Д. А. Каждан, Построение Г-рациональных групп для некоторых дискретных подгрупп Г группы $SL(2,\mathbb{R})$,
Функц. анализ и его прил., 1968, том 2, выпуск 1, 36–39

Функциональный анализ и его приложения,
т. 2, вып. 1, 1968, 36—39.

ПОСТРОЕНИЕ Г-РАЦИОНАЛЬНЫХ ГРУПП ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ПОДГРУПП Г ГРУППЫ SL $(2,R)$

Д. А. Каждан

Напомним определение Г-рациональной группы. Пусть имеется группа N и ее подгруппа Γ; Г-рациональной группой $\overline{\Gamma}$ называется подгруппа N, состоящая из таких элементов n, что подгруппа $\Gamma \cap n\Gamma n^{-1}$ имеет конечный индекс в Γ и в $n\Gamma n^{-1}$. Легко видеть, что такие элементы n образуют группу. Обычно интересен случай, когда N — полупростая вещественная группа, а Γ — ее дискретная подгруппа такая, что факторпространство N/Γ имеет конечный объем (см. [1]). Г-рациональную группу легко найти в случае, когда Γ — арифметическая группа, т. е. в случае, когда $N = G_R$ — группа вещественных точек алгебраической группы G, определенной над Q, а Γ соизмерима с G_Z. Очевидно, что в этом случае $\overline{\Gamma} \supset G_Q$; если же центр группы G тривиален, то $\overline{\Gamma} = G_Q$ (см. [1]). Таким образом, мы видим, что для арифметических групп Γ их Г-рациональные группы $\overline{\Gamma}$ плотны в N. В работе [1] была высказана гипотеза, что верна обратная теорема, т. е. если Γ— дискретная подгруппа в полупростой группе N такая, что объем факторпространства N/Γ конечен и группа $\overline{\Gamma}$ всюда плотна в N, то Γ — арифметическая подгруппа. Эта гипотеза будет проверена для некоторого класса дискретных подгрупп Γ в SL$(2,R)$, содержащего, например, группы Гекке. Точнее, будет доказана

Теорема. *Пусть* Γ — *дискретная подгруппа в* SL$(2,R)$ *такая, что* а) *факторпространство* SL$(2,R)/\Gamma$ *имеет конечный объем, но не компактно*; б) *группа* Γ *состоит из матриц, элементы которых являются целыми алгебраическими числами. Тогда группа* $\overline{\Gamma}$ *или дискретна, или сопряжена подгруппе в* SL$(2,Z)$.

В дальнейшем мы будем всегда предполагать, что все унипотентные элементы в Γ сопряжены в Γ элементам $\pm\gamma_0^n$, где $n \in Z$, а γ_0—элемент в Γ вида $\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Это предположение позволяет несколько упростить доказательство, но не является существенным.

Напомним несколько свойств группы Γ, вытекающих из свойств а) и б). Из свойства а) следует, что Γ содержит унипотентные элементы, при этом в Γ существует лишь конечное число различных классов сопряженных относительно Γ примитивных элементов (т. е. *элементов, не являющихся степенями другого элемента из* Γ). Кроме того, из свойства а) следует, что Γ имеет конечное число образующих, и потому из б) следует, что элементы всех матриц из Γ лежат в числовом поле k, являющемся *конечным расширением над* Q. Из а) также следует, что поле k можно считать порожденным над Q следами матриц из Γ.

Основная (по занимаемому месту) часть доказательства — построение канонической системы представителей для элементов $\Gamma\setminus\overline{\Gamma}$ состоит из нескольких шагов.

Шаг I. Группа $\bar{\Gamma}$ состоит из матриц, коэффициенты которых — алгебраические числа. Точнее, образ любого элемента $\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}$ в группе $\mathrm{PL}(2, R)$ является точкой, определенной над k. (Группа $\mathrm{PL}(2, R)$ рассматривается как группа вещественных точек алгебраической группы, определенной над Q, такой, что проекция $\varphi : \mathrm{SL}(2, \ ) \to \mathrm{PL}(2, \ )$ определена над Q.)

Это утверждение сразу следует из того, что группа Γ является всюду плотным в топологии Зарисского подмножеством в $\mathrm{SL}(2, R)$, и из того, что $\mathrm{PL}(2, \ )$ является группой автоморфизмов группы $\mathrm{SL}(2, \ )$.

Шаг II. Для любого элемента $\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}$ существует $\gamma \in \Gamma$ такой, что $\gamma\bar{\gamma}$ имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, где a^2 — рациональное число. Для доказательства этого утверждения рассмотрим элементы $\bar{\gamma}\gamma_0^n\bar{\gamma}^{-1}$. Из того, что $\bar{\gamma} \in \bar{\Gamma}$, следует, что найдется $n \in Z$, $n \neq 0$, такое, что $\bar{\gamma}\gamma_0^n\bar{\gamma}^{-1} \in \Gamma$. Поэтому найдется элемент $\gamma \in \Gamma$ такой, что $\gamma\bar{\gamma}\gamma_0^n\bar{\gamma}^{-1}\gamma^{-1} = \gamma_0^m$. Отсюда сразу следует, что $\gamma\bar{\gamma}$ имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, где $a^2 = m/n$.

Шаг III. Рассмотрим в $\bar{\Gamma}$ подгруппу $\bar{\Gamma}_0$, состоящую из матриц с целыми алгебраическими коэффициентами. Мы сейчас докажем, что $\bar{\Gamma}_0$ является, как и Γ, дискретной подгруппой в $\mathrm{SL}(2, R)$. Мы будем доказывать, что $\bar{\Gamma}_0$ не всюду плотна в $\mathrm{SL}(2, R)$, так как очевидно, что любая подгруппа в $\mathrm{SL}(2, R)$, содержащая Γ, или дискретна, или всюду плотна.

Рассмотрим какой-нибудь элемент $\bar{\gamma}_0 \in \bar{\Gamma}_0$. Мы показали, что найдется такой элемент $\gamma \in \Gamma$, что $\gamma\bar{\gamma}_0$ имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, где $a^2 = m/n$. Так как $\gamma\bar{\gamma}_0 \in \bar{\Gamma}_0$, то и a и a^{-1} — это целые алгебраические числа, поэтому $a = \pm 1$ и можно, умножая на $-e$, добиться того, чтобы a было равно $+1$. Итак, мы получили, что для любого элемента $\bar{\gamma}_0 \in \bar{\Gamma}_0$ найдется элемент $\gamma \in \Gamma$ такой, что $\gamma\bar{\gamma}_0$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Теперь дискретность группы $\bar{\Gamma}_0$ следует из такой леммы.

Лемма. *Пусть заданы две подгруппы* $\Gamma \subset \Gamma'$ *в группе* $\mathrm{SL}(2, R)$ *такие, что*: а) Γ — *дискретная подгруппа в* $\mathrm{SL}(2, R)$, *содержащая элемент вида* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) *для любого элемента* $\gamma' \in \Gamma'$ *найдется элемент* $\gamma \in \Gamma$ *такой, что* $\gamma\gamma'$ *имеет вид* $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Тогда подгруппа* Γ' *не всюду плотна.*

Доказательство. Рассмотрим действие группы $\mathrm{SL}(2, R)$ на двумерной аффинной плоскости. Из а) следует, что орбита точки $(1, 0)$ под действием группы Γ дискретна, а из б) следует, что орбита точки $(1, 0)$ под действием группы Γ' совпадает с орбитой под действием группы Γ и потому тоже дискретна. Лемма доказана.

Итак, мы доказали, что группа $\bar{\Gamma}_0$ дискретна. Группа Γ лежит в $\bar{\Gamma}_0$ и является в ней подгруппой конечного индекса. Из этого сразу следует, что все условия, наложенные на группу Γ, выполнены и для группы $\bar{\Gamma}_0$. Поэтому мы в дальнейшем будем считать, что $\bar{\Gamma}_0 = \Gamma$.

Шаг IV. Рассмотрим для каждого простого числа p подгруппу $\bar{\Gamma}_p$ в $\bar{\Gamma}$, состоящую из матриц, коэффициенты которых имеют вид α/p^{κ}, где α — целое алгебраическое число, а $\kappa \in Z$. Докажем теперь, что если $\bar{\Gamma}$ не является дискретной подгруппой в $\mathrm{SL}(2, R)$, то найдется такое простое число p, что и подгруппа $\bar{\Gamma}_p$ не является дискретной подгруппой.

Мы знаем, что для любого элемента $\overline{\gamma} \in \overline{\Gamma}$ найдется элемент $\gamma \in \Gamma$ такой, что $\gamma\overline{\gamma}$ имеет вид $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, где $a^2 = m/n$—рациональное число. Из леммы следует, что если группа $\overline{\Gamma}$ не дискретна, то найдется элемент $\overline{\gamma}_0 \in \overline{\Gamma}$, имеющий вид $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, где $a^2 = m/n$, m и n взаимно просты и $n \neq \pm 1$. Рассмотрим простое число p такое, что $n = n'p^{\varkappa}$, где $n' \in Z$, а $\varkappa \neq 0$. Тогда очевидно, что элементы $\overline{\gamma}_0^s \gamma^{n's} \overline{\gamma}_0^{-s}$ лежат в $\overline{\Gamma}_p$ при всех натуральных s. Итак, достаточно доказать, что если Γ не является подгруппой в $\mathrm{SL}(2, Z)$, то группа $\overline{\Gamma}_p$ дискретна при всех p.

Шаг V. Построим теперь систему представителей для элементов $\Gamma \diagdown \overline{\Gamma}_p$. Каждый элемент $\overline{\gamma}_p \in \overline{\Gamma}_p$ может быть приведен с помощью умножения слева на элемент $\gamma \in \Gamma$ к виду $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, где $a^2 = p^{\varkappa}$. Зафиксируем какой-нибудь элемент $\gamma_p \in \overline{\Gamma}_p$ вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, для которого число $\varkappa$ минимально. Любой элемент $\overline{\gamma}_p \in \overline{\Gamma}_p$ можно представить в виде произведения $\overline{\gamma}_p = \gamma\overline{u}\gamma_p^n$, где $\gamma \in \Gamma$, $n \in Z$, а $\overline{u}$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Докажем теперь, что $u = lx_0/p^{\varkappa}$, где x_0 — такое число, что матрица $\begin{pmatrix} 1 & x_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является примитивным унипотентным элементом в Γ. Действительно, так как $\overline{u} \in \overline{\Gamma}_p$, то $u = \alpha/p^{\varkappa}$, где α — целое алгебраическое число. Но отсюда следует, что $\overline{u}^{p^{\varkappa}} \in \overline{\Gamma}_0 = \Gamma$, т. е. что $\alpha = lx_0$. Итак, мы доказали, что в каждом левом смежном классе $\Gamma \diagdown \overline{\Gamma}_p$ имеется элемент вида $\begin{pmatrix} 1 & lx_0/p^{\varkappa} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\gamma_p^n$, где l — целое число такое, что $0 \leqslant l < p^{\varkappa}$, а $n \in Z$.

Шаг VI. Введем теперь на $\overline{\Gamma}_p$ норму N, равную максимуму p-адических норм коэффициентов матрицы (норма выбирается такой, чтобы $\|p\|$ была равной $1/p$). Рассмотрим подмножество $X_{\varkappa}$ в $\overline{\Gamma}_p$, состоящее из таких элементов $\overline{\gamma}_p \in \overline{\Gamma}_p$, что $N(\overline{\gamma}_p) = \varkappa$. Множество $X_{\varkappa}$ двусторонне инвариантно относительно подгруппы Γ, и из предыдущих рассуждений сразу следует, что множество $X_{\varkappa}$ состоит не более чем из $2p^{2\varkappa}$ левых смежных классов.

Перейдем к доказательству теоремы. Из всех предыдущих рассуждений нам потребуется только последний результат (шаг VI).

Так как группа Γ состоит из матриц, коэффициенты которых — целые алгебраические числа из поля k, можно определить конгруэнц-подгруппы Γ_n в Γ. Мы сейчас изучим пополнение $\hat{\Gamma}_p$ группы Γ по подгруппам Γ_{p^n}. Очевидно, что $\hat{\Gamma}_p$ является замкнутой подгруппой в группе $\widehat{\mathrm{SL}(2, O_k)}_p$—пополнении группы $\mathrm{SL}(2, O_k)$ по конгруэнц-подгруппам, соответствующим простому числу p. Очевидно также, что группа $\widehat{\mathrm{SL}(2, O_k)}_p$ изоморфна прямому произведению групп $\mathrm{SL}(2, O_{\mathfrak{p}_i})$, где $\mathfrak{p}_i$ — делители p в k. Покажем теперь, что $\hat{\Gamma}_p$ изогенна произведению групп типа $\mathrm{SL}(2, O_{\mathfrak{p}})$. Действительно, из того, что $\hat{\Gamma}_p$ является замкнутой подгруппой произведения групп $\mathrm{SL}(2, O_{\mathfrak{p}_i})$, следует, что она изогенна прямому произведению группы того же типа G_1 на разрешимую группу G_2 и на p-адитическую группу ранга нуль G_3, т. е. содержит подгруппу конечного индекса $\hat{\Gamma}'_p$, являющуюся прямым произведением. Из того, что проекция группы $SL(2, O_k)$ на любой прямой сомножитель группы $\widehat{SL(2, O_k)}_p$ является мономорфизмом, следует, что проекция $\hat{\Gamma}_p$ на G_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$, является мономорфизмом, если $G_i \neq (e)$. Из этого сразу следует, что $G_3 = (e)$, так как группа ранга нуль не может содержать унипотентных элементов, и что $G_2 = (e)$, так как группа Γ не является разрешимой группой. Итак, мы доказали, что $\hat{\Gamma}'_p$ является подгруппой в $\widehat{SL(2, O_k)}_p$, изоморфной прямому произведению групп вида $SL(2, O_\mathfrak{p})$. Докажем, что $\hat{\Gamma}_p$ изоморфно группе $SL(2, Z_p)$ только в том случае, когда $k = Q$, т. е. Γ является подгруппой в $SL(2, Z)$. Пусть $k \neq Q$. Рассмотрим какое-нибудь поле Галуа k_1, содержащее k, и его автоморфизм σ, не тривиальный на k. Мы имеем два представления Γ в $SL(2, O_k)$ — первоначальное φ и полученное из него с помощью автоморфизма σ представление φ^σ. Так как поле k порождено над Q следами элементов из Γ, эти представления неэквивалентны. Так как пополнение группы Γ^σ по конгруэнц-подгруппам совпадает с пополнением группы Γ, мы получаем два представления φ_p и φ_p^σ группы $\hat{\Gamma}_p$ таких, что проекции групп $\varphi_p(\hat{\Gamma}_p)$ и $\varphi_p^\sigma(\hat{\Gamma}_p)$ на любой сомножитель $\widehat{SL(2, O_k)}_p$ нетривиальны. Из предшествующих рассуждений следует, что ограничения φ_p и φ_p^σ на любую подгруппу конечного индекса в $\hat{\Gamma}_p$ неэквивалентны, что возможно лишь в случае, когда $\hat{\Gamma}_p \not\subseteq SL(2, Z_p)$.

Замечание. Можно было бы доказать, что $\hat{\Gamma}_p \cong \widehat{SL(2, O_k)}_p$.

Рассмотрим теперь пополнение $\tilde{\Gamma}$ группы $\bar{\Gamma}_p$ по конгруэнц-подгруппам Γ_{p^n} в Γ. Легко видеть, что если $\hat{\Gamma}_p$ изоморфно произведению групп вида $SL(2, O_\mathfrak{p})$, то $\tilde{\Gamma}$ изоморфно произведению групп вида $SL(2, k_\mathfrak{p})$, где $k_\mathfrak{p}$ — поле $\mathfrak{p}$-адических чисел, для которых кольцо $O_\mathfrak{p}$—кольцо целых. Легко видеть, что если $\bar{\gamma}_p$ — элемент в $\bar{\Gamma}_p$ такой, что $N(\bar{\gamma}_p) = \kappa$, то норма его проекции на любой сомножитель вида $SL(2, k_\mathfrak{p})$ в $\tilde{\Gamma}$ тоже равна κ (если норму N на группах вида $SL(2, k_\mathfrak{p})$ ввести так же, как на группе $\bar{\Gamma}_p$). Из этого и из того, что $\tilde{\Gamma} \neq SL(2, Z_p)$ (в случае, когда Γ не лежит в $SL(2, Z)$), сразу следует, что замыкание $\hat{X}_\kappa$ множества X_κ в $\tilde{\Gamma}$ состоит более чем из $p^{4\kappa}$ левых смежных классов относительно группы $\hat{\Gamma}_p$, так как множество X_κ двусторонне инвариантно относительно группы $\hat{\Gamma}_p$. Это противоречит тому, что было доказано в шаге VI. Полученное противоречие доказывает теорему.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 20 октября 1967 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1 Пятецкий-Шапиро И. И., Шафаревич И. Р., Теория Галуа трансцендентных расширений и униформизация, Изв. АН СССР, серия матем. **30** (1966), 671—704.