V. I. Voilokov, Approximate integration of non-linear differential equations of oscillatory motion with one degree of freedom, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1962, Number 4, 19–32

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1962 МАТЕМАТИКА № 4 (29)

В. И. Войлоков

К ПРИБЛИЖЕННОМУ ИНТЕГРИРОВАНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

§ 1. Свободные колебания

1°. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x}+x+\alpha f(x,\dot{x})=0, \tag{1}$$

где α — малый параметр, $f(x,\dot{x})$ — аналитическая функция переменных x и $\dot{x}$. Большей частью это полиномы небольшого числа членов вида $a_{ij}x^i\dot{x}^j$ не ниже второй степени, т. е. $i+j\geqslant 2$, с постоянными коэффициентами a_{ij}. К уравнению (1) приводятся уравнения более общего вида $\ddot{x}+\omega^2x+\alpha_1 f_1(x,\dot{x})=0$, если принять $\tau=\omega t$, $\alpha=\frac{\alpha_1}{\omega^2}$, $f(x,\dot{x})$ за преобразованную функцию $f_1(x,\dot{x})$ и если за искомой функцией и её производными сохранить те же обозначения.

Один из методов приближенного решения уравнений (1), удовлетворяющих начальным условиям $x(0)=a$ и $\dot{x}(0)=0$, заключается в том, что решение ищется в виде ряда $x=x_0+\alpha x_1+\alpha^2x_2+\ldots$ и для того, чтобы в решении не появлялись вековые члены $t\cos t$, $t\sin t$, квадрат частоты или частоту (например, в [1] и [2]) также разлагают в ряд с неопределенными коэффициентами, которые затем определяются из условия периодичности последующих приближений.

Найденное таким образом решение описывает колебания с частотой, зависящей от начального отклонения системы, каким бы малым это отклонение ни было, и от малого параметра α.

В других случаях уравнение (1) или „линеаризируют" различными приёмами (например, в [3] и [4]), или пренебрегают величиной $\alpha f(x,\dot{x})$ вследствие малости α и малых колебаний системы. В обоих случаях решение нелинейного уравнения приводится к решению линейного, причем при „линеаризации" в какой-то степени учитываются особенности нелинейного уравнения, а при другом методе предполагается, что уравнение (1) для малых колебаний имеет решение периода 2π, которое получается из решения нелинейного уравнения при $\alpha=0$.

Однако, какой величины малости совершаются колебания периода 2π, не указывается. Не дается также обоснование тому, что уравнения вида (1) имеют решение периода 2π для малых значений параметра (например, для $|\alpha|<1$).

В данной работе указывается метод отыскания приближенных периодических решений периода 2π для уравнений вида (1), рассматриваются условия существования этих решений, их количество и величины отклонений системы от положения равновесия. Устойчивость получаемых решений можно рассматривать методом, указанным в [2]. Полученные результаты затем используются для приближенных решений нелинейных уравнений, описывающих вынужденные колебания.

2°. Вместо (1) рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\ddot{x}+x+\alpha f(x,\ \dot{x})+\alpha^n\lambda x=\alpha^{n+1}x, \tag{1.1}$$

решение которого будем искать в виде ряда

$$x=x_0+\alpha x_1+\alpha^2x_2+\ldots+\alpha^ix_i+\ldots \tag{1.2}$$

Подставляя ряд (1.2) в функцию $f(x,\ \dot{x})$ и разлагая эту функцию в степенной ряд по возрастающим степеням α, получим

$$f(x,\ \dot{x})=f_0(x_0,\ \dot{x}_0)+\alpha\left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\frac{\partial\dot{x}}{\partial\alpha}\right]_{\alpha=0}+ \tag{1.3}$$

$$+\alpha^2f_2(x_0,\ \dot{x}_0,\ x_1,\ \dot{x}_1)+\ldots+\alpha^if_i(x_0,\ \dot{x}_0,\ \ldots,\ \dot{x}_i)+\ldots$$

Допустим, что функция $f(x,\ \dot{x})$ содержит хотя бы одно слагаемое $a_{ij}x^i\dot{x}^j$, в котором $i+j$ есть нечётное число. Тогда в уравнении (1.1) нужно положить $n=1$. Если во всех слагаемых функции $f(x,\ \dot{x})$ сумма $i+j$ — чётное число, то величину n нужно брать равной 2.

Рассмотрим случай, когда $(i+j)$ — нечётное число, т. е. $n=1$. Подставляя ряд (1.2) в уравнение (1.1), располагая обе части этого уравнения по возрастающим степеням α с учётом (1.3) и уравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α, получим

$$\ddot{x}_0+x_0=0, \tag{1.4}$$

$$\ddot{x}_1+x_1=-f_0(x_0,\ \dot{x}_0)-\lambda x_0, \tag{1.5}$$

$$\ddot{x}_2+x_2=-\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\alpha=0}x_1+\left(\frac{\partial f}{\partial\dot{x}}\right)_{\alpha=0}\dot{x}_1\right]-\lambda x_1+x_0, \tag{1.6}$$

. . . . . .

$$\ddot{x}_i+x_i=-f_{i-1}(x_0,\ \dot{x}_0,\ \ldots,\ \dot{x}_{i-1})-\lambda x_{i-1}+x_{i-2}. \tag{1.7}$$

Чтобы ряд (1.2) имел период 2π, необходимо наличие того же периода в каждом из решений $x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_i$. Из (1.4) имеем

$$x_0=a_0\cos t+b_0\sin t. \tag{1.8}$$

Разлагая левую часть в (1.5) в ряд Фурье и ограничиваясь его конечным отрезкам, получим

$$\ddot{x}_1+x_1=-[M_0(a_0,\ b_0)+\lambda a_0]\cos t-[N_0(a_0,\ b_0)+\lambda b_0]\sin t-$$

$$-\sum_{k=2}^{l_1}(m_{k,1}\cos kt+n_{k,1}\sin kt), \tag{1.9}$$

где l_1 — наибольшая кратность дуг косинусов и синусов.

Для того, чтобы x_1 было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} M_0(a_0,\ b_0)+\lambda a_0=0,\\ N_0(a_0,\ b_0)+\lambda b_0=0. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Не останавливаясь пока на вопросе о разрешимости уравнений (1.10), допустим, что из них a_0 и b_0 определены. Тогда из уравнения (1.9) имеем

$$x_1=a_1\cos t+b_1\sin t+\sum_{k=2}^{l_1}\frac{m_{k,1}\cos kt+n_{k,1}\sin kt}{k^2-1}. \tag{1.11}$$

Подставляя x_0, x_1 в уравнение (1.6), разлагая функции $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\alpha=0}x_1$ и $\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{\alpha=0}\dot{x}_1$ в конечный ряд по косинусам и синусам кратных дуг и группируя, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2+x_2=&[-M_1(a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1)-\lambda a_1+a_0]\cos t+[-N_1(a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1)-\\ &-\lambda b_1+b_0]\sin t-\sum_{k=2}^{l_2}(m_{k,2}\cos kt+n_{k,2}\sin kt). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Для периодичности x_2 необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} -M_1(a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1)-\lambda a_1+a_0=0,\\ -N_1(a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1)-\lambda b_1+b_0=0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

В этих уравнениях величины a_1 и b_1 содержатся в первой степени. Если определитель этой системы не равен нулю, то a_1 и b_1 определятся (см. п. 5°). При таком выборе a_1 и b_1 функция x_2 будет

$$x_2=a_2\cos t+b_2\sin t+\sum_{k=2}^{l_2}\frac{m_{k,2}\cos kt+n_{k,2}\sin kt}{k^2-1}. \tag{1.14}$$

Произвольные постоянные a_2 и b_2 определятся из условия периодичности x_3 и выразятся через a_0 и b_0.

Допустим, что функции x_0, x_1, x_2, ..., x_{i-1} найдены и оказались периодическими. Тогда x_i определится из уравнения (1.7). Если x_0, x_1, x_2,... подставить в функцию $f_{i-1}(x_0, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{i-1})$ и разложить ее в ряд Фурье, то уравнение (1.7) примет вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i+x_i=&[-M_{i-1}(a_0,\ b_0,\ldots,\ a_{i-1},\ b_{i-1})-\lambda a_{i-1}+a_{i-2}]\cos t+\\ &+[-N_{i-1}(a_0,\ b_0,\ldots,\ a_{i-1},\ b_{i-1})-\lambda b_{i-1}+b_{i-2}]\sin t-\\ &-\sum_{k=2}^{l_i}(m_{k,i}\cos kt+n_{k,i}\sin kt), \end{aligned} \tag{1.15}$$

где $m_{k,i}$ и $n_{k,i}$ — коэффициенты Фурье в разложении функции $f_{i-1}(x_0, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{i-1})$ в ряд. Чтобы x_i было периодическим, необходимо и достаточно выполнение следующих уравнений:

$$\begin{aligned} -M_{i-1}(a_0,\ b_0,\ldots,\ a_{i-1},\ b_{i-1})-\lambda a_{i-1}+a_{i-2}=0,\\ -N_{i-1}(a_0,\ b_0,\ldots,\ a_{i-1},\ b_{i-1})-\lambda b_{i-1}+b_{i-2}=0. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Если определитель этой системы не равен нулю, то a_{i-1} и b_{i-1} определятся. Тогда из (1.15) получим

$$x_i = a_i \cos t + b_i \sin t + \sum_{k=2}^{l_i} \frac{m_{k,i} \cos kt + n_{k,i} \sin kt}{k^2 - 1}. \qquad (1.17)$$

Подставляя значение $x_0, x_1, \ldots, x_i$ в ряд (1.2), решение уравнения (1.1) получим в виде

$$x = a_0 \cos t + b_0 \sin t + \alpha\left(a_1 \cos t + b_1 \sin t + \sum_{k=2}^{l_1} \frac{m_{k,1} \cos kt + n_{k,1} \sin kt}{k^2 - 1}\right) +$$

$$+ \alpha^2\left(a_2 \cos t + b_2 \sin t + \sum_{k=2}^{l_2} \frac{m_{k,2} \cos kt + n_{k,2} \sin kt}{k^2 - 1}\right) + \ldots +$$

$$+ \alpha^i\left(a_i \cos t + b_i \sin t + \sum_{k=2}^{l_i} \frac{m_{k,i} \cos kt + n_{k,i} \sin kt}{k^2 - 1}\right) + \ldots$$

Перегруппировав слагаемые, это решение можно записать так:

$$x = \sum_{k=0}^{i} \alpha^k a_k \cos t + \sum_{k=0}^{i} \alpha^k b_k \sin t + \sum_{k=2}^{l_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha^j m_{k,j}}{k^2 - 1} \cos kt +$$

$$+ \sum_{k=2}^{l_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha^j n_{k,j}}{k^2 - 1} \sin kt, \qquad (1.18)$$

где некоторые коэффициенты $m_{k,j}$ и $n_{k,j}$ равны нулю (например, $m_{l_2+1,2}$ и $n_{l_2+1,2}$).

В полученном решении содержатся две произвольные постоянные: a_i и b_i. Эти величины определим из начальных условий. Чтобы (1.18) было решением порождающего уравнения, начальное отклонение системы должно совпадать с a_0, т. е. $x(0) = a = a_0$.

Из (1.18) при $t = 0$ получим $a_0 = \sum_{k=0}^{i} \alpha^k a_k + \sum_{k=2}^{l_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha^j m_{k,j}}{k^2 - 1}$. Дифференцируя ряд (1.18) (правомочность этого будет показана), при $t = 0$ получим

$$0 = \sum_{k=0}^{i} \alpha^k b_k + \sum_{k=2}^{l_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha^j k n_{k,j}}{k^2 - 1}.$$

Из последних двух уравнений определим $\alpha^i a_i$ и $\alpha^i b_i$. Будем иметь

$$\alpha^i a_i = a_0 - \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^k a_k - \sum_{k=2}^{l_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha^j m_{k,j}}{k^2 - 1},$$

$$\alpha^i b_i = - \sum_{k=0}^{i-1} \alpha^k b_k - \sum_{k=2}^{l_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha^j k n_{k,j}}{k^2 - 1}.$$

Подставляя значения $\alpha^i a_i$ и $\alpha^i b_i$ в (1.18), получим приближенное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям, в виде

$$x = a_0 \cos t - \cos t \sum_{k=2}^{l_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha^j m_{k,j}}{k^2-1} - \sin t \sum_{k=2}^{l_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha^j k n_{k,j}}{k^2-1} + \\ + \sum_{k=2}^{l_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha^j m_{k,j}}{k^2-1} \cos kt + \sum_{k=2}^{l_i} \sum_{j=1}^{i} \frac{\alpha^j n_{k,j}}{k^2-1} \sin kt. \tag{1.19}$$

3°. Рассмотрим вопрос о сходимости решения (1.19). Пусть процесс приближения продолжен неограниченно. Это значит, что при $i \to \infty$ и $l_i \to \infty$, т. к. $l_i \geqslant i$. Тогда решение (1.19) примет вид

$$x = a_0 \cos t - \cos t \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j m_{k,j}}{k^2-1} - \sin t \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j k n_{k,j}}{k^2-1} + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j m_{k,j}}{k^2-1} \cos kt + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha^j n_{k,j}}{k^2-1} \sin kt. \tag{1.20}$$

Покажем, что ряд (1.20) и ряды, получающиеся из него одно- и двукратным дифференцированием, сходятся. Сначала выясним вид коэффициентов $m_{k,j}$ и $n_{k,j}$ и дадим их оценку. Из (1.3) имеем

$$f(x, \dot{x}) = f_0(x_0, \dot{x}_0) + \alpha f_1(x_0, \dot{x}_0, x_1, \dot{x}_1) + \alpha^2 f_2(x_0, \dots, \dot{x}_2) + \dots + \\ + \alpha^k f_k(x_0, \dots, \dot{x}_k),$$

где

$$f_k(x_0, \dots, \dot{x}_k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{\partial^k f}{\partial \alpha^k}\right]_{\alpha=0} = \frac{1}{k!}\left[F_k(x_0, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_{k-1}) + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\alpha=0} k! x_k + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{\alpha=0} k! \dot{x}_k\right], \tag{1.21}$$

$k = 1, 2, 3, \dots$, а функция $F_k(x_0, \dot{x}_0, \dots, x_{k-1})$ содержит частные производные высшего порядка функции $f(x, \dot{x})$ по x и $\dot{x}$ при $\alpha = 0$.

Допустим, что для достаточно большого значения k функции $x_0, x_1, \dots, x_k$ определены, оказались периодическими и ограниченными. Тогда для определения x_{k+1} будем иметь уравнение, аналогичное уравнению (1.7) при $i = k+1$

$$\ddot{x}_{k+1} + x_{k+1} = -f_k(x_0, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_k) - \lambda x_k + x_{k-1}. \tag{1.22}$$

Разлагая $f_k(x_0, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_k)$ в ряд Фурье, получим

$$f_k(x_0, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_k) = M_k(a_0, b_0, \dots, a_k, b_k) \cos t + \\ + N_k(a_0, b_0, \dots, a_k, b_k) \sin t + \sum_{k=2}^{l_k} (m_k \cos kt + n_k \sin kt),$$

где

$$m_k = \frac{1}{k!\pi} \int_0^{2\pi} \left[F_k(x_0, \dots, \dot{x}_{k-1}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\alpha=0} k! x_k + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{\alpha=0} k! \dot{x}_k\right] \cos kt dt,$$

$$n_k = \frac{1}{k!\pi} \int_0^{2\pi} \left[F_k(x_0, \dots, \dot{x}_{k-1}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\alpha=0} k! x_k + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{\alpha=0} k! \dot{x}_k\right] \sin kt. \tag{1.23}$$

Так как функция $f(x, \dot{x})$ аналитическая, то все ее частные производные по x, $\dot{x}$, содержащиеся в составе $f_k(x_0, \dots, \dot{x}_k)$, при ограниченных значениях x_0, x_1, $x_2, \dots$, x_k будут ограниченными периодическими функциями t. Более того, они будут непрерывными функциями, т. к. являются тригонометрическими полиномами. Следовательно, коэффициенты m_k и n_k из (1.23) определятся и будут иметь вид $m_k = \frac{A_k}{k!}$; $n_k = \frac{B_k}{k!}$. Дифференциальное уравнение (1.22) примет вид

$$\ddot{x}_{k+1} + x_{k+1} = [-M_k(a_0, b_0, \dots, a_k, b_k) - \lambda a_k + a_{k-1}] \cos t + [-N_k(a_0, b_0, \dots, a_k, b_k) - \lambda b_k + b_{k-1}] \sin t -$$

$$- \sum_{k=2}^{l_k} (m_k \cos kt + n_k \sin kt) - \lambda \sum_{i=2}^{l_i} (h_i \cos it + g_i \sin it) + \sum_{j=2}^{l_j} (r_j \cos jt + s_j \sin jt), \tag{1.24}$$

где

$$h_i = \frac{C_j'}{(i-1)!\,(i^2-1)} = \frac{C_i}{(i-1)!}, \quad g_i = \frac{D_i'}{(i-1)!\,(i^2-1)} = \frac{D_i}{(i-1)!},$$

$$r_j = \frac{E_j'}{(j-2)!\,(j^2-1)} = \frac{E_j}{(j-2)!}, \quad s_j = \frac{F_j'}{(j-2)!\,(j^2-1)} = \frac{F_j}{(j-2)!},$$

причем C_i', D_i', E_j' и F_j' — постоянные коэффициенты, аналогичные A_k и B_k.

При условии периодичности x_{k+1} уравнение (1.24) примет вид

$$\ddot{x}_{k+1} + x_{k+1} = - \sum_{k=2}^{l_j} [(m_k + \lambda h_k - r_k) \cos kt + (n_k + \lambda g_k - s_k) \sin kt] -$$

$$- \sum_{k=l_j}^{l_i} [(m_k + \lambda h_k) \cos kt + (n_k + g_k \lambda) \sin kt] - \sum_{k=l_i}^{l_k} (m_k \cos kt + n_k \sin kt).$$

Суммарные коэффициенты при $\cos kt$ и $\sin kt$ в правой части этого уравнения и являются теми коэффициентами $m_{k,j}$ и $n_{k,j}$, которые содержатся в (1.20).

Таким образом, имеем

$$m_{k,j} = m_k + \lambda h_k - r_k = \frac{A_k}{k!} + \frac{\lambda C_k}{(k-1)!} - \frac{E_k}{(k-2)!} = \frac{1}{(k-2)!}\left[\frac{A_k}{k(k-1)} + \frac{\lambda C_k}{k-1} - E_k\right]$$

и

$$n_{k,j} = n_k + \lambda g_k - s_k = \frac{B_k}{k!} + \frac{\lambda D_k}{(k-1)!} - \frac{F_k}{(k-2)!} = \frac{1}{(k-2)!}\left[\frac{B_k}{k(k-1)} + \frac{\lambda D_k}{k-1} - F_k\right], \tag{1.25}$$

причем $E_k = F_k = 0$ при $k > l_j$; $C_k = D_k = 0$ при $k > l_i$ и $l_k > l_i > l_j$. Аналогично (1.25) при переходе от k к $k+1$ получим

$$m_{k+1,j} = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{A_{k+1}}{k(k+1)} + \frac{\lambda C_{k+1}}{k} - E_{k+1}\right],$$
$$n_{k+1,j} = \frac{1}{(k-1)!}\left[\frac{B_{k+1}}{k(k+1)} + \frac{\lambda D_{k+1}}{k} - F_{k+1}\right]. \qquad (1.26)$$

Далее, из (1.25) и (1.26) будем иметь

$$|m_{k,j}| < \frac{3P_k}{(k-2)!}, \quad |m_{k+1,j}| < \frac{3P_{k+1}}{(k-1)!}$$

и

$$|n_{k,j}| < \frac{3Q_k}{(k-2)!}, \quad |n_{k+1,j}| < \frac{3Q_{k+1}}{(k-1)!},$$

где P_k — модуль наибольшей из величин $\frac{A_k}{k(k-1)}$, $\frac{\lambda C_k}{k-1}$ и E_k,

Q_k — модуль наибольшей из величин $\frac{B_k}{k(k-1)}$, $\frac{\lambda D_k}{k-1}$ и F_k,

P_{k+1} — модуль наибольшей из величин $\frac{A_{k+1}}{k(k+1)}$, $\frac{\lambda C_{k+1}}{k}$ и E_{k+1},

Q_{k+1} — модуль наибольшей из величин $\frac{B_{k+1}}{k(k+1)}$, $\frac{\lambda D_{k+1}}{k}$ и F_{k+1}.

Рассмотрим теперь сходимость ряда, получающегося из (1.20) после двукратного дифференцирования. Имеем $\ddot{x} = -a_0 \cos t +$

$$+ \cos t \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha^j m_{k,j}}{k^2-1} + \sin t \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\alpha^j k n_{k,j}}{k^2-1} + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k^2\alpha^j m_{k,j}}{1-k^2}\cos kt +$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k^2\alpha^j n_{k,j}}{1-k^2}\sin kt.$$

Наихудшую сходимость имеют два последних ряда. Рассмотрим один из них, именно $\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k^2\alpha^j m_{k,j}}{1-k^2}\cos kt$. Так как коэффициенты $m_{k,j}$ и $n_{k,j}$ не зависят от j (j указывает принадлежность $m_{k,j}$ и $n_{k,j}$ к α^j), то будем иметь

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k^2\alpha^j m_{k,j}}{1-k^2}\cos kt\right| < \left|\frac{\alpha}{1-\alpha}\right|\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2 m_{k,j}}{1-k^2}\right|.$$

По признаку Даламбера, ряд $\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k^2 m_{k,j}}{1-k^2}\right|$ сходится. Действительно, с учетом оценки $m_{k,j}$ и $n_{k,j}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2|m_{k+1,j}||1-k^2|}{|1-(k+1)^2|k^2||m_{k,j}|} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{(k+1)^2 3|p_{k+1}||1-k^2|(k-2)!}{|1-(k+1)^2|(k-1)!3|p_k|k^2} = \lim_{k\to\infty}\frac{|p_{k+1}|}{|p_k|(k-1)} = 0.$$

Значит

$$\left|\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{k^2 m_{k,j}}{1-k^2}\alpha^j\cos kt\right| < \left|\frac{\alpha}{1-\alpha}\right| R = L,$$

т. е. рассматриваемый ряд абсолютно сходится при любом t. По таким же соображениям сходится и последний ряд из $\ddot{x}$. Так как рассмотренный ряд является мажорантным по отношению к первым двум рядам из $\ddot{x}$, то они также абсолютно сходятся.

Таким образом, величина $\ddot{x}$ будет ограниченной при любом t. Рассмотренный ряд будет мажорантным и для x и $\dot{x}$. Значит, они также абсолютно сходятся. А это дает возможность определения $\alpha^i a_i$ и $\alpha^i b_i$ по начальным условиям.

Из сходимости рассмотренных рядов вытекает, что функция (1.20) является решением уравнения (1.1), а значит и уравнения (1), т. к. при $\lambda = \alpha$ уравнение (1.1) переходит в уравнение (1). Функция (1.19) будет приближенным решением уравнения (1) с точностью до α^i включительно, т. к. $\ddot{x} + x + \alpha f(x, \dot{x}) = \alpha^{i+1} f_i(x_0, \dot{x}_0, ..., x_i, \dot{x}_i) + ...$

4°. Рассмотрим вопрос о разрешимости уравнений (1.10) при $\lambda = \alpha$. Имеем

$$\begin{aligned} M_0(a_0, b_0) + \alpha a_0 &= 0, \\ N_0(a_0, b_0) + \alpha b_0 &= 0. \end{aligned} \tag{1.27}$$

$M_0(a_0, b_0)$ и $N_0(a_0, b_0)$ — рациональные многочлены относительно a_0 и b_0, поэтому для разрешимости уравнений (1.27) необходимо, чтобы результант многочленов $\varphi_1(a_0, b_0) = M_0(a_0, b_0) + \alpha a_0$ и $\varphi_2(a_0, b_0) = N_0(a_0, b_0) + \alpha b_0$ [6] был равен нулю:

$$R(\varphi_1, \varphi_2) = 0. \tag{1.28}$$

Уравнение (1.28) является алгебраическим уравнением относительно a_0 или b_0 в степени, зависящей от вида функции $f(x, \dot{x})$.

Таким образом, система (1.27) будет иметь действительное решение, если действительные корни имеет уравнение (1.28). Отделение корней этого уравнения можно провести, например, методом Штурма. Так как функция $f(x, \dot{x})$ не содержит слагаемых первой степени и свободного члена, то это же будет справедливо по отношению к функциям $M_0(a_0, b_0)$ и $N_0(a_0, b_0)$. Отсюда следует, что система (1.27) содержит тривиальное решение $a_0 = b_0 = 0$, соответствующее положению равновесия. Далее, если из системы (1.27) исключить α, то

$$b_0 M_0(a_0, b_0) - a_0 N_0(a_0, b_0) = 0, \tag{1.29}$$

т. е. на плоскости a_0, b_0 имеем, вообще говоря, уравнение некоторой кривой, проходящей через начало координат.

Может случиться, что оно распадётся на два или более уравнений, если в составе $M_0(a_0, b_0)$ и $N_0(a_0, b_0)$ имеются общие множители, т. е.

$$b_0 M_0(a_0, b_0) - a_0 N_0(a_0, b_0) = h(a_0, b_0)[b_0 h_1(a_0, b_0) - a_0 h_2(a_0, b_0)] = 0. \tag{1.30}$$

Если $h(0, 0) \neq 0$, то $h(a_0, b_0) = 0$ будет уравнением некоторой кривой на плоскости a_0, b_0.

Если для $h(a_0, b_0) = 0$ выполнены условия существования и непрерывности неявной функции [5], то a_0 будет непрерывной функ-

цией b_0, т. е. $a_0=\psi(b_0)$. Значит, в области изменения b_0 величина a_0 будет принимать наибольшее и наименьшее значения, которые и определят границы существования периодического решения. Кроме того, из (1.30) при $a_0\neq 0$ и $b_0\neq 0$ может выполняться условие $b_0h_1(a_0, b_0)-a_0h_2(a_0, b_0)=0$, которое может определить, вообще говоря, еще некоторые периодические решения периода 2π. Если $R(\varphi_1, \varphi_2)\equiv 0$, то оба уравнения системы (1.27) совпадают. Тогда одно из них будет устанавливать зависимость между a_0 и b_0.

Например, для дифференциальных уравнений $\ddot{x}+x+\alpha x^3=0$ и $\ddot{x}+x-\alpha x^2=0$ оба уравнения системы совпадают и соответственно имеют вид $a_0^2+b_0^2=\frac{4}{3}\alpha$ и $a_0^2+b_0^2=\frac{6}{5}\alpha$, т. е. являются уравнениями окружностей с центром в начале координат и радиусами порядка $\sqrt{\alpha}$.

Таким образом, определение a_0 и b_0 из системы (1.27) приводится к решению алгебраического уравнения (1.28) с действительными коэффициентами, которое, вообще говоря, может определить несколько решений системы (1.27). Этим самым определится количество периодических решений исходного дифференциального уравнения (1) в виде ряда (1.19), если величины a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_{i-1}, b_{i-1} будут определены и окажутся конечными.

5°. Выясним возможность определения a_1, b_1, ..., a_{i-1}, b_{i-1} из уравнений (1.13)—(1.16) при $\lambda=\alpha$. Рассмотрим сначала систему уравнений (1.13) при $\lambda=\alpha$, т. е.

$$\begin{aligned} -M_1(a_0, b_0, a_1, b_1)-\alpha a_1+a_0&=0,\\ -N_1(a_0, b_0, a_1, b_1)-\alpha b_1+b_0&=0. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Если учесть, что $M_1(a_0, b_0, a_1, b_1)$ и $N_1(a_0, b_0, a_1, b_1)$ являются коэффициентами при косинусе и синусе аргумента t в разложении функции $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\alpha=0}x_1+\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{\alpha=0}\dot{x}_1$ в ряд Фурье, то они имеют вид

$$M_1(a_0, b_0, a_1, b_1)=\frac{1}{2}[a_1(c_2-q_2)+b_1(p_2+d_2)]+p_{11}+p_{12},$$

$$N_1(a_0, b_0, a_1, b_1)=\frac{1}{2}[a_1(p_2+d_2)+b_1(q_2-c_2)]+q_{11}+q_{12}.$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений (1.31), получим

$$\begin{aligned} -(c_2-q_2+2\alpha)a_1-(p_2+d_2)b_1&=-2a_0+2(p_{11}+p_{12}),\\ -(p_2+d_2)a_1-(q_2-c_2+2\alpha)b_1&=-2b_0+2(q_{11}+q_{12}), \end{aligned} \tag{1.32}$$

где

$$c_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x}[\cos 2t+1]\,dt,\quad d_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial x}\sin 2t\,dt,$$

$$p_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}}[\cos 2t+1]\,dt,\quad q_2=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial f(x_0, \dot{x}_0)}{\partial \dot{x}}\sin 2t\,dt,$$

а величины p_{11}, p_{12}, q_{11}, q_{12} не зависят от a_1 и b_1, являются постоянными числами, выраженными через a_0 и b_0.

Чтобы система (1.32) имела решение, необходимо и достаточно отличие её определителя от нуля. Подсчитаем величину этого определителя:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -(c_2 - q_2 + 2\alpha) & -(p_2 + d_2) \\ -(p_2 + d_2) & -(q_2 - c_2 + 2\alpha) \end{vmatrix} = \\ = -[(q_2 - c_2)^2 - 4\alpha^2 + (p_2 + d_2)^2].$$

Значит, $\Delta_1 \neq 0$ тогда, когда $4\alpha^2 \neq (q_2 - c_2)^2 + (p_2 + d_2)^2$. Легко показать, что определители линейных систем для вычисления a_2, b_2, ..., a_i, b_i совпадают с Δ_1. Следовательно, для вычисления всех коэффициентов a_i и b_i необходимо и достаточно, чтобы $\Delta_1 \neq 0$.

Подводя итоги, можно сформулировать следующее предложение. Если система (1.10) при $\lambda = \alpha$ имеет хотя бы одно действительное (не тривиальное) решение и если определитель системы (1.13) при $\lambda = \alpha$ отличен от нуля, то дифференциальное уравнение (1) имеет периодическое решение периода 2π. Приближенное выражение этого решения дается в виде функции (1.19).

§ 2. Вынужденные колебания

Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + x + \alpha f(x, \dot{x}) = \varphi(t), \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ — некоторая периодическая функция, α — малый параметр и $f(x, \dot{x})$ — аналитическая функция переменных x и $\dot{x}$ не ниже второй степени, как и в § 1. Если $\varphi(t)$ имеет период 2π или соизмеримый с 2π, то при отыскании приближенного решения уравнения (2) появляются затруднения.

Покажем, что с помощью предложенного в § 1 метода можно найти периодические решения уравнения (2) для любого вида аналитических функций $f(x, \dot{x})$, причем функция $\varphi(t)$ может содержать главную гармонику в её ряде Фурье. Для определенности допустим, что функция $f(x, \dot{x})$ содержит хотя бы одно слагаемое $a_{i,j}x^i\dot{x}^j$, в котором $i + j$ есть нечетное число, а функция $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{m_0}{2} + \alpha(A\cos t + B\sin t) + \sum_{k=2}^{\infty}(m_{0k}\cos kt + n_{0k}\sin kt).$$

При этих условиях уравнение (2) принимает вид

$$\ddot{x} + x + \alpha f(x, \dot{x}) = \frac{m_0}{2} + \alpha(A\cos t + B\sin t) + \\ + \sum_{k=2}^{\infty}(m_{0k}\cos kt + n_{0k}\sin kt). \tag{2.1}$$

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\ddot{x} + x + \alpha f(x, \dot{x}) + \alpha\lambda x = \alpha^2 x + \frac{m_0}{2} + \alpha(A\cos t + B\sin t) + \\ + \sum_{k=2}^{\infty}(m_{0k}\cos kt + n_{0k}\sin kt). \tag{2.2}$$

При $\lambda = \alpha$ оно переходит в уравнение (2.1). Соответственно решение (2.2) при $\lambda = \alpha$ будет решением (2.1), как в § 1. Будем искать решение уравнения (2.2) в виде ряда

$$x = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots \tag{2.3}$$

Подставляя ряд (2.3) в (2.2) и учитывая, что функция $f(x, \dot{x})$ имеет вид (1.3) из § 1, после уравнивания коэффициентов при одинаковых степенях α получим

$$\ddot{x}_0 + x_0 = \frac{m_0}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (m_{0k} \cos kt + n_{0k} \sin kt), \tag{2.4}$$

$$\ddot{x}_1 + x_1 = -f_0(x_0, \dot{x}_0) - \lambda x_0 + A \cos t + B \sin t, \tag{2.5}$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 = -\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{\alpha=0} x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right)_{\alpha=0} \dot{x}_1\right] - \lambda x_1 + x_0, \tag{2.6}$$

. . . . . .

$$\ddot{x}_i + x_i = -f_{i-1}(x_0, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_{i-1}) - \lambda x_{i-1} + x_{i-2}. \tag{2.7}$$

Из (2.4) имеем

$$x_0 = a_0 \cos t + b_0 \sin t + \frac{m_0}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{m_{0k} \cos kt + n_{0k} \sin kt}{1 - k^2}. \tag{2.8}$$

Подставляя x_0 в уравнение (2.5) и разлагая функцию $f_0(x_0, \dot{x}_0)$ в ряд по косинусам и синусам кратных дуг, будем иметь

$$\ddot{x}_1 + x_1 = [-M_0(a_0, b_0) - \lambda a_0 + A] \cos t + [-N_0(a_0, b_0) - \lambda b_0 + B] \sin t + \\ + \frac{m_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (m_{1k} \cos kt + n_{1k} \sin kt). \tag{2.9}$$

Для того, чтобы x_1 было периодической функцией, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ равнялись нулю, т. е.

$$\begin{aligned} -M_0(a_0, b_0) - \lambda a_0 + A &= 0, \\ -N_0(a_0, b_0) - \lambda b_0 + B &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Из уравнения (2.9) при выполнении условий (2.10) найдем

$$x_1 = a_1 \cos t + b_1 \sin t + \frac{m_1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{m_{1k} \cos kt + n_{1k} \sin kt}{1 - k^2}. \tag{2.11}$$

Подставляя значения x_0 и x_1 в уравнение (2.6) и группируя, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + x_2 = &[-M_1(a_0, b_0, a_1, b_1) - \lambda a_1 + a_0] \cos t + \\ &+ [-N_1(a_0, b_0, a_1, b_1) - \lambda b_1 + b_0] \sin t + \frac{m_2}{2} + \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} (m_{2k} \cos kt + n_{2k} \sin kt). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Условие периодичности x_2:

$$\begin{aligned} -M_1(a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1) - \lambda a_1 + a_0 = 0, \\ -N_1(a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1) - \lambda b_1 + b_0 = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Из уравнения (2.12) при выполнении условия (2.13)

$$x_2 = a_2 \cos t + b_2 \sin t + \frac{m_2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{m_{2k} \cos kt + n_{2k} \sin kt}{1 - k^2}. \tag{2.14}$$

Допустим, что $x_0,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{i-1}$ найдены и оказались периодическими функциями периода 2π. Подставляя их значения в уравнение (2.7), разлагая функцию $f_{i-1}(x_0, \ldots,\ \dot{x}_{i-1})$ в ряд по косинусам и синусам кратных дуг и группируя, получим

$$\begin{aligned} \ddot{x}_i + x_i = [-M_{i-1}(a_0,\ b_0, \ldots,\ a_{i-1},\ b_{i-1}) - \lambda a_{i-1} + a_{i-2}] \cos t + \\ + [-N_{i-1}(a_0,\ a_{i-1}, \ldots,\ b_0,\ b_{i-1}) - \lambda b_{i-1} + b_{i-2}] \sin t + \\ + \frac{m_i}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} (m_{ik} \cos kt + n_{ik} \sin kt). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Условием периодичности x_i является

$$\begin{aligned} -M_{i-1}(a_0,\ b_0, \ldots,\ a_{i-1},\ b_{i-1}) - \lambda a_{i-1} + a_{i-2} = 0, \\ -N_{i-1}(a_0,\ b_0, \ldots,\ a_{i-1},\ b_{i-1}) - \lambda b_{i-1} + b_{i-2} = 0. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Из уравнения (2.15) при выполнении условия (2.16) получаем

$$x_i = a_i \cos t + b_i \sin t + \frac{m_i}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{m_{ik} \cos kt + n_{ik} \sin kt}{1 - k^2}. \tag{2.17}$$

Подставляя значения $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_i$ в ряд (2.3), получим решение уравнения (2.2) с точностью до α^i. При $\lambda = \alpha$ это решение переходит в решение уравнения (2.1), а значит, и уравнения (2), если a_0 и b_0 определены из уравнений (2.10), $a_1,\ b_1$ — из уравнений (2.13), ..., a_{i-1} и b_{i-1} — из уравнений (2.16) при $\lambda = \alpha$.

Как и в § 1, все коэффициенты a_i и b_i выразятся через a_0 и b_0, которые определяются системой уравнений (2.10). Из её нелинейности следует, что уравнение (2) будет иметь столько периодических решений, сколько действительных решений имеет эта система. Вопрос об устойчивости этих решений здесь не рассматривается.

Особенно просто найти решение уравнения (2), если вынуждающая сила содержит лишь основную гармонику с амплитудой порядка α. Пусть, например, $\varphi(t) = \alpha(A \cos t + B \sin t)$. Тогда рассматриваемое уравнение будет $\ddot{x} + x + \alpha f(x,\ \dot{x}) = \alpha(A \cos t + B \sin t)$. Взяв решение этого уравнения в виде (2.3), составив соответствующие уравнения (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) для определения $x_0,\ x_1, \ldots,\ x_i$, заметим, что уравнения (2.4), (2.5), (2.6), (2.7) сответственно совпадают с уравнениями (1.4), (1.5), (1.6), (1.7) из § 1. Значит, для определения приближенного решения рассматриваемого уравнения можно взять решение уравнения (1), определив a_0 и b_0 из уравнений (2.10) вместо (1.10).

Наконец, если в уравнении (2) у всех слагаемых функции $f(x,\ \dot{x})$ сумма $i + j$ есть чётное число, то вспомогательное уравнение нужно

брать в виде $\ddot{x}+x+\alpha f(x, \dot{x})+\alpha^2\lambda x=\alpha^3 x+\varphi(t)$. Для того, чтобы это уравнение допускало решение периода 2π, функцию $\varphi(t)$ представим в виде

$$\varphi(t)=\frac{m_0}{2}+\alpha^2(A\cos t+B\sin t)+\sum_{k=2}^{\infty}(m_{0k}\cos kt+n_{0k}\sin kt).$$

Весь ход дальнейших вычислений будет таким же, как и при $i+j$ равном нечетному числу, только a_0 и b_0 определятся из условия периодичности x_2, а a_1 и b_1 — из условия периодичности x_4 и т. д.

§ 3. Применение метода к задаче Дуффинга

Для иллюстрации метода рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}+x-\alpha x^3=h\sin t, \tag{3}$$

которое впервые изучил Дуффинг. Рассмотрение этого уравнения имеется, например, в [2]. Мы приводим этот пример для того, чтобы показать, что с помощью предложенного метода можно обнаружить дополнительные периодические решения уравнения (3). Допуская, что $h=\alpha A$, составим вспомогательное уравнение

$$\ddot{x}+x-\alpha x^3+\alpha\lambda x=\alpha^2 x+\alpha A\sin t. \tag{3.1}$$

Решение этого уравнения будем искать в виде ряда

$$x=x_0+\alpha x_1+\alpha^2 x_2+\ldots \tag{3.2}$$

Подставляя ряд (3.2) в уравнение (3.1) и уравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α, получим

$$\ddot{x}_0+x_0=0, \tag{3.3}$$

$$\ddot{x}_1+x_1=x_0^3-\lambda x_0+A\sin t, \tag{3.4}$$

$$\ddot{x}_2+x_2=3x_0^2x_1-\lambda x_1+x_0, \tag{3.5}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Из уравнения (3.3) имеем $x_0=a_0\cos t+b_0\sin t$. Подставляя x_0 в уравнение (3.4), разлагая правую часть этого уравнения в конечный ряд по косинусам и синусам кратных дуг и приравнивая коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ нулю, получим

$$\begin{aligned} a_0\left[\frac{3}{4}(a_0^2+b_0^2)-\lambda\right]&=0,\\ b_0\left[\frac{3}{4}(a_0^2+b_0^2)-\lambda\right]+A&=0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Этим уравнениям можно удовлетворить, приняв $a_0=0$, а b_0 определив из кубичного уравнения $\frac{3}{4}b_0^3-\alpha b_0+A=0$, т. к. $\lambda=\alpha$. Корнями этого уравнения будут абсциссы точек пересечения прямой $y=\alpha b_0-A$ и кубической параболы $y=\frac{3}{4}b_0^3$. В зависимости от α будем иметь одно, два или три значения b_0. В соответствии с этим уравнение (3.1) будет иметь столько же решений периода 2π. Так как уравнение (3.1) при $\lambda=\alpha$ переходит в уравнение (3), то найденные решения уравнения (3.1) при $\lambda=\alpha$ будут решениями периода 2π для уравнения (3).

Определив из уравнения (3.4) функцию x_1 при выполнении условий (3.6), подставив значения x_0 и x_1 в уравнение (3.5) и составляя условие периодичности функции x_2, без труда определим x_2, а вместе с этим и появляющиеся неопределенные коэффициенты при $\cos t$ и $\sin t$ в решении предыдущего уравнения. Продолжая этот процесс, можно определить решение периода 2π до любой степени точности относительно α.

При рассмотрении задачи Дуффинга в [2] показывается, что величина амплитуды b_0 зависит от так называемой расстройки. В данном случае расстройка равна нулю, т. к. $\omega = 1$. Однако амплитуда b_0 оказалась зависящей от α. Таким образом, уравнения вида (3) допускают различные периодические решения периода 2π, зависящие как от расстройки, так и от коэффициента нелинейности α. В общем случае можно показать, что амплитуда колебания b_0 зависит от одновременного изменения расстройки и коэффициента нелинейности α по такому же закону, как и при изменении одной из этих величин.

Иркутский политехнический институт

Поступило
8 VI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Крылов. О применении способа последовательных приближений к нахождению решения некоторых дифференциальных уравнений колебательного движения. АН СССР, Л., 1933.
2. И. Г. Малкин. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., 1956.
3. Я. Г. Пановко. Способ прямой линеаризации в нелинейных задачах теории упругих колебаний. Инж. сб., т. XIII, 1952.
4. Л. Г. Лойцянский. Свободные колебания при наличии силы сопротивления, пропорциональной квадрату скорости. Инж. сб., т. XVIII, 1954.
5. В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. 1, 1956.
6. Л. Я. Окунев. Высшая алгебра. М.-Л., 1958.

В. Р. ПЕТУХОВ. ОБ ОДНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Для уравнения

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \lambda u\left(t, \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$t \geqslant 0$, λ — вещественное число, $x \in (-\infty, +\infty)$ ставится задача Коши $u(0, x) = \varphi(x)$. Путем замены $\frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = v(t, x)$, $\varphi'(x) = v_0(x)$ данная задача сводится к уравнению

$$v(t, x) = v_0(x + \lambda \int_0^t v(\tau, v(t, x))\, d\tau). \tag{4}$$

Доказывается теорема существования и единственности решений уравнения (4) в классе ограниченных непрерывных функций, удовлетворяющих по второму аргументу условию Липшица с некоторой константой. От уравнения (4) делается эквивалентный переход к уравнению (1). (Работа поступила в журнал „Математика“ 14. IX. 1961).