М. П. Овчинцев, Оптимальное восстановление функций класса E_p, $1 \leq p \leq \infty$, в многосвязных областях,
Сиб. матем. журн., 1996, том 37, номер 2, 338–360

https://www.mathnet.ru/smj527

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 1996. Том 37, № 2

УДК 517.5

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ КЛАССА E_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ*)

М. П. Овчинцев

Введение

Пусть X — вещественное линейное пространство $L, l_1, \dots, l_n$ — вещественные линейные функционалы, заданные на X, а W — множество, лежащее в X. В работах [1, 2] было положено начало изучению задачи оптимального восстановления значений линейного функционала L по значениям линейных функционалов $l_1, \dots, l_n$ на множестве W. Если $S(x_1, \dots, x_n)$ — любая функция n действительных переменных, то погрешностью приближения методом S линейного функционала L по значениям на множестве W линейных функционалов $l_1, \dots, l_n$ называется (см. [1, 2]) величина

$$r_n(S) = \sup_{x \in W} |L(x) - S(l_1(x), \dots, l_n(x))|. \tag{1}$$

Метод S_0 называется *наилучшим методом приближения функционала L по значениям функционалов $l_1, \dots, l_n$ на множестве W*, если

$$r_n(S_0) = \inf_S r_n(S)$$

(здесь инфимум берется по всевозможным функциям S от n переменных).

В работах [1, 2] было показано, что в случае, когда W — выпуклое и центрально-симметричное множество, среди наилучших методов имеется хотя бы один линейный $S_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j l_j(x)$, а погрешность наилучшего метода приближения равна

$$r(L, l_1, \dots, l_n) = \sup_{\substack{x \in W \\ l_1(x) = \dots = l_n(x) = 0}} |L(x)|, \tag{2}$$

В [3] результаты работ [1, 2] перенесены на случай комплексного пространства X и комплексных линейных функционалов $L, l_1, \dots, l_n$. В этой же работе решалась задача оптимального восстановления ограниченных аналитических функций в односвязной области G по их значениям в конечном числе заданных точек. В качестве X в [3] берется пространство ограниченных аналитических в G функций; в качестве

*) Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научного фонда Сороса (грант № MB 6000).

W — единичный шар этого пространства; в качестве линейных функционалов $L, l_1, \ldots, l_n$ — значения функций $f(z) \in W$ в заданных точках $z_0, z_1, \ldots, z_n$. В работе [4] аналогичная задача рассматривалась для пространств Харди H_p ($p \geqslant 1$) в единичном круге. В [3, 4] были найдены погрешность наилучшего метода приближения и коэффициенты линейного наилучшего метода.

В работах [5, 6] рассматривалась задача оптимального восстановления аналитических функций класса В. И. Смирнова E_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в круговом кольце по их значениям в конечном числе заданных точек. В этих работах изучался вид экстремальных функций в задаче о погрешности наилучшего метода приближения и приводились формулы для вычисления коэффициентов линейного наилучшего метода.

В настоящей работе исследуется задача оптимального восстановления аналитических функций класса В. И. Смирнова E_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в многосвязной области по их значениям в конечном числе заданных точек $z_1, \ldots, z_n$. (Классы E_p являются естественным обобщением классов Харди. Их теория для односвязных областей имеется в книге [7], а для многосвязных областей — в [8].) Решение задачи оптимального восстановления функций класса E_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в многосвязной области анонсировано автором в работах [9, 10]. Изучение этой задачи выявляет ряд интересных особенностей. Так, в отличие от случая единичного круга экстремальная функция в задаче о погрешности наилучшего метода приближения в многосвязной области помимо нулей в заданных точках может иметь и другие нули, а линейный наилучший метод приближения при $p = \infty$, вообще говоря, не единствен.

Содержание работы разбито на пять параграфов. В § 1 изучаются количество и расположение нулей экстремальной функции в задаче о погрешности наилучшего метода приближения ограниченных аналитических функций (класс E_∞). В § 2 исследуется вспомогательная задача о наилучшем приближении в метрике L_1 ядра Коши в классе E_1. Факты, связанные с этой задачей, используются в § 3 для изучения структуры множества линейных наилучших методов восстановления в классе E_∞; результаты § 3 основные в работе. В § 4 рассматривается вопрос об изменении коэффициентов линейных наилучших методов, когда заданные точки $z_1, \ldots, z_n$ стремятся к границе области. Оказывается, что в этом случае поправки к величине функции f в точке z_0 за счет информации о величинах $f(z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, стремятся к нулю. В § 5 исследуется задача оптимального восстановления функций класса E_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, в многосвязной области.

§ 1. О нулях экстремальной функции в задаче о погрешности наилучшего метода приближений функций в классе E_∞

Пусть G — m-связная область, ограниченная аналитическими контурами $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}, \gamma_m$ (γ_m — внешний контур; $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{m} \gamma_j$ — граница области G), а $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — различные точки, лежащие в G. Рассмотрим задачу оптимального восстановления ограниченных аналитических функций по их значениям в заданных точках $z_1, \ldots, z_n$. В этом случае надо положить

$$X = E_\infty(G), \quad W = E_\infty^1(G), \quad L(f) = f(z_0), \quad l_1(f) = f(z_1), \ldots, l_n(f) = f(z_n),$$

где $E_\infty(G)$ — пространство ограниченных аналитических в G функций, $E_\infty^1(G)$ — единичный шар пространства $E_\infty(G)$ (т. е. множество всех аналитических в G функций, ограниченных по модулю единицей). Погрешность наилучшего метода приближения находится по формуле (см. (2))

$$r(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{\substack{f \in E^1_\infty \\ f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0}} |f(z_0)|. \tag{3}$$

Если $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ — любой из линейных наилучших методов (такие методы существуют в силу общих результатов [3]), то

$$r(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{f \in E^1_\infty} \left| f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j) \right| \tag{4}$$

или

$$r(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{f \in E^1_\infty} \left| \int_\Gamma \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) f(\zeta)\, d\zeta \right|. \tag{5}$$

Пусть f^* — экстремальная функция в задаче (3) (ее существование очевидно); она же будет экстремальной в (4) и (5). Теория экстремальных задач типа (3)–(5) рассматривалась в работе [11], а также в [12]. Из результатов этих работ следует, что экстремальная функция f^* единственна с точностью до постоянного множителя $e^{i\delta}$, $\delta \in \mathbb{R}$, число N ее нулей удовлетворяет неравенствам $n \leqslant N \leqslant n + m - 1$ и $f^*(z)$ имеет вид

$$f^*(z) = e^{i\delta} \exp\left[-\sum_{j=1}^{N} P(z, z_j) \right], \tag{6}$$

где $P(z, z_j)$ — комплексная функция Грина в области G с полюсом в точке z_j. Таким образом, f^* помимо нулей в заданных точках $z_1, \ldots, z_n$ может, вообще говоря, иметь дополнительные нули $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$, $1 \leqslant k \leqslant m - 1$. Функция вида (6) отображает G на N-листный круг.

Обозначим через $\omega_l(z)$ гармоническую меру контура γ_l $(1 \leqslant l \leqslant m)$. Известно, что

$$\sum_{l=1}^{m} \omega_l(z) \equiv 1 \tag{7}$$

(см. [13]). Для того чтобы функция вида (6) была однозначной, необходимо и достаточно, чтобы $\sum\limits_{j=1}^{N} \omega_l(z_j)$ были целыми числами или, что то же самое,

$$\sum_{j=1}^{N} \omega_l(z_j) \equiv 0 \pmod 1 \quad (l = 1, \ldots, m-1). \tag{8}$$

Пусть точки $z_1, \ldots, z_N$ лежат внутри области G.

Лемма 1. *Если суммы $\sum\limits_{j=1}^{N} \omega_l(z_j)$ $(l = 1, \ldots, m-1)$ — целые числа, то $N \geqslant m$.*

Доказательство. Очевидно, что

$$\omega_l(z_1)+\dots+\omega_l(z_N)\geqslant 1 \tag{9}$$

при всех значениях $l=1,\dots,m$ (из (7) вытекает, что $\sum\limits_{j=1}^{N}\omega_m(z_j)$ — целое число). Сложив (9) по всем индексам $l=1,\dots,m$ с учетом (7), получим $N\geqslant m$.

Вернемся к задаче (3). В дальнейшем точку z_0 и число n считаем фиксированными. Пусть $\{z_1^{(r)},\dots,z_n^{(r)}\}$ — некоторая последовательность наборов по n различных точек, лежащих в G ($r=1,2\dots$). Для задачи (3) с заданными точками $z_1^{(r)},\dots,z_n^{(r)}$ (здесь фиксируется r) через $z_{n+1}^{(r)},\dots,z_{n+k_r}^{(r)}$ обозначим дополнительные нули экстремальной функции $f^*(z)$ ($0\leqslant k_r\leqslant m-1$).

Лемма 2. *Если точки $\{z_j^r\}$, $j=1,\dots,n$, приближаются к границе Γ (при $r\to\infty$), то и дополнительные нули (если они есть) экстремальных функций задачи* (3) *приближаются к границе Γ.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда, переходя в случае необходимости к подпоследовательности экстремальных функций задачи (3) (обозначений не меняем), можно считать, что все эти функции имеют одно и то же количество k дополнительных нулей ($1\leqslant k\leqslant m-1$) $z_{n+1}^{(r)},\dots,z_{n+k}^{(r)}$, причем $z_{n+1}^{(r)},\dots,z_{n+s}^{(r)}\to\Gamma$, а $z_{n+s+1}^{(r)},\dots,z_{n+k}^{(r)}$ стремятся к точкам $z_{n+s+1},\dots,z_{n+k}$, лежащим внутри области G:

$$z_{n+s+1}^{(r)}\to z_{n+s+1},\dots,z_{n+k}^{(r)}\to z_{n+k},\quad z_j^{(r)}\to\zeta_j,\ j=1,\dots,n;$$
$$z_{n+j}^{(r)}\to\zeta_{n+j},\ j=1,\dots,s,$$

где точки ζ_j, ζ_{n+j} лежат на границе Γ. В силу (8)

$$\sum_{j=1}^{n}\omega_l(z_j^r)+\sum_{j=1}^{s}\omega_l(z_{n+j}^r)+\sum_{j=s+1}^{k}\omega_l(z_{n+j}^r)=N_l^r \tag{10}$$

— целые положительные числа при $l=1,\dots,m-1$ и всех значениях $r=1,2,\dots$. При достаточно больших r будет $N_l^r=N_l$, $l=1,\dots,m-1$. При $r\to\infty$ первая и вторая суммы в (10) стремятся к целым неотрицательным числам. Поэтому

$$\sum_{j=s+1}^{k}\omega_l(z_{n+j})=N_l-\sum_{j=1}^{n}\omega_l(z_j)-\sum_{j=1}^{s}\omega_l(\zeta_{n+j})$$

— целое положительное число (при $1\leqslant l\leqslant m-1$). Но тогда по лемме 1 $k-s\geqslant m$, что противоречит неравенству $k\leqslant m-1$. Значит, когда точки $\{z_j^r\}$ приближаются к границе Γ, дополнительные нули соответствующих экстремальных функций задачи (3) (если таковые есть) не могут сгущаться внутри области и стремятся к Γ.

Лемма 3. *Существует такая окрестность внешнего контура γ_m, что для любых различных точек $z_1,\dots,z_n$, лежащих в ней, экстремальная функция в задаче* (3) *имеет ровно $m-1$ дополнительных нулей; причем когда $z_1^r,\dots,z_n^r$ стремятся к γ_m, дополнительные нули $z_{n+1}^r,\dots,z_{n+m-1}^r$ (при соответствующей нумерации) ведут себя следующим образом:*

$$z_{n+1}^r\to\gamma_1,\dots,z_{n+m-1}^r\to\gamma_{m-1}\quad (r\to\infty).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что когда точки $z_1^r, \ldots, z_n^r$ стремятся к γ_m, к некоторому внутреннему контуру γ_l $(1 \leqslant l \leqslant m-1)$ не стремятся дополнительные нули экстремальных функций задачи (3). Будем считать также, что количество дополнительных нулей равно постоянному числу k, и в случае необходимости будем переходить к подпоследовательности этих функций, обладающих указанным свойством. Соотношение

$$\sum_{j=1}^{n+k} \omega_l(z_j^r) \geqslant 1$$

сразу ведет к противоречию, так как все члены суммы стремятся к нулю. Отсюда немедленно следуют все утверждения леммы.

Лемма 4. *Если экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_n$ имеет различные дополнительные нули $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$ $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$, то такая же экстремальная функция будет в задаче (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_n$, $z_{n+1}, \ldots, z_{n+s}$, где $s \leqslant k$; причем в этой задаче у экстремальной функции будет ровно $k-s$ дополнительных нулей — $z_{n+s+1}, \ldots, z_{n+k}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\sup_{\substack{f \in E_\infty^1 \\ f(z_1)=\cdots=f(z_n)=f(z_{n+1})=\cdots=f(z_{n+s})=0}} |f(z_0)| \leqslant \sup_{\substack{f \in E_\infty^1 \\ f(z_1)=\cdots=f(z_n)=0}} |f(z_0)|. \tag{11}$$

Если экстремальная функция в правой части (11) имеет в качестве нулей $z_{n+1}, \ldots, z_{n+s}$, в (11) выполняется равенство. Ясно, что экстремальной функцией задачи (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+s}$ будет $f^*(z)$. В рассматриваемом случае $f^*(z)$ имеет $k-s$ дополнительных нулей — $z_{n+s+1}, \ldots, z_{n+k}$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (3) имеет своими нулями только заданные точки $z_1, \ldots, z_n$ тогда и только тогда, когда суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_l(z_j)$ являются целыми числами при всех значениях $l = 1, \ldots, m-1$, при этом экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (3) записывается в виде (6) (где $N = n$).*

Если хотя бы одна из сумм $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_l(z_j)$ $(l = 1, \ldots, m-1)$ не является целым числом, то экстремальная функция задачи (3) имеет дополнительные нули $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$ $(1 \leqslant k \leqslant m-1)$ и представляется формулой (6) (в которой $N = n+k$).

Если $n \geqslant m$, то для любого целого числа k, удовлетворяющего неравенству $0 \leqslant k \leqslant m-1$, найдутся такие точки $z_1, \ldots, z_n$, при которых экстремальная функция задачи (3) имеет в точности k дополнительных нулей.

Если $1 \leqslant n \leqslant m-1$, то экстремальная функция задачи (3) имеет не менее $m-n$ дополнительных нулей; причем для любого заданного целого числа k, удовлетворяющего неравенствам $m-n \leqslant k \leqslant m-1$, найдутся такие точки $z_1, \ldots, z_n$, при которых экстремальная функция задачи (3) имеет в точности k дополнительных нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вначале случай, когда экстремальная функция задачи (3) не имеет дополнительных нулей. Тогда $f^*(z)$ имеет вид (6) (где $N = n$, $n \geqslant m$), и, значит, суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} \omega_l(z_j)$ являются целыми числами при всех значениях $l = 1, \ldots, m-1$. Обратно, пусть

$z_1, \ldots, z_n$ — различные точки, лежащие в области G, такие, что суммы $\sum_{j=1}^{n} \omega_l(z_j)$ являются целыми числами при всех значениях $l = 1, \ldots, m-1$. Докажем, что экстремальная функция задачи (3) не имеет дополнительных нулей. Для этого рассмотрим функцию $f^*(z)$, представимую формулой (6) (в ней $N = n$). Функция $f^*(z)$, очевидно, удовлетворяет условиям $f^*(z) \in E^1_\infty$, $f(z_1) = \cdots = f(z_n) = 0$. Если бы $f^*(z)$ не была экстремальной в задаче (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_n$, то экстремальной функцией этой задачи явилась бы некоторая функция $\tilde{f}(z)$ вида (6) (при $N = n + k$), где $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$ — ее дополнительные нули. Однако

$$|f^*(z_0)| = \exp\left[-\sum_{j=1}^{n} g(z_0, z_j)\right] > \exp\left[-\sum_{j=1}^{n+k} g(z_0, z_j)\right] = |\tilde{f}(z_0)|.$$

А это противоречит тому, что $\tilde{f}(z)$ является экстремальной функцией задачи (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_n$.

Пусть $n \geqslant m$ и k — любое целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leqslant k \leqslant m - 1$. Докажем, что найдутся такие точки $z_1, \ldots, z_n$, при которых экстремальная функция задачи (3) имеет в точности k дополнительных нулей.

(а) Пусть $k = m - 1$. В этом случае утверждение теоремы прямо вытекает из леммы 3.

(б) Пусть $k = 0$. Докажем, что найдутся такие точки $z_1, \ldots, z_n$, при которых экстремальная функция задачи (3) не имеет дополнительных нулей. Для этого возьмем $n - (m - 1)$ точек $z_1, \ldots, z_{n-(m-1)}$, которые лежат достаточно близко к внешнему контуру γ_m. Экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_{n-(m-1)}$ имеет согласно лемме 3 $m - 1$ дополнительных нулей; обозначим их через $z_{n-m+2}, \ldots, z_n$. Отсюда $\sum_{j=1}^{n} \omega_l(z_j)$ — целые числа при всех значениях $l = 1, \ldots, m - 1$. Но по уже доказанной части теоремы $f^*(z)$ — экстремальная функция задачи (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_n$, и, следовательно, в этом случае дополнительных нулей не возникает.

(в) Рассмотрим случай, когда $0 < k < m - 1$ (здесь можно считать, что $m > 2$). Выберем точки $z_1, \ldots, z_{n-(m-k-1)}$, лежащие достаточно близко к внешнему контуру γ_m. В силу леммы 3 экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (3) с заданными точками имеет $m - 1$ различных дополнительных нулей; обозначим их через $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}, z_{n+k+1}, \ldots, z_{n+m-1}$. Сравним задачи (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_{n-(m-k-1)}$ и $z_1, \ldots, z_{n-(m-k-1)}, z_{n+k+1}, \ldots, z_{n+m-1}$. Во второй из этих задач число заданных точек равно n. В силу леммы 4 получаем, что экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_{n-(m-k-1)}$, $z_{n+k+1}, \ldots, z_{n+m-1}$ имеет ровно k дополнительных нулей $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$.

Пусть теперь $1 \leqslant n \leqslant m - 1$. Тогда количество дополнительных нулей k экстремальной функции задачи (3) удовлетворяет неравенствам

$$m - n \leqslant k \leqslant m - 1. \tag{12}$$

В самом деле, так как функция $f^*(z)$ вида (6), то $n + k \geqslant m$ (см. [12]). Отсюда и вытекает (12).

Пусть k — некоторое положительное число, удовлетворяющее неравенствам (12). Нам надо убедиться в том, что найдутся такие точки $z_1, \ldots, z_n$, при которых экстремальная функция задачи (3) имеет в точности k дополнительных нулей. В случае, когда $k = m-1$, утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 3. Пусть k удовлетворяет неравенствам $m-n \leqslant k < m-1$. Выберем точки $z_1, \ldots, z_{n+k-m+1}$, лежащие достаточно близко к внешнему контуру γ_m. Экстремальная функция в задаче (3) в этом случае имеет согласно лемме 3 дополнительные нули $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}, \ldots, z_{n+m-1}$. Сравним задачи (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_{n+k-m+1}$ и $z_1, \ldots, z_{n+k-m+1}, z_{n+k+1}, \ldots, z_{n+m-1}$. Число заданных точек во второй задаче равно n. Из леммы 4 вытекает, что экстремальная функция $f^*(z)$ в задаче (3) с заданными точками $z_1, \ldots, z_{n+k-m+1}, z_{n+k+1}, \ldots, z_{n+m-1}$ имеет в точности k дополнительных нулей — $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$. Теорема полностью доказана.

Замечание. В лемме 3 говорилось об окрестности внешнего контура γ_m. Понятно, что аналогичное предложение будет иметь место для любого другого граничного контура γ_l $(1 \leqslant l \leqslant m-1)$.

В заключение этого параграфа отметим, что, основываясь на леммах 1–3, можно изучить движение нулей экстремальных функций в других экстремальных задачах. Приведем, например, одно утверждение для хорошо известной задачи о лемме Шварца. Напомним, что так называется экстремальная задача

$$\sup_{f \in E^1_\infty(G)} |f'(z_0)|, \tag{13}$$

где z_0 — любая заданная точка области G. Известно, что экстремальная функция задачи (13) единственна с точностью до постоянного множителя $e^{i\delta}$, $\delta \in \mathbb{R}$, и имеет в точности m нулей, один из которых совпадает с точкой z_0, а остальные нули отличны от z_0 (в дальнейшем будем называть их по-прежнему «дополнительными» нулями). Экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (13) представима через свои нули $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ по формуле (6) (при $n = m$); та из экстремальных функций задачи (13), для которой $f^{*\prime}(z_0) > 0$, называется функцией Альфорса (относительно этой задачи см. [13]).

Предложение 1. *Существуют такие окрестности D_l граничных контуров γ_l, $l = 1, \ldots, m$, что если $z_0 \in D_l$, то дополнительные нули функции Альфорса в задаче о лемме Шварца для точки z_0 расположены по одному в областях D_j, $j \neq l$.*

Доказательство. Высказанное предложение эквивалентно следующему: если точки z_0^ν ($z_0^\nu \in G$, $\nu = 1, 2, \ldots$) приближаются к контуру γ_l, то нули $z_1^\nu, \ldots, z_j^\nu, \ldots, z_m^\nu$, $j \neq l$, функции Альфорса $f^\nu(z)$ с заданной точкой z_0^ν ведут себя следующим образом (при соответствующей нумерации):

$$z_j^\nu \to \gamma_j, \quad j = 1, \ldots, m, \quad j \neq l.$$

Убедимся в истинности последнего утверждения. Экстремальная функция $f^\nu(z)$ задачи (13) имеет вид

$$f^\nu(z) = e^{i\delta} \exp\left[-\sum_{j=1}^{m} P\bigl(z, z_j^\nu\bigr)\right],$$

где $z_l^\nu = z_0^\nu$, а δ такое действительное число, при котором $f^{\nu\prime}\bigl(z_0^\nu\bigr) > 0$. Так как суммы $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega_i\bigl(z_j^\nu\bigr)$ являются целыми числами при всех значениях $i = 1, \ldots, m-1$, то из лемм 1–3 немедленно вытекает справедливость высказанного утверждения.

Еще одним применением лемм настоящего параграфа является простое доказательство (известной) теоремы о существовании конформного отображения области G на многолистный единичный круг.

Предложение 2. *Пусть G — любая m-связная область, ограниченная аналитическими контурами. Тогда для любого заданного целого положительного числа N $(N \geqslant m)$ найдется такая аналитическая функция, которая отображает G на N-листный единичный круг.*

Доказательство. Возьмем любую точку z_0, $z_0 \in G$, и $N-m+1$ различных точек $z_1, \dots, z_{N-m+1}$, лежащих достаточно близко к внешнему контуру области G. Экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (3) с заданными точками $z_1, \dots, z_{N-m+1}$ имеет согласно лемме 3 в точности $m-1$ дополнительных нулей — $z_{N-m+2}, \dots, z_N$ вида (6). Функция $f^*(z)$, очевидно, отображает G на N-листный круг.

§ 2. Одна специальная задача о наилучшем приближении в метрике L_1

Имея в виду дальнейшее изучение задачи оптимального восстановления ограниченных аналитических функций в многосвязных областях, рассмотрим вначале следующую задачу (см. [12]) наилучшего приближения в метрике L_1:

$$I = \inf_{\substack{\Phi(\zeta)=-1/(\zeta-z_0)+\varphi(\zeta)\\ \varphi\in E_1(G)}} \int_\Gamma |\Phi(\zeta)|\,ds. \tag{14}$$

В соответствии с результатами работы [12]

$$I = \sup_{f\in E^1_\infty} \left| \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z_0} f(\zeta)\,d\zeta \right| = 2\pi. \tag{15}$$

В [12] показано, что одной из экстремальных функций задачи (14) будет $P'(\zeta, z_0)$. Там же отмечено, что это не единственная экстремальная функция. Мы установим вид всех экстремальных функций задачи (14). Положим $W_l(z) = \omega_l(z) + i\widetilde{\omega}_l(z)$ $(l = 1, \dots, m)$, где $\widetilde{\omega}_l(z)$ — гармонически сопряженная к $\omega_l(z)$ функция.

Лемма 5. *Любая из экстремальных функций $\Phi^*(z)$ задачи (14) имеет вид*

$$\Phi^*(z) = P'(z, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z), \tag{16}$$

где λ_l $(l = 1, \dots, m-1)$ — некоторые действительные числа.

Доказательство. Представим экстремальные функции $P'(z, z_0)$ и $\Phi^*(z)$ задачи (14) в виде

$$P'(z, z_0) = -\frac{1}{z - z_0} + \varphi_0(z), \quad \Phi^*(z) = -\frac{1}{z - z_0} + \varphi_1(z), \tag{17}$$

где $\varphi_0(z), \varphi_1(z) \in E_1(G)$. Так как экстремальными функциями в задаче (15) являются константы $e^{i\delta}$, $\delta \in \mathbb{R}$, а

$$\int_\Gamma i\left(-\frac{1}{\zeta - z_0}\right) d\zeta = 2\pi,$$

то почти везде на границе Γ имеют место соотношения (см. [12])

$$i\left[-\frac{1}{\zeta - z_0} + \varphi_0(\zeta)\right] d\zeta = \left|-\frac{1}{\zeta - z_0} + \varphi_0(\zeta)\right| ds, \tag{18}$$

$$i\left[-\frac{1}{\zeta - z_0} + \varphi_1(\zeta)\right] d\zeta = \left|-\frac{1}{\zeta - z_0} + \varphi_1(\zeta)\right| ds. \tag{19}$$

Функция $\varphi_*(z) = \varphi_1(z) - \varphi_0(z)$ аналитична в замкнутой области $\overline{G}$. Действительно, вычитая из равенства (19) равенство (18), видим, что $i\varphi_*(\zeta)\,d\zeta$ принимает вещественные значения почти везде на границе Γ. Так как $\varphi_* \in E_1(G)$, отсюда и следует справедливость высказанного выше утверждения (см. [12]: для граничных значений функций из E_1 можно применять принцип симметрии).

Рассмотрим в замкнутой области $\overline{G}$ аналитическую (многозначную) функцию

$$\Psi_*(z) = i\int_{z_0}^{z} \varphi_*(z)\,dz,$$

где $z \in \overline{G}$. Так как $i\varphi_*(\zeta)\,d\zeta$ принимает вещественные значения, когда $\zeta \in \Gamma$, то приращение $\Psi_*(z)$, взятое на любой дуге S_l ($S_l \subset \gamma_l$, $l = 1, \dots, m$), является действительным числом. Отсюда

$$\Delta_{S_l} \operatorname{Im} \Psi_* = 0.$$

Поэтому гармоническая функция $\operatorname{Im}\Psi_*$ не имеет периодов при обходе граничных контуров и, значит, однозначна в G. Кроме того, она принимает постоянные значения на каждом контуре γ_l ($l = 1, \dots, m$). Следовательно,

$$\operatorname{Im}\Psi_*(z) = \sum_{j=1}^{m} b_j \omega_j(z),$$

где $b_1, b_2, \dots, b_m$ — некоторые действительные числа. В свою очередь, отсюда следует, что

$$\int_{z_0}^{z} \varphi_*(z)\,dz = \sum_{j=1}^{m} b_j W_j(z) + i\delta_0,$$

где $\delta_0 \in \mathbb{R}$. Значит,

$$\varphi_*(z) = \sum_{j=1}^{m} b_j W_j'(z).$$

Или, учитывая, что $\sum\limits_{j=1}^{m} W_j'(z) \equiv 0$ (см. (7)), получим

$$\varphi_*(z) = -\sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(z),$$

где $\lambda_j = b_m - b_j$, $j = 1, \dots, m-1$. Отсюда

$$\Phi^*(z) = P'(z, z_0) - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(z).$$

Лемма доказана.

Итак, экстремальная задача (14) заменилась такой:

$$\min_{\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}} \int_{\Gamma} \left| P'(\zeta, z_0) - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(\zeta) \right| ds. \tag{20}$$

Перейдем к изучению множества Λ точек $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1})$ в $\mathbb{R}^{m-1}$, для которых линейная комбинация $\sum\limits_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(\zeta)$ дает экстремальную функцию $P'(z, z_0) - \sum\limits_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(z)$ в задаче (20). Иными словами, рассмотрим множество наилучших приближений в пространстве L_1 линейными комбинациями $\sum\limits_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(\zeta)$ функции $P'(\zeta, z_0)$:

$$(\lambda) \in \Lambda \Leftrightarrow \int\limits_{\Gamma} \left| P'(\zeta, z_0) - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(\zeta) \right| ds$$
$$= \min_{\mu_1, \ldots, \mu_{m-1}} \int\limits_{\Gamma} \left| P'(\zeta, z_0) - \sum_{j=1}^{m-1} \mu_j W_j'(\zeta) \right| ds.$$

Лемма 6. *Для того чтобы $(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \Lambda$, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих трех условий*:

$$\int\limits_{\Gamma} \left| P'(\zeta, z_0) - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(\zeta) \right| ds = 2\pi, \tag{21}$$

$$i \left[P'(\zeta, z_0) - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(\zeta) \right] d\zeta = \left| P'(\zeta, z_0) - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(\zeta) \right| ds, \tag{22}$$

$$i \left[P'(\zeta, z_0) - \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j W_j'(\zeta) \right] d\zeta \geqslant 0. \tag{23}$$

Доказательство. Равенство (21) немедленно следует из (15) и (16). Формула (22) совпадает с (19). Неравенство (23) равносильно (22).

Обозначим через $\|q_{jl}\|$ обратную матрицу к (невырожденной) матрице периодов $\|\pi_{jl}\|$, $j = 1, \ldots, m-1$; $l = 1, \ldots, m-1$, гармонических мер (см. [13]). Далее, пусть $M = \{(x_1, \ldots, x_{m-1}) : -1 \leqslant x_i \leqslant 1, i = 1, \ldots, m-1\}$ — единичный куб в пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$, а $V = A(M)$ — образ единичного куба M при линейном отображении A, где A определяется матрицей $2\pi\|q_{jl}\|$ (V — выпуклый многогранник).

Предложение 3. *Множество Λ является выпуклым компактом в $\mathbb{R}^{m-1}$, включающим начало $O = (0, \ldots, 0)$ в качестве внутренней точки и содержащимся в многограннике V.*

Доказательство. Множество $D_0 = \left\{ \sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z), (\lambda) \in \Lambda \right\}$ есть множество наилучших приближений функции $P'(z, z_0)$ в пространстве L_1 линейными комбинациями $\sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z)$. Хорошо известно (см. [14, 15]), что D_0 — компактное выпуклое множество в L_1. Отображение $D_0 \to \Lambda$, $\sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z) \to (\lambda)$, гомеоморфно, так как в конечномерном пространстве нормы эквивалентны. Поэтому и Λ — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{m-1}$.

Очевидно, что $O \in \Lambda$. Покажем, что O — внутренняя точка Λ (ср. [12, с. 32]). Возьмем числа $\Delta_l > 0$ ($l = 1, \ldots, m-1$) столь малыми, чтобы при всех λ_l, $|\lambda_l| \leqslant \Delta_l$ $(l = 1, \ldots, m-1)$, выполнялось неравенство

$$\max_{\zeta\in\Gamma}\left|\sum_{l=1}^{m-1}\lambda_l W_l'(\zeta)\right| < \min_{\zeta\in\Gamma}|P'(\zeta, z_0)|.$$

Такие числа найдутся, так как $|P'(\zeta, z_0)| > 0$ на Γ (см. [12]) и по непрерывности $|P'(\zeta, z_0)| \geqslant m_0 > 0$ на Γ при подходящем m_0. Поскольку $iP'(\zeta, z_0)\,d\zeta > 0$ и $i\sum\limits_{l=1}^{m-1}\lambda_l W_l'(\zeta)\,d\zeta$ вещественны при вещественных λ_l (см. [12]), то

$$i\left[P'(\zeta, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1}\lambda_l W_l'(\zeta)\right] d\zeta = \left|P'(\zeta, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1}\lambda_l W_l'(\zeta)\right| ds.$$

Следовательно, функция $P'(\zeta, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1}\lambda_l W_l'(\zeta)$ является экстремальной функцией задачи (14) (см. лемму 6). Отсюда точки (λ), где $|\lambda_l| \leqslant \Delta_l$, принадлежат Λ. Поэтому O — внутренняя точка множества Λ.

Докажем, что $\Lambda \subset V$. Пусть $(\lambda) \in \Lambda$. Проинтегрируем равенство (22) по контуру γ_l. Получим

$$i\int_{\gamma_l} P'(\zeta, z_0)\,d\zeta - i\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\int_{\gamma_l} W_j'(\zeta)\,d\zeta = \int_{\gamma_l}\left|P'(\zeta, z_0) - \sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j W_j'(\zeta)\right| ds. \qquad (24)$$

Но (см. [12, 13])

$$\int_{\gamma_l} P'(\zeta, z_0)\,d\zeta = -2\pi i\omega_l(z_0), \qquad \int_{\gamma_l} W_j'(\zeta)\,d\zeta = i\pi_{jl},$$

где $l = 1, \ldots, m-1$. Поэтому (24) можно переписать так:

$$\sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j\pi_{jl} = 2\pi(\varepsilon_l - \omega_l(z_0)),$$

где

$$\varepsilon_l = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_l}\left|P'(\zeta, z_0) - \sum_{j=1}^{m-1}\lambda_j W_j'(\zeta)\right| ds.$$

В силу (21) $0 < \varepsilon_l < 1$. Ясно, что точка $(\varepsilon_1 - \omega_1(z_0), \ldots, \varepsilon_{m-1} - \omega_{m-1}(z_0))$ лежит внутри единичного куба M. Из последних равенств вытекает, что

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_{m-1}\end{pmatrix} = 2\pi\|q_{jl}\|\begin{pmatrix}\varepsilon_1 - \omega_1(z_0)\\ \vdots\\ \varepsilon_{m-1} - \omega_{m-1}(z_0)\end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $\Lambda \subset V$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Нули функций* $P'(z, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1}\lambda_l W_l'(z)$ *и* $P'(z, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1}\tilde\lambda_l W_l'(z)$, *где* $(\lambda), (\tilde\lambda) \in \Lambda$, *совпадают в том и только том случае, когда* $\lambda_l = \tilde\lambda_l$ *при всех значениях* $l = 1, \ldots, m-1$.

Доказательство. Функция

$$F(z) = \frac{P'(z, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z)}{P'(z, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1} \tilde{\lambda}_l W_l'(z)}$$

регулярна в замкнутой области $\overline{G}$ и принимает неотрицательные значения на Γ (см. (23)). Отсюда $F(z) \equiv \text{const}$. Действительно, так как $\operatorname{Im} F(\zeta) = 0$, когда $\zeta \in \Gamma$, то $\operatorname{Im} F(z) \equiv 0$, $z \in \overline{G}$; поэтому $F(z) \equiv \text{const}$. Так как $F(z_0) = 1$, то $F(z) \equiv 1$. Отсюда

$$\sum_{l=1}^{m-1} (\tilde{\lambda}_l - \lambda_l) W_l'(z) \equiv 0,$$

и поэтому $\tilde{\lambda}_l = \lambda_l$ при всех значениях $l = 1, \ldots, m-1$.

Предложение 4. *Точка $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{m-1}^*)$ лежит на границе множества Λ тогда и только тогда, когда хотя бы один из нулей функции $P'(z, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(z)$ лежит на границе области G.*

Доказательство. Пусть точка $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{m-1}^*)$ лежит на границе множества Λ. Убедимся, что в этом случае хотя бы один из нулей функции $P'(z, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(z)$ лежит на границе Γ. Предположим противное: все нули этой функции лежат внутри G. Тогда

$$\min_{\zeta \in \Gamma} \left| P'(\zeta, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(\zeta) \right| > 0. \tag{25}$$

Экстремальная функция $P'(\zeta, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(\zeta)$ задачи (14) удовлетворяет соотношению

$$i \left[P'(\zeta, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(\zeta) \right] d\zeta = \left| P'(\zeta, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(\zeta) \right| ds.$$

Из последнего соотношения и (25) вытекает, что найдутся такие положительные числа $\Delta_1, \ldots, \Delta_{m-1}$, при которых

$$i \left[P'(\zeta, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(\zeta) - \sum_{l=1}^{m-1} \tilde{\lambda}_l W_l'(\zeta) \right] d\zeta$$
$$= \left| P'(\zeta, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(\zeta) - \sum_{l=1}^{m-1} \tilde{\lambda}_l W_l'(\zeta) \right| ds,$$

где $\tilde{\lambda}_1, \ldots, \tilde{\lambda}_{m-1}$ — любые действительные числа, удовлетворяющие неравенствам $|\tilde{\lambda}_j| \leqslant \Delta_j$, $j = 1, \ldots, m-1$; $\zeta \in \Gamma$. Значит, функция $P'(\zeta, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1} (\lambda_l^* + \tilde{\lambda}_l) W_l'(\zeta)$ также является экстремальной функцией задачи (14), а потому точки $(\lambda_1^* + \tilde{\lambda}_1, \ldots, \lambda_{m-1}^* + \tilde{\lambda}_{m-1})$ принадлежат множеству Λ.

Следовательно, точка $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{m-1}^*)$ лежит внутри множества Λ. Получаем противоречие.

Обратно, пусть хотя бы один из нулей функции $P'(z, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(z)$ лежит на Γ. Докажем, что точка $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{m-1}^*)$ лежит на границе множества Λ. Обозначим через ζ_0 нуль функции $P'(z, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(z)$, лежащий на границе. Пусть вначале $\zeta_0 \in \gamma_{l_0}$ $(1 \leqslant l_0 \leqslant m-1)$. Предположим, что точка $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{m-1}^*)$ лежит внутри множества Λ. Тогда найдется такое положительное число Δ^*, при котором точки $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{l_0}^* + \tilde{\lambda}, \ldots, \lambda_{m-1}^*)$, где $|\tilde{\lambda}| \leqslant \Delta^*$, также лежат внутри Λ. Отсюда

$$i\left[P'(\zeta, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l^* W_l'(\zeta) - (\lambda_{l_0}^* + \tilde{\lambda}) W_{l_0}'(\zeta)\right] d\zeta \geqslant 0,$$

когда $\zeta \in \Gamma$. Из последнего неравенства получаем, что

$$-i\tilde{\lambda} W_{l_0}'(\zeta_0)\frac{d\zeta}{ds}(\zeta_0) \geqslant 0$$

при всех значениях $\tilde{\lambda}$, $|\tilde{\lambda}| \leqslant \Delta^*$. С другой стороны, так как $W_{l_0}'(\zeta_0)\frac{d\zeta}{ds}(\zeta_0) \neq 0$ (см. [12]), то $-i\tilde{\lambda} W_{l_0}'(\zeta_0)\frac{d\zeta}{ds}(\zeta_0)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, когда $\tilde{\lambda}$ пробегает отрезок $[-\Delta^*, \Delta^*]$. Получаем противоречие. Поэтому точка $(\lambda_1^*, \ldots, \lambda_{m-1}^*)$ лежит на границе множества Λ.

В случае, когда $\zeta_0 \in \gamma_m$, доказательство будет аналогичным: можно рассмотреть, например, точки $(\lambda_1^* + \tilde{\lambda}, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m-1}^*)$, лежащие в Λ, где $|\tilde{\lambda}| \leqslant \Delta^*$, а Δ^* — достаточно малое положительное число.

§ 3. Наилучшие методы восстановления ограниченных аналитических функций

В настоящем параграфе мы изучим вопрос единственности или множественности линейных наилучших методов восстановления и приведем формулы для нахождения коэффициентов этих методов.

Основным объектом изучения в этом параграфе является множество Δ точек $(c) = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n$ таких, что $\sum\limits_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ — линейный наилучший метод восстановления значений $f(z_0)$, $f \in E_\infty^1$:

$$\Delta = \left\{(c) = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{C}^n : \max_{f \in E_\infty^1} \left| f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j)\right| \right.$$
$$\left. = \min_{d_1, \ldots, d_n} \max_{f \in E_\infty^1} |f(z_0) - (d_1 f(z_1) + \cdots + d_n f(z_n))| \right\}.$$

Положив, как в § 1, $L(f) = f(z_0)$, $l_1(f) = f(z_1), \ldots, l_n(f) = f(z_n)$, будем иметь

$$(c) \in \Delta \Leftrightarrow \left\| L - \sum_{j=1}^{n} c_j l_j \right\|_{E_\infty} = \min_{d_1, \ldots, d_n} \left\| L - \sum_{j=1}^{n} d_j l_j \right\|_{E_\infty}.$$

Предложение 5. *Множество наборов коэффициентов линейных наилучших методов — выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$.*

Доказательство немедленно следует из того, что $\sum_{j=1}^{n} c_j l_j$ дает наилучшее приближение L среди элементов подпространства $\sum_{j=1}^{n} d_j l_j$ и повторяет изложенное при установлении предложения 3.

Сначала рассмотрим случай, где гарантировано, что Δ состоит из единственной точки.

Предложение 6. *Если экстремальная функция $f^*(z)$ задачи* (3) *имеет $m-1$ дополнительных нулей в области G, то линейный наилучший метод приближения $\sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ единствен; причем все его коэффициенты c_j не равны нулю.*

Доказательство. Пусть $\sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ — какой-то линейный наилучший метод; $\varphi^*(z)$ — экстремальная функция задачи

$$\inf_{\varphi \in E_1(G)} \int_{\Gamma} \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi(\zeta) \right| ds. \tag{26}$$

Согласно [12] экстремальные функции $f^*(z)$ (выбирается та из них, для которой $f^*(z_0) > 0$) и $\varphi^*(z)$ удовлетворяют почти везде на границе Γ соотношению

$$f^*(\zeta) \left[\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi^*(\zeta) \right] d\zeta = \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi^*(\zeta) \right| ds. \tag{27}$$

Функция

$$R(z) = f^*(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z - z_j} \right) - \varphi^*(z) \right] \tag{28}$$

аналитична в $\overline{G}$ (см. [12]), за исключением точки z_0, в которой $R(z)$ имеет простой полюс. На границе Γ

$$R(\zeta)\, d\zeta \geqslant 0. \tag{29}$$

Предположим, что какой-то из коэффициентов c_j, $1 \leqslant j \leqslant n$, обращается в нуль. Пусть, например, $c_1 = 0$. Тогда, с одной стороны, $R(z)$ имеет не менее m нулей, а с другой, в силу (29) число нулей $R(z)$ должно быть в точности равно $m-1$. Действительно, это вытекает из равенств

$$\Delta_{\gamma_j} R(\zeta) = -\Delta_{\gamma_j} d\zeta = 2\pi, \quad j = 1, \ldots, m-1;$$
$$\Delta_{\gamma_m} R(\zeta) = -\Delta_{\gamma_m} d\zeta = -2\pi.$$

Получили противоречие. Следовательно, $c_j \neq 0$, $j = 1, \ldots, n$.

Пусть $\sum_{j=1}^{n} c_j^{(1)} f(z_j)$ и $\sum_{j=1}^{n} c_j^{(2)} f(z_j)$ — два линейных наилучших метода, а $\varphi_1^*(z)$ и $\varphi_2^*(z)$ — экстремальные функции задачи (26) для первого и второго методов соответственно. Построим функции $R_i(z)$, $i = 1, 2$, аналогичные (28), для двух наших методов. Нули $R_i(z)$, $i = 1, 2$, совпадают с дополнительными нулями $z_{n+1}, \dots, z_{n+m-1}$ функции $f^*(z)$. Отсюда следует, что дробь $F(z) = R_1(z)/R_2(z)$ аналитична в $\overline{G}$. На Γ ее значения положительны (см. (29)). Отсюда (см. § 2) $F(z) \equiv \mathrm{const}$. Так как $F(z_0) = 1$, то $F(z) \equiv 1$. Сократив на $f^*(z)$, получаем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{c_j^{(1)}}{z - z_j} - \varphi_1^*(z) \equiv \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j^{(2)}}{z - z_j} - \varphi_2^*(z),$$

и, значит, $c_j^{(1)} = c_j^{(2)}$, $j = 1, \dots, n$.

Множество Δ линейных наилучших методов оказывается тесно связанным с другим множеством, лежащим в пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$. Введем это множество. Если экстремальная функция $f^*(z)$ имеет дополнительные нули $z_{n+1}, \dots, z_{n+k}$, то определим множество $\Lambda_0 = \Lambda_0(z_{n+1}, \dots, z_{n+k}) \subset \mathbb{R}^{m-1}$:

$$\Lambda_0 = \Lambda_0(z_{n+1}, \dots, z_{n+k}) = \Bigg\{ (\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}) \in \Lambda : \\ \left[P'(z, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z) \right]_{z = z_{n+j}} = 0,\ j = 1, \dots, k \Bigg\}. \tag{30}$$

При этом если точка z_{n+j} является $(\tau - 1)$-кратным дополнительным нулем функции $f^*(z)$, то и в условиях (30) считаем, что эта точка — $(\tau - 1)$-кратный нуль функции $P'(z, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z)$. В случае, когда дополнительные нули у $f^*(z)$ отсутствуют, считаем, что $\Lambda_0 = \Lambda$. В односвязном случае следовало бы считать Λ_0 и Λ пустыми множествами, поскольку там нет функций $W_j'(z)$. Однако удобнее полагать, что $\Lambda_0 = \Lambda$ состоят из единственной точки O тривиального пространства $\mathbb{R}^0$, состоящего только из нуля. Это позволяет охватывать случай $m = 1$ общей формулировкой, относящейся к любому m.

Лемма 8. *Множество Λ_0 — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^{m-1}$.*

Доказательство леммы несложно, и мы его опускаем.

Лемма 9. *Если $c_1, \dots, c_n$ — коэффициенты линейного наилучшего метода восстановления, то*

$$\frac{-2\pi i R(z)}{f^*(z_0)} = P'(z, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z), \quad (\lambda) \in \Lambda_0. \tag{31}$$

Обратно, если $c_1, \dots, c_n$ — вычеты функции

$$U(z) = \frac{f^*(z_0) \left[P'(z, z_0) - \sum\limits_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z) \right]}{f^*(z)}, \quad (\lambda) \in \Lambda_0, \tag{32}$$

((λ) — любой вектор из множества Λ_0) в точках $z_1, \dots, z_n$ соответственно, то $c_1, \dots, c_n$ являются коэффициентами некоторого линейного наилучшего метода.

Доказательство. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — коэффициенты линейного наилучшего метода. Функция $-2\pi i R(z)/f^*(z_0)$ аналитична в $\overline{G}$, кроме единственного полюса в z_0, причем

$$\frac{-2\pi i R(z)}{f^*(z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} + \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ аналитична в $\overline{G}$ и тем более $\varphi \in E_1(G)$. Вспоминая, что $|f^*(z)| = 1$, когда $\zeta \in \Gamma$, получаем также

$$\int\limits_\Gamma \left|\frac{-2\pi i R(\zeta)}{f^*(z_0)}\right| ds = \frac{2\pi}{|f^*(z_0)|} \int\limits_\Gamma \left| f^*(\zeta) \left[\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\zeta - z_j}\right) - \varphi^*(\zeta)\right]\right| ds$$
$$= \frac{2\pi}{|f^*(z_0)|} \int\limits_\Gamma \left| \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\zeta - z_j}\right) - \varphi^*(\zeta)\right| ds = 2\pi$$

(см. (27)). Таким образом, функция $-2\pi i R(z)/f^*(z_0)$ экстремальная в задаче (14) и потому по лемме 5 имеет вид (31) (отметим, что так как функция $-2\pi i R(z)/f^*(z_0)$ имеет в дополнительных нулях $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$ (если они есть) функции $f^*(z)$ нули не меньшей кратности, чем у $f^*(z)$, то $(\lambda) \in \Lambda_0$).

Обратно, если в (32) $(\lambda) \in \Lambda_0$, то функция $U(z)$ (32) имеет полюсы (первого порядка) только в точках $z_0, z_1, \ldots, z_n$. Вычет $U(z)$ в точке z_0 равен вычету в этой точке функции $P'(z, z_0)$, т. е. -1 (см. (17)). Поэтому $U(z)$ можно представить следующим образом:

$$U(z) = -\frac{1}{z - z_0} + \sum_{l=1}^n \frac{c_l}{z - z_l} + \varphi(z). \tag{33}$$

Так как для любой функции $f(z) \in E^1_\infty$

$$\left|\int\limits_\Gamma -\frac{1}{2\pi i} U(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta\right| = \left| f(z_0) - \sum_{l=1}^n c_l f(z_l)\right|$$
$$\leqslant \frac{|f^*(z_0)|}{2\pi} \int\limits_\Gamma \left| P'(\zeta, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(\zeta)\right| ds = r(z_0, z_1, \ldots, z_n),$$

то $c_1, \ldots, c_n$ являются коэффициентами линейного наилучшего метода восстановления. Лемма доказана.

Следствие 1. *Множество Λ_0 при $m \geqslant 2$ всегда не пусто.*

Следствие 2. *Если экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (3) имеет $m - 1$ дополнительных нулей, то Λ_0 состоит из единственной точки (λ), являющейся внутренней точкой Λ.*

Тот факт, что в этом случае Λ_0 состоит из единственной точки, вытекает из предложения 6. А то, что (λ) — внутренняя точка Λ, следует из того, что всеми нулями функции $-2\pi i R(z)/f^*(z_0)$ служат точки $z_{n+1}, \ldots, z_{n+m+1}$, являющиеся внутренними точками G: ведь это нули $f^*(z)$. Значит, (λ) — внутренняя точка Λ по предложению 4.

Лемма 10. *Двум различным точкам $(\lambda), (\tilde{\lambda}) \in \Lambda_0$ отвечают различные линейные наилучшие методы восстановления.*

Доказательство. Построим, как и в предыдущей лемме, по точке $(\lambda) \in \Lambda_0$ функцию $U(z)$ (см. (32)). Аналогичную функцию для точки $(\tilde{\lambda}) \in \Lambda_0$ обозначим через $\widetilde{U}(z)$. Пусть

$$\widetilde{U}(z) = -\frac{1}{z - z_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{c}_j}{z - z_j} + \widetilde{\varphi}(z).$$

Если бы $c_j = \tilde{c}_j$, $j = 1, \ldots, n$, то $U(z) - \widetilde{U}(z)$ была бы аналитической в $\overline{G}$ функцией. Но, с другой стороны, в силу (32)

$$U(z) - \widetilde{U}(z) = \frac{f^*(z_0)}{f^*(z)} \sum_{j=1}^{m-1} (\tilde{\lambda}_j - \lambda_j) W_j'(z). \tag{34}$$

Но число нулей $f^*(z)$ не меньше m (см. [12]), а функция $\sum\limits_{j=1}^{m-1} (\tilde{\lambda}_j - \lambda_j) W_j'(z)$ имеет $m-2$ нулей — это вытекает из равенств (см. [12]),

$$\operatorname{Im}\{iW_j'(\zeta)\,d\zeta\} = 0, \qquad \zeta \in \Gamma; \quad j = 1, \ldots, m.$$

Поэтому $U(z) - \widetilde{U}(z)$ обязательно обладает полюсами. Противоречие доказывает лемму.

Предложение 7. *Устанавливаемое в лемме 9 отображение $\Lambda_0 \to \Delta$ является аффинным и гомеоморфным. Переход от $(\lambda) \in \Lambda_0$ к $(c) = (c_1, \ldots, c_n)$ дается формулами*

$$c_j = \frac{\tau f^*(z_0)}{f^{*(\tau)}(z_j)} \left[P^{(\tau)}(z_j, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l^{(\tau)}(z_j) \right], \tag{35}$$

если z_j — нуль функции f^* кратности τ.

Доказательство. С помощью формул для вычетов получаем

$$c_j = \lim_{z \to z_j} (z - z_j) \frac{f^*(z_0)}{f^*(z)} \left[P'(z, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z) \right]$$
$$= \frac{\tau f^*(z_0)}{f^{*(\tau)}(z_j)} \left[P^{(\tau)}(z_j, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l^{(\tau)}(z_j) \right].$$

Независимо от автора настоящей статьи К. Вильдеротом в 1990 г. были получены формулы для вычисления коэффициентов линейного наилучшего метода приближения ограниченных аналитических функций в многосвязных областях (формулы имеют несколько другой вид, см. [16]).

Из формул (35) видно, что отображение $(\lambda) \to (c)$ аффинно и непрерывно. Согласно лемме 10 это отображение биективно. Но поскольку Λ_0 и Δ — компакты, наше биективное и непрерывное отображение — гомеоморфизм.

Предложение 8. *Множество Δ линейных наилучших методов восстановления всегда имеет размерность (вещественную), не превосходящую $m-1$.*

Доказательство. Поскольку Δ — аффинный образ Λ_0, а вещественная размерность Λ_0, очевидно, не превосходит $m-1$, то и размерность Δ также не превосходит $m-1$.

Лемма 11. *Пусть $m \geqslant 4$, а число k дополнительных нулей функции $f^*(z)$ удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant k < (m-1)/2$. Если существует такой линейный наилучший метод $(\tilde{c})$, для которого функция $-2\pi i R(z)/f^*(z_0)$ определяет точку $(\tilde{\lambda}) \in \Lambda_0$, являющуюся внутренней точкой Λ, то выпуклое множество Δ имеет размерность не меньше $m-1-2k$ и поэтому, в частности, бесконечно.*

Доказательство. Будем считать, что все дополнительные нули $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$ различные. Условие $(\lambda) \in \Lambda_0$ означает,что выполняются условия

$$\sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z_{n+j}) = P'(z_{n+j}, z_0), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Их можно записать так:

$$\sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l \frac{\partial \omega_l}{\partial x}(z_{n+j}) = \frac{\partial g}{\partial x}(z_{n+j}, z_0), \quad \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l \frac{\partial \omega_l}{\partial y}(z_{n+j}) = \frac{\partial g}{\partial y}(z_{n+j}, z_0). \tag{36}$$

Система (36) совместна, и в ней $2k$ уравнений с $m-1$ неизвестными. Ранг r_0 матрицы данной системы не превосходит $2k$. Подпространство $L_0 \subset \mathbb{R}^{m-1}$, состоящее из решений однородной системы, соответствующей системе (36), будет иметь размерность $m-1-r_0 \geqslant m-1-2k$. Все решения системы уравнений (36) описываются формулой $(\tilde{\lambda}) + L_0$. Так как $(\tilde{\lambda})$ — внутренняя точка Λ, то множество $((\tilde{\lambda}) + L_0) \cap \Lambda$ имеет ту же размерность, что и L_0. Значит, размерность Λ_0 не меньше $m-1-2k$, и то же самое можно сказать о размерности Δ, поскольку Λ_0 и Δ гомеоморфны.

Если некоторые из дополнительных нулей $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$ кратные, то рассуждение не меняется. Меняется только запись некоторых из уравнений системы (36): появятся производные более высоких порядков от P' и W_j'.

Теорема 2. *В односвязной области линейный наилучший метод восстановления единствен. В m-связной области, $m \geqslant 2$, так будет всегда, когда экстремальная функция $f^*(z)$ имеет $m-1$ дополнительных нулей. Для любых натуральных $n \geqslant m \geqslant 4$ и k, $1 \leqslant k < (m-1)/2$, существуют такие точки $z_1, \ldots, z_n$ в G, что в задаче (3) экстремальная функция $f^*(z)$ будет иметь k дополнительных нулей, а линейных наилучших методов приближения будет бесчисленное множество.*

Доказательство. Рассмотрим задачу оптимального восстановления значений функции в точке z_0 по значениям в заданных точках $z_1, \ldots, z_{n+k-(m-1)}$. Если точки $z_1, \ldots, z_{n+k-(m-1)}$ выбрать достаточно близкими к γ_m, то экстремальная функция в задаче (3) будет иметь $m-1$ дополнительных нулей в G. Эти дополнительные нули занумеруем $z_{n+k-(m-1)+1}, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$. Поскольку есть $m-1$ дополнительных нулей, имеется единственный линейный наилучший метод, определяемый набором коэффициентов $(c) = (c_1, \ldots, c_{n+k-(m-1)})$. Соответствующую (c) точку множества Λ обозначим через (λ). Согласно следствию 2 точка (λ) — внутренняя точка Λ. Рассмотрим теперь задачу наилучшего восстановления значений функций в точке z_0 по значениям в точках $z_1, \ldots, z_n$. Экстремальной в задаче (3) будет та же функция $f^*(z)$ (лемма 4). Ее дополнительными нулями будут $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}$. Точка (λ) принадлежит $\Lambda_0(z_{n+1}, \ldots, z_{n+k})$, так как очевидно, что $\Lambda_0(z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}) \supseteq \Lambda_0(z_{n+k-(m-1)+1}, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{n+k})$. Пусть $(\tilde{c}) = (\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n+k}, \ldots, \tilde{c}_n)$ тот линейный наилучший метод в задаче, поставленной для точек $z_1, \ldots, z_n$, который отвечает точке $(\lambda_0) \in$

$\Lambda_0(z_{n+1},\dots,z_{n+k})$. Мы находимся в условиях леммы 11, и, следовательно, существует бесконечное множество линейных наилучших методов.

§ 4. О поведении коэффициентов линейного наилучшего метода при приближении точек $z_1,\dots,z_n$ к одному из граничных контуров

Если точки $z_1,\dots,z_n$ находятся достаточно близко к одному из граничных контуров $\gamma_1,\dots,\gamma_{m-1},\gamma_m$, то согласно лемме 3 экстремальная функция $f^*(z)$ имеет в точности $m-1$ дополнительных нулей, и поэтому (предложение 6) линейный наилучший метод приближения единствен. В этом параграфе мы установим, что если точки $z_1,\dots,z_n$ (при некотором дополнительном условии) приближаются к одному из граничных контуров, то коэффициенты линейного наилучшего метода стремятся к нулю. Напомним вначале некоторые известные результаты (см., например, [8]). Пусть аналитическая функция $B(z,a)$ (a — произвольная фиксированная точка области G) однолистно отображает G на единичный круг с $m-1$ разрезами по дугам окружностей с центром в начале координат и радиусами ρ_j, $j=1,\dots,m-1$ ($B(a,a)=0$). Как известно,

$$\rho_j=\rho_j(a)=\exp\left\{-\sum_{k=1}^{m-1}q_{jk}\omega_k(a)\right\},\quad j=1,\dots,m-1, \tag{37}$$

где $\|q_{jk}\|$ — матрица, обратная к матрице периодов гармонических мер. Функция $B(z,a)$ аналитична в $\overline{G}$.

Лемма 12. *Существует такое постоянное положительное число r, что $\rho_j(a)>r$ для любой точки $a\in G$ при всех $j=1,\dots,m-1$.*

Доказательство немедленно вытекает из (37).

Лемма 13. *Существует такое положительное число m_0, что при любых $a,z\in G$*

$$|B(z,a)|\geqslant m_0|z-a|. \tag{38}$$

Доказательство. Функция $F(z)=B(z,a)/(z-a)$ аналитична в $\overline{G}$, и на границе Γ

$$|F(\zeta)|\geqslant\frac{r}{|\zeta-a|}\geqslant\frac{r}{d},\quad \zeta\in\Gamma,$$

где d — диаметр области G. Отсюда и получаем (38).

Лемма 14. *Если $a\to\gamma_m$, то $|B'(a,a)|\to\infty$.*

Доказательство. Пусть $a_n\to\gamma_m$ ($n=1,2,\dots$; $a_n\in G$). Рассмотрим последовательность однолистных в G функций $B(z,a_n)$. Если $w=B(z,a_n)$, то через $\varphi_n(w)$ обозначим обратные к $B(z,a_n)$ функции в круге K с центром в нуле и радиусом, равным r (r из леммы 12). Семейство аналитических функций $\{\varphi_n\}$ равномерно ограничено в круге K, поэтому найдется такая подпоследовательность функций (обозначений не меняем), которая равномерно сходится внутри круга K. Как известно, это будет либо однолистная в K функция, либо $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(w)=\mathrm{const}$. Убедимся в том, что последовательность функций $\{\varphi_n\}$ не может сходиться равномерно к однолистной в K функции. Предположим противное. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(w)=\varphi(w)$, где $\varphi(w)$ — функция, однолистная в круге K, а $\widetilde{K}$ — область, на которую она отображает K. Ни одна из точек области $\widetilde{K}$ не может находиться вне области G, так как в противном случае найдутся точки, лежащие внутри круга K, которые функциями φ_n (при больших n) отображаются в точки, лежащие вне области G. Но область $\widetilde{K}$ не может находиться и внутри области G. В самом деле, пусть $\widetilde{K} \subset G$, а $b = \varphi(0)$ $(b \in G)$. Тогда $a_n \to b$ $(a_n = \varphi_n(0))$, и тем самым точки a_n сгущаются к внутренней точке области G, что противоречит условию леммы. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(w) = \text{const}$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n'(w) = 0$ $(w \in K)$. Поэтому

$$|B'(a,a)| = \frac{1}{|\varphi_n'(0)|} \to \infty \quad (a \to \gamma_m).$$

Лемма доказана.

Пусть теперь $z_1^\nu, \ldots, z_n^\nu$ — различные точки $(\nu = 1, 2, \ldots)$, лежащие в области G и удовлетворяющие условию

$$\left|z_j^\nu - z_i^\nu\right| \geqslant \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, n, \ j \neq i \ (\nu = 1, 2, \ldots), \tag{39}$$

а ε — некоторое постоянное положительное число.

Лемма 15. *Если $f^*(z)$ — экстремальная функция задачи* (3) *с заданными точками $z_1^\nu, \ldots, z_n^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющими условию* (39), *то $\left|f^{*\prime}(z_j^\nu)\right| \to \infty$, когда $z_1^\nu, \ldots, z_n^\nu \to \gamma_m$.*

Доказательство. Экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (3) обладает свойствами

$$|f^*(\zeta)| = 1, \ \zeta \in \Gamma, \quad f^*(z_1^\nu) = \cdots = f^*(z_n^\nu) = f^*(z_{n+1}^\nu) = \cdots = f^*(z_{n+m-1}^\nu) = 0$$

$(z_{n+1}^\nu, \ldots, z_{n+m-1}^\nu$ — дополнительные нули $f^*(z))$. Тогда

$$f^*(z) = \prod_{i=1}^{n+m-1} B(z, z_i^\nu) g(z),$$

где $g(z)$ — аналитическая в $\overline{G}$ функция, не равная в G нулю. Очевидно, что

$$|g(z)| \geqslant 1, \quad z \in \overline{G}. \tag{40}$$

Так как

$$f^{*\prime}(z_j^\nu) = B'(z_j^\nu, z_j^\nu) \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n+m-1} B(z_j^\nu, z_i^\nu) g(z_j^\nu),$$

то (см. лемму 13, условия (39) и (40)) $\left|f^{*\prime}(z_j^\nu)\right| \to \infty$, когда $z_1^\nu, \ldots, z_n^\nu \to \gamma_m$.

Теорема 3. *Если точки $z_1^\nu, \ldots, z_n^\nu \to \gamma_m$ и $\{z_j^\nu\}$ удовлетворяют условиям* (39), *то коэффициенты c_j линейного наилучшего метода стремятся к нулю, т. е. $c_j \to 0$, $j = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. Так как $f^*(z_0)$ и $P'(z_j^\nu, z_0) - \sum\limits_{i=1}^{m-1} \lambda_i W_i'(z_j^\nu)$ ограничены, а $\left|f^{*\prime}(z_j^\nu)\right| \to \infty$, то (см. (35) при $\tau = 1$) $c_j \to 0$, $j = 1, \ldots, n$. Теорема доказана.

§ 5. Оптимальное восстановление функций класса E_p, $1 \leqslant p < \infty$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления в пространстве $E_p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$. Для этого положим

$$X = E_p(G), \quad W = E_p^1(G), \quad L(f) = f(z_0),\ l_1(f) = f(z_1), \dots, l_n(f) = f(z_n).$$

Здесь $E_p^1(G)$ — множество всех функций $f \in E_p(G)$, для которых

$$\int_\Gamma |f(\zeta)|^p\, ds \leqslant 1.$$

В этом случае погрешность наилучшего метода равна

$$r(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sup_{\substack{f \in E_p^1(G) \\ f(z_1) = \dots = f(z_n) = 0}} |f(z_0)|. \tag{41}$$

Нетрудно убедиться в существовании экстремальной функции $f^*(z)$ задачи (41) (в случае, когда $1 < p < \infty$, функция $f^*(z)$ единственна с точностью до множителя $e^{i\delta}$, $\delta \in \mathbb{R}$; когда $p = 1$ — вообще говоря, не единственна, см. [6]). Если $\sum\limits_{j=1}^n c_j f(z_j)$ — линейный наилучший метод приближения, то экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (41) является экстремальной функцией задачи

$$r(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sup_{f \in E_p^1(G)} \left| f(z_0) - \sum_{j=1}^n c_j f(z_j) \right|. \tag{42}$$

Или, представив значения функций $f(z)$ в точках $z_0, z_1, \dots, z_n$ через ядро Коши, получим, что $f^*(z)$ является экстремальной функцией задачи:

$$r(z_0, z_1, \dots, z_n) = \sup_{f \in E_p^1(G)} \left| \int_\Gamma \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) f(\zeta)\, d\zeta \right|. \tag{43}$$

Так же, как в классе E_∞, экстремальная функция $f^*(z)$ задачи (41) помимо нулей в заданных точках $z_1, \dots, z_n$ может иметь дополнительные нули $z_{n+1}, \dots, z_{n+k}$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, лежащие внутри области G. Двойственными экстремальными задачами к задаче (43) будут следующие (см. [12]):

$$r(z_0, z_1, \dots, z_n) = \inf_{\varphi \in E_q(G)} \left(\int_\Gamma \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi(\zeta) \right|^q ds \right)^{1/q} \tag{44}$$

(где $1/p + 1/q = 1$) в случае, когда $1 < p < \infty$, и

$$r(z_0, z_1, \dots, z_n) = \inf_{\varphi \in E_\infty(G)} \operatorname{vrai\,sup} \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi(\zeta) \right| \tag{45}$$

в случае, когда $p = 1$. Если $\varphi^*(z)$ — экстремальная функция задачи (44) или (45), то почти везде на границе Γ выполняется соотношение (см. [12])

$$f^*(\zeta) \left[\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi^*(\zeta) \right] d\zeta = r_n |f^*(\zeta)|^p\, ds, \tag{46}$$

где $r_n = r(z_0, z_1, \dots, z_n)$, $\zeta \in \Gamma$; экстремальная функция $f^*(\zeta)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\Gamma} |f^*(\zeta)|^p\, ds = 1. \tag{47}$$

Обозначим через $z_{n+1}, \dots, z_{n+k}, z_{n+k+1}, \dots, z_{n+m-1}$ нули функции

$$R(z) = f^*(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{z-z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z-z_j}\right) - \varphi^*(z)\right] \tag{48}$$

($R(z)$ обладает в точности $m-1$ нулями, см. [12]).

Теорема 4. *В случае, когда* $1 \leqslant p < \infty$, *линейный наилучший метод приближения единствен и его коэффициенты* c_j, $j = 1, \dots, n$, *вычисляются по формуле* (35), *где* $(\lambda) \in \Lambda_0(z_{n+1}, \dots, z_{n+k}, \dots, z_{n+m-1})$.

Доказательство. Убедимся вначале в том, что при $1 \leqslant p < \infty$ линейный наилучший метод приближения единствен. Предположим противное: пусть $\sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{c}_j f(z_j)$ также является линейным наилучшим методом. Тогда

$$f^*(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta-z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\tilde{c}_j}{\zeta-z_j}\right) - \tilde{\varphi}^*(\zeta)\right] d\zeta = r_n |f^*(\zeta)|^p\, ds, \tag{49}$$

где $\tilde{\varphi}^*(\zeta)$ — экстремальная функция задачи (44) (или (45)) с коэффициентами, равными $\tilde{c}_j$, $j = 1, \dots, n$. Поделив (49) на (46), получим

$$\frac{\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta-z_0} - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\tilde{c}_j}{\zeta-z_j}\right) - \tilde{\varphi}^*(\zeta)}{\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta-z_0} - \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta-z_j}\right) - \varphi^*(\zeta)} \equiv 1, \quad \zeta \in \Gamma.$$

Отсюда и вытекает равенство коэффициентов: $\tilde{c}_j = c_j$, $j = 1, \dots, n$.

Вычислим коэффициенты c_j линейного наилучшего метода. Для этого заметим, что функция $-2\pi i R(z)/f^*(z_0)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\frac{-2\pi i R(z)}{f^*(z_0)} = -\frac{1}{z-z_0} + \varphi(z), \quad \varphi \in E_1(G), \tag{50}$$

$$\int\limits_{\Gamma} \left|\frac{-2\pi i R(\zeta)}{f^*(z_0)}\right| ds = 2\pi. \tag{51}$$

Условие (50) вытекает из (48), а условие (51) — из (46) и (47). В самом деле,

$$\int\limits_{\Gamma} \left|\frac{-2\pi i R(\zeta)}{f^*(z_0)}\right| ds = \frac{2\pi}{|f^*(z_0)|} \int\limits_{\Gamma} \left| f^*(\zeta)\left[\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta-z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta-z_j}\right) - \varphi^*(\zeta)\right]\right| ds$$
$$= \frac{2\pi}{|f^*(z_0)|} \int\limits_{\Gamma} r_n |f^*(\zeta)|^p\, ds = 2\pi.$$

Следовательно (см. лемму 5),

$$\frac{-2\pi i R(z)}{f^*(z_0)} = P'(z, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_l W_l'(z),$$

где $(\lambda) \in \Lambda$. Так как $z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}, z_{n+k+1}, \ldots, z_{n+m-1}$ — нули функции $R(z)$, то $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m-1}) \in \Lambda_0(z_{n+1}, \ldots, z_{n+k}, z_{n+k+1}, \ldots, z_{n+m-1})$, откуда

$$-\frac{1}{z-z_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z-z_j} + 2\pi i \varphi^*(z) \equiv \frac{f^*(z_0)}{f^*(z)} \left[P'(z, z_0) - \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_j W_l'(z) \right].$$

А уже отсюда вытекает, что коэффициенты c_j вычисляются по формуле (35). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1966.
2. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1971. Т. 11, № 4. С. 1014–1018.
3. *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки. 1976. Т. 19, № 1. С. 29–40.
4. *Fisher S. D., Micchelli C. A.* The n-width of sets of analytic functions // Duke Math. J. 1980. V. 47, N 4. P. 789–801.
5. *Овчинцев М. П.* Наилучший метод приближения регулярных ограниченных функций в кольце по их значениям в заданных точках // Изв. вузов. Математика. 1989. № 5. С. 32–39.
6. *Овчинцев М. П.* К вопросу об оптимальном восстановлении функций класса E_p в кольце // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 4. С. 87–101.
7. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
8. *Хавинсон С. Я.* Факторизация аналитических функций в конечносвязных областях М.: Изд-во МИСИ, 1981.
9. *Овчинцев М. П.* Наилучшие методы приближения ограниченных аналитических функций в многосвязных областях по их значениям в конечном числе заданных точек. М., 1988. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 9.11.1988, № 8165–88.
10. *Овчинцев М. П.* Наилучшие методы приближения функций класса E_p в многосвязных областях по их значениям в конечном числе заданных точек. М., 1988. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 24.11.1988, № 8601–88.
11. *Хавинсон С. Я.* Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях // Мат. сб. 1955. Т. 36, № 3. С. 445–478.
12. *Хавинсон С. Я.* Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различные обобщения М.: Изд-во МИСИ, 1981.
13. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. Изд. 2-е. М.: Наука, 1966.
14. *Гаркави А. Л.* Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах // Мат. анализ. 1967. М.: ВИНИТИ, 1969.
15. *Singer Y.* Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. New York; Berlin: Springer-Verl., 1970.
16. *Wilderotter K.* Optimale algorithmen zur approximation analytiseher funktionen. Dissertation, Universität Bonn. 1990. S. 121.

г. Москва

Статья поступила 24 января 1995 г.