А. Г. Кусраев, Замечания о векторной двойственности, *Сиб. матем. журн.*, 1985, том 26, номер 1, 217–220

УДК 517.98

А. Г. КУСРАЕВ

ЗАМЕЧАНИЯ О ВЕКТОРНОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Под *векторной двойственностью* понимают пару $\langle X, Y\rangle$ векторных пространств вместе с билинейным оператором $\langle\cdot, \cdot\rangle$ из $X\times Y$ в некоторое упорядоченное векторное пространство E. Отделимость векторной двойственности означает, как обычно, что выполнено требование: если $\langle x, y_0\rangle = 0$ для всех $x\in X$ (или $\langle x_0, y\rangle = 0$ для всех $y\in Y$), то $y_0 = 0$ (соответственно $x_0 = 0$). Векторная двойственность полезна в самых различных задачах анализа, особенно когда неприменимы методы скалярной двойственности. В настоящей заметке определяется двойственность, возникающая в связи с решеточно-мультинормированными пространствами, приводятся некоторые примеры, показывающие нетривиальность и важность этих понятий.

Все рассматриваемые векторные пространства считаются вещественными. Используются терминология и результаты из [1—3]. Расширенное K-пространство рассматривается всегда с фиксированной единицей и тем самым с однозначно определенной мультипликативной структурой.

Всюду ниже зафиксированы расширенное K-пространство Z, фундаменты E и D в Z. Полагаем $E^* = \{z\in Z : zE\subset D\}$. Аналогично определяется E^{**}, причем ясно, что $E\subset E^{**}$.

1. Рассмотрим пару $(X, \mathscr{P})$, где X — векторное пространство, а $\mathscr{P}$ — некоторое множество E-значных полунорм на X, т. е. совокупность положительных, симметричных сублинейных операторов из X в E. *Сопряженное пространство* $X^* = (X, \mathscr{P})^*$ определим как множество всех линейных операторов x^* из X в D, удовлетворяющих условию $x^*\in \in\partial(e_1p_1+\ldots+e_kp_k)$, где $e_1, \ldots, e_k\in (E^*)^+$ и $p_1, \ldots, p_k\in\mathscr{P}$. Билинейный оператор $\langle\cdot, \cdot\rangle : X\times X^*\to D$, определяемый равенством $\langle x, x^*\rangle = x^*(x)$, $x\in X$, $x^*\in X^*$, приводит пространства X и X^* в векторную двойственность.

Рассмотрим произвольную D-значную двойственность $\langle X, Y\rangle$. Будем отождествлять Y со своим образом в $L(X, D)$ при естественном кэт-вложении. Говорят, что E-значная мультинорма $\mathscr{P}$ *согласована с двойственностью* $\langle X, Y\rangle$, если $(X, \mathscr{P})^* = Y$.

2. Пусть X — локально выпуклое пространство, топология которого определяется мультинормой $\mathscr{T}$. Для любых $p\in\mathscr{T}$ и $v\in X\otimes E$ положим

$$\bar{p}(v) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{k} e_i p(x_i)\right\},$$

где инфимум берется по всем представлениям $v = \sum_{i=1}^{k} x_i\otimes e_i$ (ср. [4]). Множество $\overline{\mathscr{T}} = \{\bar{p} : p\in\mathscr{T}\}$ есть E-значная мультинорма на алгебраическом тензорном произведении $X\otimes E$.

Линейный оператор T из X в E называется *правильным*, если $T\in \in\partial\bar{p}$ для некоторого $\bar{p} = \sum e_\nu p_\nu$, где $(p_\nu)\subset\mathscr{T}$ и $(e_\nu)\subset E$ — конечные множества. Для нормированного X понятие правильного оператора совпадает с понятием оператора с абстрактной нормой. Обозначим символом $\Pi(X, E)$ множество всех правильных операторов. Для произвольных $v = \sum_{i=1}^{k} x_i\otimes e_i\in X\otimes E$ и $w\in\Pi(X, E^*)$ положим

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} e_i w(x_i).$$

Тем самым пространства $X \otimes E$ и $\Pi(X, E)'$ поставлены в векторную (D-значную) двойственность.

Теорема 1. *Векторная мультинорма $\overline{\mathscr{T}}$ на $X \otimes E$ согласована с двойственностью $\langle X \otimes E, \Pi(X, E^*)\rangle$.*

Доказательство. Включение $\Pi(X, E^*) \subset (X \otimes E, \overline{\mathscr{T}})^*$ очевидно, докажем противоположное включение. Пусть $x^* = \sum_\nu x_\nu^* \in (X \otimes E)^*$, где $x_\nu^* \in \partial\left(e_\nu^* \overline{p}_\nu\right)$ для всех ν и подходящих $\left(e_\nu^*\right)$ и (p_ν). Для фиксированных x и ν отображение $E \ni e \to \langle x \otimes e, x^*\rangle$ является ортоморфизмом, следовательно, имеет вид $e \to e_\nu^*(x) \cdot e$ для некоторого $e_\nu^*(x) \in E^*$, причем $\left|e_\nu^*(x)\right| \leqslant e_\nu^* p_\nu(x)$. Положим $T_\nu(x) = e_\nu^*(x)$, $x \in X$. Тогда для $T = \sum T_\nu$ справедливы соотношения $T \in \Pi(X, E^*)$ и $\langle v, x^*\rangle = Tv$, $v \in X \otimes E$.

3. Пусть X' — сопряженное к локально выпуклому пространству X и Q — стоуновский компакт пространства E. Будем считать E фундаментом в $C_\infty(Q)$. Определим пространство $E_s(X')$ классов эквивалентности скалярно непрерывных вектор-функций. Класс $\vec{w} \in E_s^*(X')$ определяется однозначно следующими требованиями: 1) если $w_0 \in \vec{W}$, то существует открытое плотное подмножество $Q(w_0) \subset Q$ такое, что $w_0 : Q(w_0) \to X'$ и функция $\langle x, w_0(\cdot)\rangle$ непрерывна для любого $x \in X$; 2) если w_1, $w_2 \in \vec{w}$, то w_1 и w_2 совпадают на $Q(w_1) \cap Q(w_2)$; 3) существуют $e \in E$ и $p_1, \ldots, p_k \in \mathscr{T}$ такие, что

$$\sup\left\{\langle x, \vec{w}(\cdot)\rangle : \sum_{i=1}^{k} p_i(x) \leqslant 1\right\},$$

где $\langle x, \vec{w}(\cdot)\rangle$ — продолжение функции $\langle x, w_0(\cdot)\rangle$, $w_0 \in \vec{w}$, на все Q. Удобства ради будем отождествлять вектор-функцию с соответствующим классом эквивалентности. Для $v \in X \otimes E$ и $\vec{w} \in E_s^*(X')$ положим

$$\langle v, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} e_i \langle x, \vec{w}(\cdot)\rangle.$$

Нетрудно видеть, что тем самым определена D-значная билинейная форма, приводящая в двойственность $X \otimes E$ и $\underline{E_s^*}(X')$.

Теорема 2. *Векторная мультинорма $\overline{\mathscr{T}}$ на $X \otimes E$ согласована с векторной двойственностью $\langle X \otimes E, E_s^*(X')\rangle$.*

Доказательство. Пусть $V = X \otimes E$ и $W = E_s^*(X')$. Включение $W \subset V^*$ следует непосредственно из определений. Для обратного включения достаточно установить, что $\partial(e^*\overline{p}) \subset W$ для любых $0 \leqslant e^* \in E^*$ и $p \in \mathscr{T}$. Пусть $v^* \in \partial(e^*\overline{p})$ и рассмотрим оператор $S : X \to E^*$, сопоставляющий элементу $x \in X$ такой $Sx \in E^*$, что $eSx = \langle x \otimes e, v^*\rangle$ для всех $e \in E$. В силу оценки $|Sx| \leqslant e^*p(x)$, $x \in X$, справедливо представление $S = \pi \circ S_1$, где S_1 — правильный оператор из X в $C(Q)$, а $\pi : C(Q) \to E^*$ — положительный ортоморфизм. Если $\varphi \in C_\infty(Q)$ — функция, определяемая мультипликативным представлением π, а отображение $\delta : Q \to C(Q)'$ имеет вид $\delta : q \to \delta_q$, $q \in Q$, где δ_q — мера Дирака, то вектор-функция $\varphi(\cdot)\, S_1' \circ \delta(\cdot)$ — искомая.

Следствие. *Существует линейный изоморфизм (и изометрия, если X нормируемо) между пространствами $E_s(X')$ и $\Pi(X, E)$). Если E реализовано в виде фундамента в $C_\infty(Q)$, то изоморфизм осуществляется сопоставлением вектор-функций $\vec{w} \in E_s(X')$ оператора $T \in \Pi(X, E)$, действующего по формуле*

$$Tx = \langle x, \vec{w}(\cdot)\rangle, \quad x \in X.$$

Отметим, что вопрос о представлении операторов с абстрактной нормой посредством измеримых вектор-функций подробно изучен в [5, 6].

4. Обратимся теперь к вопросу о реализации пространства почти интегральных операторов. Пусть X — некоторое K-пространство и $\overline{X}$ — пространство регулярных порядково непрерывных функционалов на X, причем $\overline{X}$ тотально на X. Тогда в максимальном расширении mX существует фундамент L, являющийся KB-пространством с аддитивной нормой. Пусть Φ — существенно положительный порядково непрерывный линейный функционал на L, определяемый аддитивной нормой. Положим

$$X' = \{x' \in mX : x' \cdot X \subset L\}.$$

Снабдим X локально выпуклой топологией $o(X, \overline{X})$, определяемой семейством полунорм $x \to \langle |x|, x^* \rangle$, где $0 \leqslant x^* \in \overline{X}$. Тогда $(X, o(X, \overline{X}))^* \simeq X'$, и этот изоморфизм определяется сопоставлением $x' \in X'$ функционала $x \mapsto \Phi(x \cdot x')$, $x \in X$. Отождествим $\overline{X} \otimes E$ с пространством конечномерных (o)-непрерывных операторов из X в E. Пространством почти интегральных операторов называют компоненту в пространстве регулярных операторов $\mathscr{L}_r(X, E)$, порожденную множеством $\overline{X} \otimes E$ (см. [7, 8]). Это пространство обозначается символом $\mathscr{I}_{\overline{X}}(X, E)$.

Введем соответствующее пространство вектор-функций. Для этого необходимы некоторые вспомогательные факты.

База $\mathfrak{B}(X)$ K-пространства X с тотальным $\overline{X}$ допускает достаточное число порядково непрерывных мер. Всякая такая мера μ определяет полуметрику d_μ по формуле $d_\mu(b_1, b_2) = \mu(|b_1 - b_2|)$, $(b_1, b_2 \in \mathfrak{B}(X))$. Таким образом, $\mathfrak{B}(X)$ — равномерное пространство с семейством полуметрик $\{d_\mu\}$. Пусть $C_\infty(Q, \mathfrak{B}(X))$ — множество классов эквивалентности непрерывных отображений из Q в $\mathfrak{B}(X)$. Точнее, если $w \in C_\infty(Q, \mathfrak{B}(X))$ и $w_0 \in w$, то существует открытое плотное подмножество $Q(w_0) \subset Q$ такое, что $w_0 : Q(w_0) \to \mathfrak{B}(X)$ — непрерывное отображение, и если $w_1, w_2 \in \vec{w}$, то $w_1(t) = w_2(t)$, $t \in Q(w_1) \cap Q(w_2)$. Поточечные булевы операции в $C_\infty(Q, \mathfrak{B}(X))$ превращают ее в булеву алгебру. Из результатов [9] можно получить, что база K-пространства $\Pi(X, E)$ изоморфна булевой алгебре $C_\infty(Q, \mathfrak{B}(X))$.

Пространство $ME_s(X)$ состоит из классов эквивалентности формальных сумм вида $w = \sum_\xi \pi_\xi w_\xi$, где $(w_\xi) \subset E_s(X')$ и (π_ξ) — разбиение единицы в алгебре $C_\infty(Q, \mathfrak{B}(X))$ (т. е. дизъюнктное семейство и $\sup \pi_\xi = 1$) таких, что $\sup\{\Phi(x \cdot \pi_\xi(\cdot) w_\xi(\cdot))\} \in E$. При этом две такие суммы $w = \sum \pi_\xi w_\xi$, $w' = \sum \pi'_\xi w_\eta$ эквивалентны в том и только в том случае, если функции $\pi_\xi \wedge \pi_\eta(\cdot) \cdot w_\xi(\cdot)$ и $\pi_\xi \wedge \pi_\eta(\cdot) \cdot w_\eta(\cdot)$ эквивалентны в смысле определения $E_s(X)$.

Введем обозначение: $\Phi(x \cdot w(\cdot)) = \sum_\xi \Phi(x \cdot \pi_\xi(\cdot) \cdot w_\xi(\cdot))$.

Теорема 3. *Существует линейный и решеточный изоморфизм между пространствами $ME_s(X')$ и $\mathscr{I}_{\overline{X}}(X, E)$. Если E реализовано в виде фундамента в $C_\infty(Q)$, то изоморфизм осуществляется сопоставлением элементу $w \in ME_s(X')$ оператора T, действующего по формуле*

$$Tx = \Phi(x \cdot w(\cdot)) \quad (x \in X).$$

Доказательство состоит в применении следствия из теоремы 2 с привлечением того факта, что $\Pi(X, E)$, если фундамент в $\mathscr{I}_{\overline{X}}(X, E)$.

Следствие. *База пространства $\mathscr{I}_{\overline{X}}(X, E)$ изоморфна булевой алгебре $C_\infty(Q, \mathfrak{B}(X))$.*

г. Новосибирск

Статья поступила 25 октября 1982 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.: Гостехиздат, 1950.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1978.
3. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961.
4. *Левин В. Л.* Тензорное произведение и функторы в категориях банаховых пространств, определяемые КВ-линеалами.— Тр. Моск. мат. об-ва, 1969, т. 20, с. 43—82.
5. *Бухвалов А. В.* Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой.— Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 5, с. 1012—1015.
6. *Бухвалов А. В.* Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой.— Изв. вузов. Математика, 1975, № 11, с. 21—32.
7. *Лозановский Г. Я.* О почти интегральных операторах в КВ-пространствах.— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математика, механика, астрономия, 1966, № 7, вып. 2, с. 35—44.
8. *Сынначке Ю.* О почти интегральных операторах в К-пространствах.— Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математика, механика, астрономия, 1971, № 13, вып. 3, с. 81—89.
9. *Гордон Е. И.* К-пространства в булевозначных моделях теории множеств.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 4, с. 777—780.

УДК 517.11

И. А. МАЛЬЦЕВ

ИНВАРИАНТЫ КВАЗИКЛЕТОК ИТЕРАТИВНЫХ АЛГЕБР ПОСТА

Пусть A — произвольное множество, P_A — множество всех функций на множестве A. Итеративной алгеброй Поста над множеством A называется алгебра $\mathfrak{P}_A = \langle P_A;\ \zeta,\ \tau,\ \Delta,\ \nabla,\ *\rangle$ типа $\langle 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2\rangle$ со следующим образом определенными операциями над элементами множества P_A:

$$(\zeta f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1),$$
$$(\tau f)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_2, x_1, x_3, \ldots, x_n),$$
$$(\Delta f)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),$$
$$(\nabla f)(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) = f(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}),$$
$$(f * g)(x_1, x_2, \ldots, x_{n+m-1}) = f(g(x_1, \ldots, x_m), x_{m+1}, \ldots, x_{m+n-1}).$$

Если функция f одноместная, то $\zeta f = \tau f = \Delta f = f$.

В дальнейшем прописными готическими буквами будут обозначаться подалгебры алгебры $\mathfrak{P}_A$; $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{B}$ будет означать, что $\mathfrak{A}$ есть подалгебра алгебры $\mathfrak{B}$. Через W_f будет обозначаться множество значений функции f.

Пусть $D \subseteq A$, $D \neq \varnothing$. Алгебра $\mathfrak{K}_D \leqslant \mathfrak{P}_A$, образованная теми функциями из $\mathfrak{P}_A$, значения которых принадлежат D, называется *простой квазиклеткой над множеством* D; множество D называется *определяющим для* $\mathfrak{K}_D$. *Квазиклеткой* называется подалгебра алгебры $\mathfrak{P}_A$, являющаяся объединением произвольной системы простых квазиклеток. Если K_j, $j \in J$,— все определяющие множества всех простых квазиклеток, образующих квазиклетку, и $\mathfrak{K}_K = \{K_j | j \in J\}$, то эта квазиклетка обозначается через $\mathfrak{K}_K$, а K называется ее *определяющей системой множеств*.

Пусть I — некоторое фиксированное множество. Подмножество ρ множества A^I всех отображений множества I в A называется *I-отношением* на A. I-отношение ρ на A называется *инвариантом* алгебры $\mathfrak{A} \leqslant \mathfrak{P}_A$, если для любой n-арной функции $f \in \mathfrak{A}$ и любых $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ из ρ отображение $f(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ принадлежит ρ.

Целью этой работы является описание всех инвариантов квазиклеток, которые далее используются для характеризации алгебр некоторых многообразий, связанных с квазиклетками. Используемые методы и понятия взяты в основном из работ [1, 2].