R. M. Teshev, D. S. Ushkho, On limit cycles and separatrices of a quadratic system, *Differ. Uravn.*, 1995, Volume 31, Number 6, 1096–1097

ИЮНЬ 1995 г., ТОМ 31, № 6

УДК 517.925.42

Р. М. ТЕШЕВ, Д. С. УШХО

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ И СЕПАРАТРИСАХ ОДНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

В ряде работ изучалась дифференциальная система

$$dx/dt=-my+y^2\equiv P(x,y),\quad dy/dt=ax+by+cx^2+dxy+ey^2\equiv Q(x,y) \tag{1}$$

при различных ограничениях на коэффициенты ее правых частей.

Так, в [1] при $c=0$, $a=1$, $m=1$ найдены достаточные условия того, что начало координат (0, 0) могут окружать, по крайней мере, два предельных цикла. В [2, с. 7] приведены достаточные условия появления, по крайней мере, одного грубого предельного цикла в окрестности каждого из двух фокусов одновременно или в отдельности.

В работах [3—5] изучается система (1) при $a=-1$, $m=-1$. В [3] доказывается единственность предельного цикла (1) при $d=c=0$. Единственность предельного цикла (1) доказывается при $d=0$ в [4], при этом изучается также поведение сепаратрис седел.

В [5] найдены достаточные условия отсутствия и единственности предельных циклов системы (1) при $c=0$ и изучено поведение сепаратрис седел.

В настоящей работе рассматривается система (1) при условиях

$$m>0,\ e>0,\ 0<a<c, \tag{2}$$

$$(a+dm)^2-4c(bm+m^2e)<0. \tag{3}$$

Система имеет два состояния равновесия: $A(-a/c,0)$ — седло и $O(0,0)$ — антиседло.

Теорема 1. *Пусть $d=b\geqslant 0$. Тогда при выполнении (2), (3) и неравенства*

$$\sqrt{m^2e+c-a}>m\sqrt{ma}+c-a/2 \tag{4}$$

точку O не окружает предельный цикл.

Доказательство. В рассматриваемом случае O является неустойчивым антиседлом, причем при $d=b=0$ сложным однократным фокусом, так как $\alpha_3(0,0)=$ $=ae/(2m^2\sqrt{ma})>0$ [6, с. 263].

Покажем отсутствие кратных предельных циклов. Допустим противное, т. е.

$$h\colon x=\varphi(t),\quad y=\psi(t), \tag{5}$$

где φ и ψ — периодические с периодом τ функции, есть кратный предельный цикл. Тогда должно быть выполнено условие

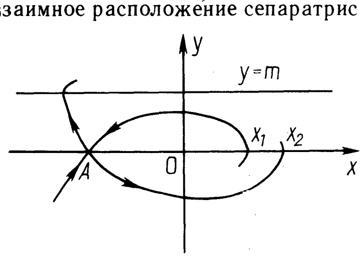
$$\int_0^\tau((1+x)b+2ey)\,dt=0, \tag{6}$$

где x и y под знаком интеграла следует заменить выражениями из (5). Поскольку h — периодическое решение (1), то имеет место равенство $\int_0^\tau(y^2-my)\,dt=0$, откуда получаем $\int_0^\tau y\,dt=\int_0^\tau(y^2/m)\,dt$. Тогда (6) можно записать в виде

$$\int_0^\tau((1+x)b+2ey^2/m)\,dt=0. \tag{7}$$

Очевидно, предельный цикл h, если он существует, расположен в полуплоскости $x>-a/c$. Поэтому выражение, стоящее под знаком интеграла (7), неотрицательно, а значит, и интеграл не может быть равен нулю.

Тем самым доказано отсутствие полуустойчивых предельных циклов системы (1) при $d=b\geqslant 0$. При $d=b=0$ взаимное расположение сепаратрис седла A изображено на рисунке.



В области G: $\begin{cases} x > -a/c, \\ y < m,\ y \neq 0 \end{cases}$ векторное поле системы с ростом b вращается по часовой стрелке, так как

$$(dy/dx)'_b = (1+x)/(y-m) < 0. \tag{8}$$

Следовательно, с увеличением b $x_1(x_2)$ уменьшается (увеличивается). Если теперь вспомнить, что при $b \geqslant 0$ O — неустойчивое антиседло, то становится очевидным отсутствие у системы и грубых предельных циклов. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Условие (4) существенно в том смысле, что оно обеспечивает включение $(b_1, b_2) \subset [-2\sqrt{ma}, 2\sqrt{ma}]$. Но (b_1, b_2) — решение неравенства (3) относительно b. Здесь $b_1 = (2c - a - 2\sqrt{m^2e + c - a})/m$, $b_2 = (2c - a + 2\sqrt{m^2e + c - a})/m$.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия (2)—(4), $d = b$. Тогда справедливы утверждения*

1) существует единственное значение параметра $b = b_3 \in (-2\sqrt{ma}, 0)$, при котором начало координат окружает, по крайней мере, один неустойчивый предельный цикл и петля сепаратрисы седла A;

2) для значений параметра $b \in (b_4, b_3)$ начало координат окружает четное число предельных циклов с учетом кратности сложных (по крайней мере, два грубых предельных цикла), причем $b_4 \in (-2\sqrt{ma}, b_3)$ соответствует моменту наличия вокруг O полуустойчивого (двукратного) предельного цикла;

3) при $b < b_4$ система не имеет предельных циклов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно неравенству (8), при уменьшении параметра b векторное поле системы вращается против часовой стрелки, т. е. $x_2(x_1)$ уменьшается (увеличивается). При переходе b к отрицательным значениям из сложного фокуса O рождается неустойчивый грубый предельный цикл, а сам фокус при этом меняет свою устойчивость [6, с. 274]. Указанный цикл с уменьшением b расширяется. При $b \leqslant -2\sqrt{ma}$ точка O — устойчивый узел, который, как известно [7], не может быть окружен предельным циклом. Следовательно, $x_2 < x_1$ при $b \leqslant -2\sqrt{ma}$. В силу непрерывного вращения векторного поля системы (1) с изменением параметра найдется единственное значение $b = b_3$, при котором $x_1 = x_2$, т. е. фокус O окружен петлей сепаратрисы седла A. Эта петля устойчива, так как $\sigma(-a/c, 0) = b_3(1 - a/c) < 0$ [6, с. 311]. Но внутри устойчивой петли система имеет устойчивый фокус. Тем самым доказано утверждение 1). При переходе b через $b = b_3$ в сторону меньших значений петля нарушается и из нее появляется устойчивый предельный цикл, который при дальнейшем уменьшении b сужается и в «момент» $b = b_4 < b_3$ сливается с внутренним неустойчивым предельным циклом. В результате появляется полуустойчивый предельный цикл вокруг O. Дальнейшее уменьшение параметра b приводит к исчезновению этого цикла. Учитывая монотонное вращение векторного поля системы, легко видеть, что при $b < b_4$ точку O не окружает предельный цикл. Теорема доказана.

Таким образом, теоремы 1 и 2 однозначно определяют взаимное расположение сепаратрис седла A.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что теоремы 1 и 2 справедливы и при $d = 0$. Конечно, при этом в формулировке теоремы 1 (теоремы 2) следует заменить условия $d = b \geqslant 0$ условиями $d = 0$, $b \geqslant 0$ (условие $d = b$ условием $d = 0$).

З а м е ч а н и е 3. Утверждение теоремы 2 при $d = 0$ никоим образом не противоречит единственности предельного цикла системы (1), доказанной в [4], так как в указанной работе рассмотрен случай четырех состояний равновесия.

В процессе изучения поведения траекторий квадратичных систем на плоскости возник вопрос существования квадратичных систем, имеющих особую точку, окруженную одновременно предельным циклом и петлей сепаратрисы седла, положительный ответ на который дан в работах [8, 9]. Примером такой системы может служить и система (1) в условиях теоремы 2, а также замечания 2 при $b = b_3$.

В связи с этим уместно поставить задачу: каково наибольшее число предельных циклов квадратичной системы, охватываемых петлей сепаратрисы седла?

Литература

1. А в е р и н Б. П. // Уч. зап. Рязан. пед. ин-та. 1968. Т. 67. С. 5—9.
2. Ш а х о в а Л. В. // Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Самарканд, 1966.
3. Ч е р к а с Л. А., Ж и л е в и ч Л. И. // Дифференц. уравнения. 1970. Т. 6, № 7. С. 1170—1178.
4. Ж и л е в и ч Л. И. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 8. С. 1525—1527.
5. Ж и л е в и ч Л. И. // Дифференц. уравнения. 1971. Т. 7, № 5. С. 782—790.
6. А н д р о н о в А. А. и др. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., 1967.
7. В о р о б ь е в А. П. // Докл. АН БССР. 1956. Т. 4, № 9. С. 369—371.
8. B a m o n R. // Proc. of AMS. 1983. Vol. 88, N 4. P. 719—726.
9. С т о л я р о в В. В. // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 9. С. 1643—1644.

Адыгейский государственный университет

Поступила в редакцию 11 марта 1994 г.