границы  $(u(z)) - (u_1(z))$ . Если удачно задана  $u_1(z)$ , то решение системы (1) с  $u(z) = u_1(z)$ , когда  $l$  удовлетворяет (6), будет иметь большое значение к.п.д. Таким образом,  $u(z) = u_1(z)$  соответствует частному случаю решения вариационной задачи. При рассмотрении такого семейства сопел замечено, что при уменьшении  $|u_1(z)|$

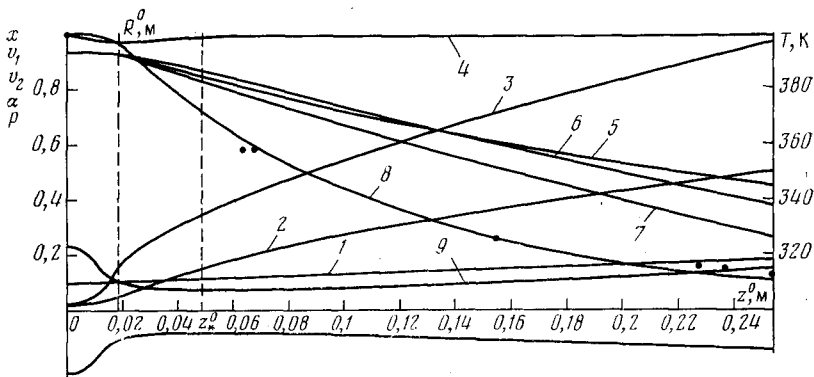


Рис. 1. Изменение параметра двухфазного потока по длине рассчитанного сопла Лавали: 1 -  $x$ ; 2 -  $v_2$ ; 3 -  $v_1$ ; 4 -  $\alpha$ ; 5-7 - температура капель, пара, насыщения при текущем давлении соответственно; 8 -  $p$

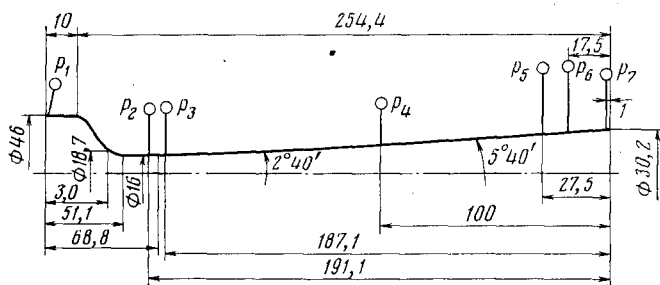


Рис. 2. Геометрия экспериментально исследуемого сопла (все размеры в мм)

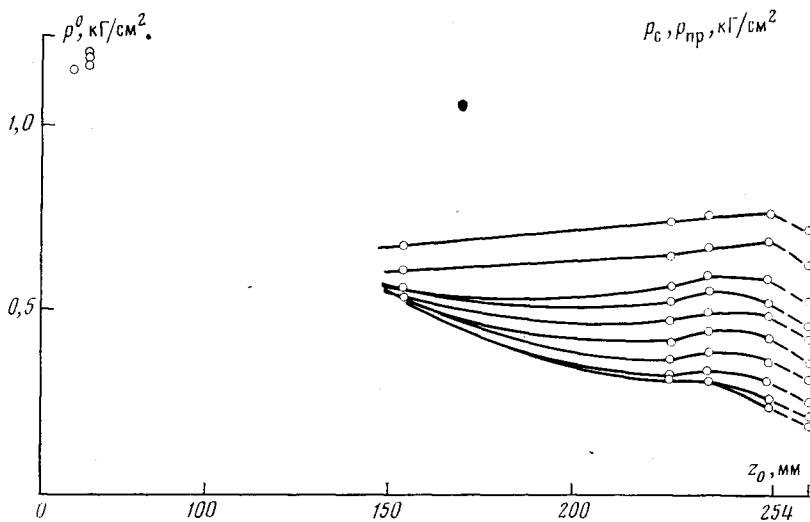


Рис. 3. Распределение статического давления по длине сопла (эксперимент)

увеличивается к.п.д. сопла. Если не учитывать трение о стенки сопла, то расчетное значение к.п.д. будет стремиться к 100%, но при этом длина сопла стремится к бесконечности. Все же можно использовать сопла довольно большой длины, при этом  $\max [u_1(z)]$  имеет малую величину. За  $z \in [0, l]$

давая  $u_1(z)$  в виде непрерывной, монотонно убывающей функции с малым значением  $du_1(z)/dz$ , получим сопло с большим к.п.д., для которого на

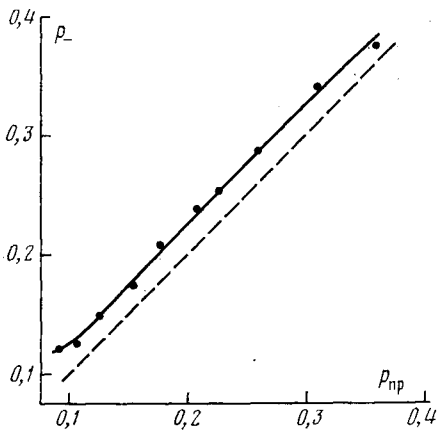


Рис. 4. Изменение давления на срезе в зависимости от противодавления (эксперимент)

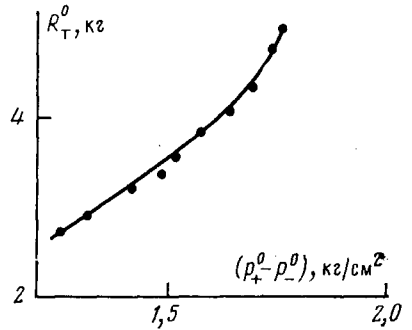


Рис. 5. Изменение тяги в зависимости от перепада давлений (эксперимент)

участке  $[0, l]$ , где  $l$  удовлетворяет (6), будет выполняться принцип максимума Понтрягина [2].

Система уравнений (1) численно интегрировалась при следующих значениях входных параметров и давления на срезе сопла:

$$x_+ = 0,1, \quad p_+^0 = 196\,133 \text{ Н/м}^2, \quad p_-^0 = 19613,3 \text{ Н/м}^2, \\ G^0 = 0,2 \text{ кг/с}, \quad F_+^0 = 1663 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2, \quad r_3^0 = 20,5 \text{ мкм}.$$

Расчеты проводились при следующих функциях  $u(z)$ :

$$u(z) = -0,6622118; \quad u(z) = -0,25; \quad u(z) = -0,1; \\ u(z) = \begin{cases} -0,00001 - 0,2z^4 \exp(z) & \text{при } 0 \leq z \leq 0,834507 \\ -0,223455 & \text{при } 0,834507 < z \leq 11,021. \end{cases} \quad (9)$$

Целью расчетов являлась демонстрация факта, что с уменьшением  $\max |u(z)|$  увеличивается кинетическая энергия двухфазной среды на срезе сопла,  $E_4 = x(l)v_1(l)^2 + [1-x(l)]v_2(l)^2$ , или, что то же, к.п.д. Это наглядно демонстрируется в табл. 1.

Таблица 1

$u(z)$	$l$	$E_4$	$\eta, \%$
-0,6622118	3,493	0,330502	58,59
-0,25	9,212	0,373721	66,26
-0,00001 - 0,2z <sup>4</sup> exp(z) 0 ≤ z ≤ 0,834507	11,021	0,381806	67,69
-0,223455 0,834507 < z ≤ 11,021	23,047	0,424261	75,22

Экспериментально исследовалось сопло, описываемое формулой (9). Значения функции  $|u(z)|$  плавно изменялись на начальном участке от очень малой величины до значения, которое оставалось неизменным до среза сопла. Первой части  $u(z)$  в (9) соответствует плавный входной участок сопла. На рис. 1 представлены кривые, характеризующие такое сопло. Кривая 8 соответствует геометрическому профилю сопла. Из рисунка видно, что, несмотря на малый градиент давления в сопле, имеется довольно существенное скольжение фаз. Кривые 1 и 4 показывают, что хотя объемная концентрация пара по абсолютной величине изменяется очень мало, степень сухости  $x$  и производная  $dx/dz$  изменяются существенно.

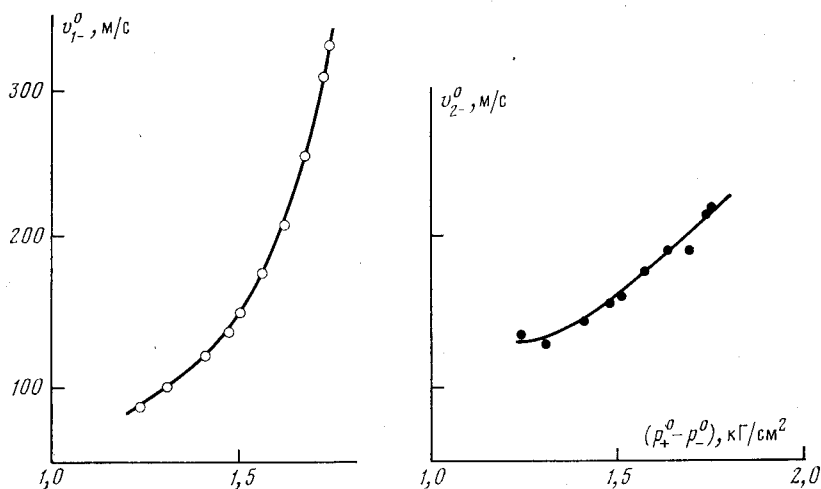


Рис. 6. Изменение скоростей фаз на срезе сопла в зависимости от перепада давлений (эксперимент)

венно по длине сопла. Поэтому в подобных задачах всегда нужно учитывать объем, занимаемый каплями. Пренебрежение этой малой величиной приводит к неверному определению  $x$ . Из рассмотрения кривых 5–7 следует, что жидкие капли и пар перегреты по всей длине сопла.

В расчетах использовались размеры капель, полученные при обработке экспериментов, проводимых при таких же входных и выходных параметрах двухфазного потока, как и в данном случае. По геометрическому профилю, представленному на рис. 1, изготовлено сопло. Входной участок близок к приведенному на рис. 1, а главным изменяющаяся конфузорная часть заменена двумя срезанными конусами. Геометрический профиль изготовленного сопла представлен на рис. 2.

Экспериментальное исследование проведено на пароводяном стенде. Схема стенда и методика проведения опытов представлена в [9]. При постоянных параметрах двухфазной смеси на входе в сопло ( $p_+ = 1,99$  ата,  $x_+ = 0,1$ ) варьировалось противодавление. Распределение статического давления по длине сопла (рис. 3) и поведение давления на срезе (рис. 4) показывают возникновение возмущения в сопле с ростом  $p_{пр}$ , что приводит к снижению тяги (рис. 5). Расход смеси через сопло в диапазоне изменения  $p_{пр}$  оставался постоянным.

Массовое расходное и истинное объемное паросодержание смеси на срезе сопла, а также скорости фаз определялись в предположении термодинамического равновесия фаз по методике [10]. Снижение скоростей фаз при распространении возмущения в расширяющийся участок сопла (рис. 6) особенно интенсивно для паровой фазы. При определенных значениях  $p_{пр}$  и  $p_-$  скольжение фаз оказывается меньше единицы. Зависимость к.п.д. сопла от изменения противодавления представлена на рис. 7.

Экспериментальные данные, соответствующие заданной величине  $p_-$ , нанесены в виде точек на кривую 8, соответствующую расчетному безразмерному профилю давления (рис. 1). Видно, что расчет хорошо согласуется с экспериментом.

В табл. 2 приведены данные для среза сопла, соответствующие расчету и эксперименту. Расчет хорошо согласуется с экспериментом по значениям  $x_-$ ,  $v_{2-}$ ,  $\alpha_-$ . Скорости паровой фазы в расчете и эксперименте отличаются на 23%. Это объясняется, с одной стороны, одномерностью моде-

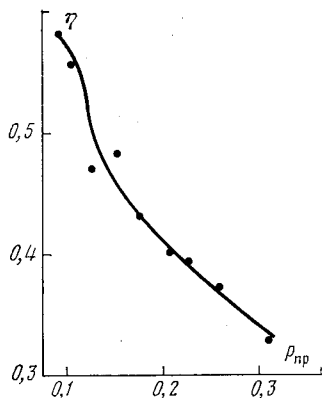


Рис. 7. Зависимость к.п.д. сопла от перепада давлений (эксперимент)

Параметры	Расчет	Эксперимент	Параметры	Расчет	Эксперимент
$\eta$ , %	67,69	58,22	$v_2^0$ , м/с	222	220,7
$x$	0,1803	0,1839	$\alpha$	0,99891	0,999
$v_1^0$ , м/с	428	328,45	$G^0$ , кг/с	0,2	0,191

ли, с другой стороны, несовершенством методики обработки экспериментальных данных. Сюда следует отнести и расхождения за счет отклонения геометрии исследуемого сопла от расчетного профиля и неточного определения входного размера капель. Изложенное выше позволяет отметить приемлемость предложенного метода расчета сопел, в которых истечение двухфазных сред проходит с высокой эффективностью.

**Обозначения:**  $x$  — отношение расхода пара к расходу двухфазной смеси;  $v_i$  — скорость  $i$ -й фазы;  $p$  — давление;  $\rho_i^0$  — истинная плотность  $i$ -й фазы;  $h_i$  — энтальпия  $i$ -й фазы;  $e_i$  — внутренняя энергия  $i$ -й фазы;  $r_3$  — радиус капли;  $l$  — длина сопла;  $R$  — текущий радиус поперечного сечения сопла;  $c_{v1}$  — удельная теплоемкость пара при постоянном объеме;  $c_{p1}$  — удельная теплоемкость пара при постоянном давлении;  $c_2$  — удельная теплоемкость воды;  $\xi$  — коэффициент гидравлического сопротивления;  $\eta$  — к.п.д. сопла;  $z$  — продольная координата сопла;  $F$  — площадь поперечного сечения сопла;  $G$  — расход двухфазной среды;  $Re$  — число Рейнольдса;  $Sc$  — диффузионное число Шмидта;  $Pr$  — число Прандтля;  $\alpha$  — объемная концентрация пара;  $D$  — коэффициент диффузии пара;  $p_{пр}$  — противодавление;  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости пара;  $\mu$  — динамический коэффициент вязкости пара;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности пара;  $g_v$  — теплота испарения воды;  $R_{1+}^0$  — радиус входного сечения сопла;  $v_i$  — скорость двухфазной смеси при равновесном течении;  $T_i$  — температура  $i$ -й фазы;  $v_c = v_1/v_2$  — скольжение фаз;  $R_T$  — тяга сопла;  $\rho_+^0$ ,  $p_+^0$ ,  $T_+^0$  — соответственно плотность, давление, температура паровой фазы на линии насыщения.

Масштабные коэффициенты для получения безразмерных величин:  $p_+^0$  — масштаб давления;  $\sqrt{p_+^0/\rho_+^0}$  — масштаб скорости;  $p_+^0/\rho_+^0$  — масштаб энтальпии, внутренней энергии;  $R_{1+}^0$  — линейный масштаб;  $R_{1+}^0 \sqrt{\rho_+^0/p_+^0}$  — масштаб времени. Индексы: верхний  $^0$  — размерная величина; нижние индексы:  $S$  — параметры на линии насыщения;  $1$  — параметры паровой фазы;  $2$  — параметры взвешенной фазы;  $*$  — параметры в горловине сопла;  $+$  — параметры на входе в сопло;  $-$  — параметры на срезе сопла.

Энергетический институт  
им. Г. М. Кржижановского

Поступила в редакцию  
23.II.1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Старков В. К., Стернин Л. Е. Решение в одномерном приближении вариационной задачи о построении сопла максимальной тяги при течении газа с инородными частицами. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 4, с. 52.
2. Понтрагин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
3. Стернин Л. Е. Экстремальные контуры сопел для потоков газа с отставанием частиц. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5, с. 14.
4. Хоффман, Томпсон. Обобщенный метод определения оптимального контура сопла в случае двухфазных потоков. — Вопросы ракетной техники, 1967, № 3, с. 46.
5. Крайко А. Н., Осипов А. А. К решению вариационных задач сверхзвуковых течений газа с инородными частицами. — ПММ, 1968, т. 32, № 4, с. 596.
6. Нигматуллин Р. И. Методы механики сплошной среды для описания многофазных смесей. — ПММ, 1970, т. 34, № 6, с. 1097.
7. Стернин Л. Е. Основы газодинамики двухфазных течений в соплах. М.: Машиностроение, 1975.
8. Циклаури Г. В., Данилин В. С., Селезнев Л. И. Адиабатные двухфазные течения. М.: Атомиздат, 1973.
9. Джамарджашвили В. А., Теплов С. В. Методика экспериментального исследования расходных характеристик двухфазных сопел. Исследования по механике и теплообмену двухфазных сред. — Сб. трудов ЭНИНа им. Г. М. Кржижановского, 1974, т. 25, с. 128.
10. Аладьев И. Т., Теплов С. В. Метод исследования истинных скоростей фаз при массообмене. Двухфазные потоки и вопросы теплообмена. — Сб. трудов ЭНИНа им. Г. М. Кржижановского, 1970, с. 11.