

УДК 513.573

В. Н. Колокольцов

НОВЫЕ ПРИМЕРЫ МНОГООБРАЗИЙ С ЗАМКНУТЫМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИМИ

Среди двумерных ориентируемых многообразий только сфера S^2 допускает структуру P -многообразия, то есть риманова многообразия, у которого все геодезические замкнуты. Построенные в начале века примеры P -многообразий являются поверхностями вращения, то есть их геодезический поток имеет линейный по скоростям интеграл (конструкция Дарбу, Цолля, Теннери), либо «склеиваются» из кусков поверхностей вращения [1, 2]. В этой заметке строится зависящее от функционального параметра семейство P -метрик на S^2 , геодезический поток которых допускает дополнительный квадратичный по скорости интеграл.

Вся конструкция базируется на результатах работы [3], в которой описаны обладающие дополнительным квадратичным интегралом геодезические потоки на сфере. Соответствующие метрики задаются парой гладких периодических неотрицательных функций f, h с периодами $2a$ и $2b$, которые обращаются в нуль лишь в узлах решетки полупериодов $u=ka, v=kb$ (k — любое целое), где они имеют квадратичное стремление к нулю (для любых целых k_1 и k_2

$$f'(k_1a) = h'(k_2b) = 0, \quad f''(k_1a) = h''(k_2b) > 0,$$

и симметричны относительно точек $u=a, v=b$. В некоторых специальных координатах, заданных на сфере с разрезами по отрезкам геодезических, соединяющим четыре точки округления, в которых квадратичная форма, задающая дополнительный интеграл, обращается в нуль, или на ее «бесконечной развертке», метрика имеет лиувиллев вид:

$$ds^2 = (f(u) + h(v)) (du^2 + dv^2).$$

Путем несложного рассуждения можно доказать неэквивалентность этих метрик между собой. Из приведенной в [3] формулы, выражающей ds^2 в изотермических координатах, заданных на сфере без одной точки, нетрудно получить, что эти метрики имеют гладкость класса C^m тогда и только тогда, когда для любых целых k_1 и k_2 выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} f^{(2n+1)}(k_1a) &= h^{(2n+1)}(k_2b), & 2n+1 &\leq m+2, \\ f^{(4n+2)}(k_1a) &= h^{(4n+2)}(k_2b), & 4n+2 &\leq m+2, \\ f^{(4n)}(k_1a) &= -h^{(4n)}(k_2b), & 4n &\leq m+2. \end{aligned} \quad (1)$$

Поведение геодезических во многом аналогично их поведению на стандартном трехосном эллипсоиде. Качественное описание легко проводится после явного интегрирования уравнения движения методом разделения переменных.

Теорема. Пусть задана риманова метрика на сфере, такая, что геодезический поток имеет дополнительный квадратичный по скоростям интеграл. Тогда эквивалентны следующие условия: 1) все геодезические замкнуты; 2) соответствующее риманово многообразие является SC -многообразием, то есть все геодезические являются простыми замкнутыми кривыми одинаковой длины; 3) функции f, h , задающие метрику, удовлетворяют условиям:

а) пусть $f_0 = f(u_0) = \max f$, $h_0 = h(v_0) = \max h$; тогда f строго монотонна на интервалах $(0, u_0)$ и (u_0, a) , а h — на интервалах $(0, v_0)$ и (v_0, b) ; в этом случае для каждого $c \in (0, f_0)$ существует ровно два значения $u_1, u_2 \in (0, a)$, таких, что $f(u_i) = c$; аналогичное верно для $h(v)$;

б) f и h удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\int_{v_1(c)}^{v_2(c)} \frac{dx}{\sqrt{h(x) - c}} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{f(x) + c}}, \quad c \in (0, h_0), \quad (2)$$

$$\int_{u_1(c)}^{u_2(c)} \frac{dx}{\sqrt{f(x) - c}} = \int_0^b \frac{dx}{\sqrt{h(x) + c}}, \quad c \in (0, f_0).$$

Набросок доказательства. Условие 3а) необходимо, так как иначе возникают расходящиеся интегралы в уравнениях движения и геодезические, наматывающиеся на циклы. Уравнения (2) получаются из условия пропорциональности частот, возникающих после введения переменных действие — угол, причем пропорциональность частот влечет их совпадение, что, в свою очередь, следует из рассмотрения геодезических, проходящих через точки округления. Равенство длин без труда выводится из уравнения (2).

Займемся теперь системой (2). Пусть α_1 и α_2 — функции, обратные f на участках $[0, u_0]$ и $[u_0, a]$, а β_1 и β_2 — функции, обратные h на участках $[0, v_0]$ и $[v_0, b]$; $\varphi = \alpha_1' - \alpha_2'$, $\psi = \beta_1' - \beta_2'$. Выполнив замену переменных в интегралах, приведем систему (2) к виду

$$\int_c^{h_0} \frac{\psi(y) dy}{\sqrt{y - c}} = \int_0^{f_0} \frac{\varphi(y) dy}{\sqrt{y + c}}, \quad c \in (0, h_0), \quad (3)$$

$$\int_c^{f_0} \frac{\varphi(y) dy}{\sqrt{y - c}} = \int_0^{h_0} \frac{\psi(y) dy}{\sqrt{y + c}}, \quad c \in (0, f_0).$$

Решим систему (3) при дополнительном предположении: $f_0 = h_0 = 1$ и $\varphi = \psi$. Нас интересуют лишь те решения, с помощью которых получаем непрерывную метрику на сфере, то есть выполняются указанные выше условия на f и h . Вытекающие отсюда требования на φ учитываем в дальнейших преобразованиях. Обозначим левую часть первого уравнения из (3) через ρ . Используя явную формулу для решения уравнения Абеля, выразим φ через ρ . Проведя подстановку, получим следующее уравнение на функцию $\mu(x) = \frac{\rho(x)}{\sqrt{x}}$:

$$\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu(y) dy}{x + y}. \quad (4)$$

При этом условия на f и h требуют положительности ρ и выполнения асимптотического условия на поведение в нуле:

$$\rho(x) \sim \rho \ln x \quad \text{при } x \rightarrow 0; \quad \rho < 0.$$

Из результатов [4, 5] можно вывести, что сингулярное интегральное уравнение (4) имеет единственное решение, которое дается фор-

мулой

$$\mu(x) = \frac{1}{x} P - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right),$$

где $P_{-\frac{1}{2}}(y)$ — функция Лежандра первого рода. Использование теории специальных функций позволяет проверить положительность μ и выполнение условия на асимптотику. Отсюда получаем явное интегральное представление для функции $\varphi = \psi$ и, следовательно, выражение для функций, обратных f и h , которое зависит от произвольной функции одного переменного.

Как нетрудно проверить, условия (1) при $m > 0$ не выполняются для полученных функций f и h , и поэтому соответствующие метрики в четырех точках округления лишь непрерывны.

Представляется интересным перенесение изложенной конструкции на многомерный случай. По-видимому, можно пошевелить метрику n -мерного эллипсоида в классе штеккелевых систем, превратив его в многообразии с замкнутыми геодезическими.

В заключение приношу благодарность научному руководителю А. М. Степину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М., 1981.
2. Бляшке В. Дифференциальная геометрия. М., 1935.
3. Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям интегралом. — Изв. АН СССР, 1982, 46, № 5, 994—1010.
4. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на прямой с ядром, зависящим от разности аргументов. — Успехи матем. наук, 1958, 13, вып. 5, 3—120.
5. Widom H. Hankel matrices. — Trans. Amer. Math. Soc., 1966, 121, N 1, 1—35.

Поступила в редакцию
16.05.83

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. I. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА, 1984, № 4

УДК 517.938:531.381

А. С. Логачев

НЕВЫРОЖДЕННОСТЬ УСЛОВНО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА В СЛУЧАЕ КОВАЛЕВСКОЙ

Уравнения движения твердого тела с закрепленной точкой в случае Ковалевской имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} 2\dot{p} &= qr, & \dot{\gamma}_1 &= r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ 2\dot{q} &= -pr - \mu\gamma_3, & \dot{\gamma}_2 &= p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dot{r} &= \mu\gamma_2, & \dot{\gamma}_3 &= q\gamma_1 - p\gamma_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Система уравнений (1) допускает следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} H &= (p^2 + q^2 + r^2) - \mu\gamma_1, & L &= p\gamma_1 + q\gamma_2 + r\gamma_3/2, \\ K &= (p^2 - q^2 + \mu\gamma_1)^2 + (2pq + \mu\gamma_2)^2, & L_1 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2, & L_1 &\equiv 1. \end{aligned}$$

При фиксированных значениях интеграла «площадей» $L=l$ и «геомет-