Н. К. Косовский, Возможности операций одноместного суммирования и одноместного ограниченного умножения, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1975, том 49, 3–6

Записки научных семинаров ЛОМИ, т.49

Н.К.Косовский

ВОЗМОЖНОСТИ ОПЕРАЦИЙ ОДНОМЕСТНОГО СУММИРОВАНИЯ И ОДНОМЕСТНОГО ОГРАНИЧЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

(Результаты доложены 26 декабря 1974 г.)

Операции, преобразущие одноместную функцию f в $\lambda x.\sum_{i\leqslant x} f(i)$ и $\lambda x.\prod_{i\leqslant x} f(i)$, называются соотвествтенно операциями одноместного суммирования и ограниченного умножения. Пусть функции q, e таковы, что $\forall x(q(x)=x-[\sqrt{x}]^2)$, $\forall x(e(x)=1)$.

Ниже доказывается, что операции суммирования и ограниченного умножения выразимы соответственно через одноместные операции суммирования и ограниченного умножения при наличии некоторых исходных операций и функций. Перечислим некоторые следствия этого результата, относящиеся к функциям, элементарным по Кальмару и по Сколему.

СЛЕДСТВИЕ 2. Все одноместные функции, элементарные по Сколему и только они, могут быть получены из функций e, q с помощью операций суммы, суперпозиции и одноместного суммирования.

СЛЕДСТВИЕ 3. Все одноместные функции, элементарные по Кальмару и только они, могут быть получены из функции q с помощью операций суммы, суперпозиции, одноместного суммирования и возведения в степень.

При доказательстве следствия 3 используется представление элементарных по Кальмару функций, полученное в [I].

СЛЕДСТВИЕ 4. Операция возведения в степень в следствии 3 может быть заменена на операцию одноместного ограниченного умножения, если добавить e к исходным функциям.

ПРИМЕЧАНИЕ. В следствиях 2,4 ни одну из исходных функций e, q нельзя исключить, Действительно, если исключить e, то все получаемые функции будут иметь неподвижную точку 0. Если исключить q, то ни одна функция из будет принимать значение 0.

ТЕОРЕМА. Операция суммирования выразима через операции одноместного суммирования, подстановки и функции $+$, q, e. Операция ограниченного умножения выразима через операции одноместного суммирования, подстановки и функции $+$, q, e.

ПРИМЕЧАНИЕ. Относящаяся к операции ограниченного умножения часть формулировки используется лишь для доказательства следствия 4. Подробное описание используемой операции подстановки имеется в [1].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся суммированием вида $\sum_{i\leq n} f(x,i)$. Этого достаточно, поскольку операция суммирования выразима через суммирование этого вида, операцию подстановки, спаривающую функцию и функции, вычисляющие левый и правый элемент пары. При этом не требуется, чтобы спаривающая функция принимала в качестве значений все натуральные числа.

Построим спаривающую функцию. Имеем

$$e(i)+e(i)=2,\ \sum_{i\leq n} 2 = 2n+2\ ,\ \sum_{i\leq n}(2i+2)=n^2+3n+2,$$

$$x \dot{-} y = q\big(((x+y)^2+3(x+y)+2)+(2x+2)\big).$$

Наконец, $n^2=((n^2+3n+2)\dot{-}(2n+2))\dot{-}n$.

Здесь операция $\dot{-}$ моделирует арифметическую разность (см. [2] п. 3.5.):

$$x\dot{-}y=\begin{cases} x-y & \text{,если } x\geqslant y, \\ 2x+2y+3 & \text{,в противном случае.}\end{cases}$$

Теперь можно построить спаривающую функцию $\lambda xy.((x+y)^2+x)$ и функции, вычисляющие соответственно левый и правый элемент пары: $q,\ \lambda z.([\sqrt{z}]\dot{-}q(z))$, поскольку $sg(x)=q(x^2+1)$, $\overline{sg}(x)=q(2+2\cdot sg(x))$, $[\sqrt{n}]=\sum_{i\leq n}\overline{sg}(q(i))\dot{-}1$.

Буквы c , l , r обозначают соответственно спаривающую функцию и функции, вычисляющие левый и правый элемент пары. Заметим, что $c(x,n)\geqslant n$. Далее,

$$\sum_{i\leq n} f(x,i)=\sum_{i\leq n} f(q(c(x,n)),i)=\sum_{c(x,n)^2\leq j\leq c(x,n)^2+n} f(q([\sqrt{j}],\ q(j)),$$

$$\sum_{\delta(n)\leq d\leq\delta(n)+\Delta(n)} F(d)=\Big(\sum_{d\leq\delta(n)+\Delta(n)} F(d)+F(\delta(n))\Big)\dot{-}\sum_{d\leq\delta(n)} F(d).$$

Следовательно, достаточно ограничиться использованием операции одноместного суммирования.

Рассмотрим операцию ограниченного умножения. Как и в случае операции суммирования достаточно ограничиться применением операции ограниченного умножения лишь к двуместным функциям. Далее,

$$\prod_{i\leq n} f(x,i) = \prod_{i\leq n} f(q(c(x,n)),i) = \prod_{c(x,n)^2\leq j\leq c(x,n)^2+n} f(q([\sqrt{j}]),q(j)),$$

$$\prod_{\delta(n)\leq\alpha\leq\delta(n)+\Delta(n)} F(\alpha) = \left[\prod_{\alpha\leq\delta(n)+\Delta(n)} \max(F(\alpha),1)\cdot\max(F(\delta(n)),1)/\prod_{\alpha\leq\delta(n)}\max(F(\alpha),1)\right]\cdot\Omega,$$

где $\Omega \leftrightharpoons \overline{sq}\left(\sum_{\delta(n)\leq\alpha\leq\delta(n)+\Delta(n)} \overline{sq}(F(\alpha))\right)$. Кроме того,

$$\max(x,1) = x + \overline{sq}(x),$$

$$[x/y] = \left(\sum_{i\leq x} sq(2\cdot x \dot{-} 2\cdot i\cdot y)\right) \dot{-} \overline{sq}\left(\sum_{i\leq x} 1 \dot{-} ((2\cdot x \dot{-} 2\cdot i\cdot y)+(2\cdot i\cdot y \dot{-} 2\cdot x))\right),$$

$$2\cdot i\cdot y = ((i+y)^2 \dot{-} i^2) \dot{-} y^2.$$

Осталось выразить функцию $\dot{-}$.

$$n \dot{-} 1 = \sum_{i\leq n} sq\left(\sum_{j\leq i} q(j)\right).$$

Наконец, для любых x, y

$$x \dot{-} y = \left(\sum_{i\leq x} \overline{sq}((i \dot{-} y)+y) \dot{-} i\right) \dot{-} 1.$$

Осталось операцию суммирования всюду выразить через операцию одноместного суммирования. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть R - замыкание некоторого списка исходных функций, содержащего $+$, q, e, относительно операций подстановки и суммирования. Тогда все одноместные функции из R и только они получаются из функций e, q посредством применений операций суперпозиции, одноместного суммирования, суммы функций и подстановки построенных одноместных функций в исходные функции.

Это утверждение и является основой для получения указанных выше следствий 2 - 4.

Для доказательства следствия 3, достаточно построить функцию e требуемым в формулировке следствия образом. Так как $e(x)=0^{\circ}$, то достаточно построить 0, воспользовавшись тем, что для любого x число $q(x)^{q(x)} + q(x)^{q(x)}$ больше I и является четным числом. Далее, при любых x, m $q((q(x))^{2m+2})=0$. Следовательно, функция e выразима.

Доказательство следствия 4. Прежде всего, легко проверить, что

$$f(x)^{g(x)} = \begin{cases} \prod\limits_{i \leq g(x) \dot- 1} f(x) & \text{, если } g(x) \neq 0, \\ 1 & \text{, в противном случае.} \end{cases}$$

Так как функция $\lambda x(x \dot- 1)$ является элементарной по Сколему, то используя функции Sg, $\overline{Sg}$ и операцию суммы функций, операцию возведения в степень можно выразить через ограниченное умножение и, следовательно, согласно теореме через одноместное ограниченное умножение.

Литература

I. Grzegorczyk A., Some classes of recursive functions (Rosprawy Matematiczne, IV). Warszawa, 1953 (русск. пер. в кн.: Проблемы математической логики, М., 1970, с.9–49).

2. Мальцев А.И., Алгоритмы и рекурсивные функции. М., 1965.

Kosovsky N.K. On the expressive power of the operations of bounded summation and bounded multiplication. It is proved that bounded summation can be expressed in terms of oneplace bounded summation (i.e. one applied only to unary functions) with the help of a special substitution and simple unary initial functions. Similar assertion is proved for bounded multiplication.

As a corollary simple representations are obtained for the classes of unary Kalmar and Skolem-elementary functions.