А. Х. Гияси, В. Н. Чубариков, Об остаточном члене в формуле суммирования Л. Д. Морделла, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, номер 1, 66–68

Краткие сообщения

УДК 511.37

ОБ ОСТАТОЧНОМ ЧЛЕНЕ В ФОРМУЛЕ СУММИРОВАНИЯ Л.Д. МОРДЕЛЛА

А. Х. Гияси, В. Н. Чубариков

Тригонометрические суммы и ряды в аналитической теории чисел применяются для вычисления значений полных сумм Гаусса, в теории дзета-функции Римана и L-рядов Дирихле, в классических формулах для числа классов квадратичных полей. Метод тригонометрических сумм был развит в XX в. в основном И.М. Виноградовым, и поэтому он называется методом Виноградова. Определенную часть в этом методе занимают формулы суммирования различного вида. В настоящей работе мы изучаем остаточный член в формуле суммирования Морделла [1].

Для вещественного числа x символом $\{x\}$ обозначим его дробную часть. Функция $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$ представима в виде (см., например, [2]) $\rho(x) = s_N(x) + \sigma_N(x)$, где

$$s_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi n} \sin 2\pi n x, \quad \sigma_N(x) \leqslant R_N(x) = \frac{4}{\sqrt{1 + N^2 \sin^2 \pi x}}. \tag{1}$$

С помощью формулы суммирования Эйлера–Маклорена и соотношения (1) выводится следующая

Лемма (формула суммирования Пуассона). *Пусть $a \leqslant b$ — полуцелые числа, т.е. числа вида $z + \frac{1}{2}$, где z — целое число. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$ и $|f'(x)| \leqslant M$. Тогда при любом натуральном $N \geqslant 2$ справедлива формула*

$$\sum_{a<n\leqslant b} f(n) = \sum_{n=-N}^{N} \int_a^b f(x) e^{2\pi i n x}\, dx + E_N, \text{ где } E_N \leqslant \frac{8M(b-a)\ln N}{N}.$$

Доказательство см. в [2, с. 442, теорема 3]. Эта лемма необходима нам для доказательства следующего утверждения — формулы суммирования Морделла.

Теорема. *Пусть функция $\chi(n)$ определена для всех целых чисел n, для заданного натурального числа k при любом n справедливо равенство $\chi(n + k) = \chi(n)$ и пусть a и b — полуцелые числа, а функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[a, b]$. Тогда при $N \geqslant 2$ имеем*

$$\sum_{a<n\leqslant b} G(n) f(n) = \sum_{m=-Nk+1}^{Nk+k} \chi(m) \int_a^b f(x) e^{2\pi i \frac{mx}{k}}\, dx + R_{N,k}, \tag{2}$$

где при любом вещественном x функция $G(x) = \sum\limits_{r=1}^{k} \chi(r) e^{2\pi i \frac{rx}{k}}$ задает обобщенную сумму Гаусса и для остаточного члена $R_{N,k}$ справедливо неравенство

$$R_{N,k} \leqslant \frac{8M(b-a)\ln N}{N}, \quad M = \max_{x\in[a,b]} \left| \frac{d(G(x)f(x))}{dx} \right|.$$

Доказательство. Применим лемму к функции $G(x)f(x)$. Получим

$$\sum_{a<n\leqslant b} G(n) f(n) = A + R_{N,k}, \tag{3}$$

где

$$A = \sum_{m=-N}^{N} \int_a^b G(x) f(x) e^{2\pi i m x}\, dx, R_{N,k} \leqslant \frac{8M(b-a)\ln N}{N},$$

причем $M = \max\limits_{x\in[a,b]} \left| \frac{d(G(x)f(x))}{dx} \right|$.

Преобразуем сумму A в правой части равенства (3). Имеем

$$A = \sum_{m=-N}^{N} \int_a^b \left(\sum_{r=1}^{k} \chi(r) e^{2\pi i \frac{rx}{k}} \right) f(x) e^{2\pi i m x}\, dx = \sum_{m=-N}^{N} \sum_{r=1}^{k} \chi(r) \int_a^b f(x) e^{2\pi i (m+\frac{r}{k})x}\, dx.$$

Числа $s = mk + r$, где $-N \leqslant m \leqslant N, 1 \leqslant r \leqslant k$, пробегают "сплошной" промежуток целых чисел от $-Nk+1$ до $Nk+k$, а функция $\chi(r)$ является периодической с периодом k, поэтому

$$A = \sum_{s=-Nk+1}^{Nk+k} \chi(s) \int_a^b f(x) e^{2\pi i \frac{sx}{k}}\, dx.$$

Тем самым формула (2) и теорема доказаны.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи формулы (2).

1. Положим в теореме $\chi(r) = e^{-\frac{sr}{k}}$. Тогда имеем

$$\sum_{\substack{a<n\leqslant b \\ n\equiv s \pmod k}} f(n) = \frac{1}{k} \sum_{m=-Nk+1}^{Nk+k} \int_a^b f(x) e^{2\pi i \frac{m(x-s)}{k}}\, dx + R_{N,k},$$

где

$$R_{N,k} \leqslant \frac{8M(b-a)\ln N}{N}, \quad M = \max_{x\in[a,b]} \left| \frac{d(G(x)f(x))}{dx} \right|, \quad G(x) = \sum_{r=1}^{k} e^{2\pi i \frac{r(x-s)}{k}}.$$

Следовательно,

$$M \leqslant F_1 \min\left\{ k, \frac{|\sin \pi x|}{|\sin \pi \frac{x-s}{k}|} \right\} + F \min\left\{ k, \frac{2\pi |e^{2\pi i x} + k^{-1} e^{2\pi i \frac{x-s}{k}} - (1+k^{-1}) e^{2\pi i \frac{(k-1)(x-s)}{k}}|}{|1 - e^{2\pi i \frac{x-s}{k}}|^2} \right\},$$

где $F = \max\limits_{a<x<b} |f(x)|, F_1 = \max\limits_{a<x<b} |f'(x)|$.

2. Пусть $\chi(n)$ — неглавный характер Дирихле по модулю p, где p — простое число. Тогда для любого натурального n сумму Гаусса $G(n)$ можно представить в виде

$$G(n) = \sum_{r=1}^{p} \chi(r) e^{2\pi i \frac{nr}{p}} = \begin{cases} \bar\chi(n) G(1), & \text{если } (n,p) = 1; \\ 0, & \text{если } (n,p) = p. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\sum_{\substack{a<n\leqslant b \\ n\not\equiv 0 \pmod p}} f(n) = \varepsilon_p \sqrt{p} \sum_{m=-Np+1}^{Np+p} \int_a^b f(x) e^{2\pi i \frac{m(x-s)}{p}}\, dx + R_{N,p},$$

где

$$R_{N,p} \leqslant \frac{8M(b-a)\ln N}{N}, \quad M = \max_{x\in[a,b]} \left| \frac{d(G(x)f(x))}{dx} \right|, \quad G(x) = \sum_{r=1}^{k} \chi(r) e^{2\pi i \frac{rx}{p}}, \ G(1) = \varepsilon_p \sqrt{p}.$$

3. Пусть $d \equiv 0, 1 \pmod 4$ — бесквадратное число; $\chi(n) = \left(\frac{d}{n}\right)$ — символ Кронекера, который является периодической функцией по n с периодом $k = |d|$. Тогда при любом целом n имеем

$$G(n) = \sum_{r=1}^{k} \left(\frac{d}{r}\right) e^{2\pi i \frac{nr}{|d|}} = \begin{cases} \left(\frac{d}{n}\right) \sqrt{d}, & \text{если } d > 0; \\ i \left(\frac{d}{n}\right) \sqrt{|d|}, & \text{если } d < 0, r > 0; \\ -i \left(\frac{d}{n}\right) \sqrt{|d|}, & \text{если } d < 0, r < 0; \end{cases}$$

Следовательно, при $d > 0$, полагая $f(x) = e^{-2\pi\frac{nr}{d}}$, получим

$$\sum_{-b<n\leqslant b} G(n)e^{-2\pi\frac{nr}{d}} = A + R_{N,d},$$

где

$$A = \sum_{m=-Nd-[d/2]}^{Nd+[d/2]} \left(\frac{d}{m}\right) \int_{-b}^{b} e^{2\pi i\frac{(-r+im)x}{d}}, \quad R_{N,d} \leqslant \frac{8M(b-a)\ln N}{N}, \quad M = \max_{x\in[-b,b]} \left|\frac{d(G(x)e^{-2\pi\frac{nr}{d}})}{dx}\right|.$$

Преобразуя выражение для A, найдем

$$\sum_{n<b} \left(\frac{d}{n}\right) e^{\left(-2\pi\frac{nr}{d}\right)} = \frac{r\sqrt{d}}{\pi} \sum_{m\leqslant\left(N+\frac{1}{2}\right)d} \left(\frac{d}{m}\right) \frac{\cos\frac{2\pi mb}{d}}{r^2+m^2} + R_{N,d}.$$

4. Пусть функция $f(x) = 1$ на промежутке $a < x \leqslant b$. Тогда из теоремы следует, что

$$\sum_{a<n\leqslant b} G(n) = \sum_{m=-Nk+1}^{Nk+k} \chi(m) \int_{a}^{b} e^{2\pi i\frac{mx}{k}}\,dx + R_{N,k},$$

где

$$R_{N,k} \leqslant \frac{8M(b-a)\ln N}{N}, \quad M = \max_{x\in[a,b]} \left|\frac{dG(x)}{dx}\right|.$$

Отсюда имеем

$$\sum_{a<n\leqslant b} G(n) = \chi(0)(b-a) + \frac{k}{2\pi i} \sum_{m=-Nk+1}^{Nk+k}{}' \frac{\chi(m)}{m} (e^{2\pi i\frac{mb}{k}} - e^{2\pi i\frac{ma}{k}})\,dx + R_{N,k},$$

где величина $R_{N,k}$ определена выше и штрих в знаке суммирования означает, что выпущено слагаемое, отвечающее значению $m = 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 04-01-00566.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mordell L.J.* Some applications of Fourier series in the analytic theory of numbers // Proc. Cambridge Phil. Soc. 1928. **24**. 585–595.
2. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу: Учеб. для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Дрофа, 2003.

Поступила в редакцию
16.04.2004

УДК 539.3:534.1

НЕЛИНЕЙНЫЕ АЭРОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

И. А. Кийко, Б. Ю. Кудрявцев

Аэроупругие колебания и устойчивость пластин в подавляющем большинстве случаев изучены в линейной постановке [1–5] с использованием формулы поршневой теории для избыточного аэродинамического давления. Достаточность такого подхода обоснована при сверхзвуковом ($M \geqslant 3$) обтекании пластины потоком, вектор скорости которого параллелен плоскости пластины. Однако в случае, когда