М. С. Дерябина, С. И. Мартынов, Построение периодического решения уравнений движения вязкой жидкости с заданным градиентом давления,
Журнал СВМО, 2016, том 18, номер 3, 91–97

УДК 532.529:541.182

Построение периодического решения уравнений движения вязкой жидкости с заданным градиентом давления

© **М. С. Дерябина** [1], **С. И. Мартынов** [2]

Аннотация. Рассматривается проблема построения периодического решения уравнений течения вязкой жидкости в неограниченной области при заданном градиенте давления в классе кусочно-гладких функций для скорости течения. Получено приближенное решение задачи.
Ключевые слова: вязкая жидкость, периодическое решение, кусочно-гладкая функция

1. Введение

Моделирование течения вязкой жидкости в пористой среде является одной из актуальных проблем механики жидкости. Это связано как с математической сложностью самой задачи, так и с чрезвычайно широкой областью возможных приложений результатов моделирования. Например, в таких областях, как извлечение нефти из пласта, создание пористых материалов с заданными свойствами, бытовых и промышленных фильтров для очистки воды и и других жидкостей. Одна из основных проблем при моделировании связана с учетом гидродинамического взаимодействия жидкости с частицами пористой среды. В работе [1] построено периодическое всюду конечное решение уравнений Стокса для бесконечной решетки. Скорость жидкости в этом решении представляется в виде постоянной или линейной функции координат. Соответственно давление представляется в виде линейной или постоянной функции. Первую задачу (с постоянной скоростью в потоке) можно рассматривать с двух точек зрения. Если задана скорость, то можно найти градиент давления, и, наоборот, зная градиент давления, можно найти скорость. Однако в этом случае при рассмотренном в работе [1] виде решения с постоянной составляющей скорости возникает особенность при малых значениях параметра, характеризующего расстояние между частицами. В работе [2] сделано предположение, что наличие этой особенности связано с видом решения для скорости потока жидкости. То есть в этом случае решение должно представляться нелинейным профилем скорости, который вблизи частиц приближенно можно заменить течением с квадратичной по координатам функцией. Для этого случая было найдено приближенное решение и проведены оценки коэффициента фильтрации. Однако вопрос, как построить периодическое всюду конечное решение, соответствующее этому случаю, оставался открытым.

В настоящей работе рассматривается метод построения такого решение.

2. Постановка задачи

Рассматривается течение несжимаемой жидкости с вязкостью η в неограниченной области с заданным градиентом давления ∇p_0. Выберем систему координат так, что одна из осей, например, ось X, будет направлена в противоположном направлении, чем градиент давления. Соответственно, оси Y и Z направлены перпендикулярно градиенту. Будем

[1] Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск; deryabinams@mail.ru
[2] Профессор Югорского государственного университета, г. Ханты-Мансийск; martynovsi@mail.ru

рассматривать двумерный случай, когда все искомые величины зависят от двух координат: X и Y. Как известно [3], имеется точное решение уравнений Навье-Стокса для случая течения вязкой жидкости по каналам различного сечения. Для течения жидкости между двумя плоскостями выражение для скорости имеет вид:

$$u_x = -\left|\nabla p_0\right| \frac{h^2 - y^2}{2\eta}, \tag{2.1}$$

здесь u_x – скорость жидкости вдоль оси OX; $2h$ – расстояние между плоскостями; x, y – координаты точки, в которой находится скорость. Приведенное решение соответствует ламинарному течению жидкости. Максимальная скорость в поперечном сечении пропорциоальна h^2 и достигается при $y = 0$. С увеличением размеров поперечного сечения максимальная скорость растет. Однако, начиная с определенного значения максимальной скорости, течение, соответствующее данному решению, не реализуется в жидкости. Это можно пояснить следующим образом. Из уравнения неразрывности следует, что составляющая скорости жидкости u_y имеет порядок

$$u_y = u_x \frac{h}{L}.$$

Здесь L – характерный масштаб течения по оси OX. При малых значениях h величина поперечной составляющей скорости мала и ей можно пренебречь. С увеличением поперечного размера h растет и поперечная составляющая скорости. Это означает, что должно реализовываться другое течение. Соответственно и решение уравнений гидродинамики должно быть не таким, как (1). В классической гидродинамике жидкости это называется переходом от ламинарного течения к турбулентному. Согласно теории турбулентного течения в жидкости происходят флуктуации, которые приводят к появлению поперечной составляющей скорости. Флуктуации могут быть крупномасштабные и мелкомасштабные. Поскольку целью работы является построение периодического решения, пригодного в дальнейшем для моделирования фильтрации жидкости, то будем рассматривать такие масштабы течения, для которого возможно использовать приближение Стокса

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p. \tag{2.2}$$

В работе [4] для решения этой задачи о течении жидкости через периодическую систему частиц предлагалось рассматривать каналы треугольного сечения, в которых реализуется течение, соответствующее решению (1) для подобных каналов. Однако такое решение не дает непрерывности напряжений на границах каналов. Чтобы построить искомое решение, разобьем всю область, занимаемую жидкостью, на прямоугольные участки размерами $2L$ и $2h$ по осям X и Y соответственно. Выберем произвольную ячейку и поместим начало координат в центре такой ячейки. Необходимо найти такое решение уравнений (2), чтобы в соседних ячейках оно периодически повторялось. То есть составляющие скорости должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} u_x(x,h) = u_x(x,-h), \quad u_x(-L,y) = u_x(L,y), \\ u_y(x,h) = u_y(x,-h), \quad u_y(-L,y) = u_x(L,y). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Кроме того, на границах ячейки должны выполняться условия непрерывности нормальных и касательных напряжений

$$\begin{aligned} &\sigma_{xy} n_y \left|_{y=-h} = \sigma_{xy} n_y\right|_{y=h}, \qquad &\sigma_{yy} n_y \left|_{y=-h} = \sigma_{yy} n_y\right|_{y=h}, \\ &\sigma_{yx} n_x \left|_{x=-L} = \sigma_{yx} n_x\right|_{x=L}, \qquad &\sigma_{xx} n_x \left|_{x=-L} - \sigma_{xx} n_x\right|_{x=L} = \left|\nabla p_0\right| 2L. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь σ_{xy}, σ_{xx}, σ_{yy} – компоненты тензора полных напряжений в жидкости [3]. Последнее условие в (2.4) означает, что вдоль оси OX имеется перепад давления с заданным градиентом ∇p_0.

3. Общее решение задачи для произвольной ячейки

Систему уравнений (2.2) в произвольной ячейке запишем в виде

$$\begin{aligned}
&\eta\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial p_0}{\partial x}=0,\\
&\eta\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right)=0,\\
&\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Фактически полагаем, что течение в ячейке не меняет заданного градиента давления. Как известно из гидродинамики, вихревые течения не меняют распределение давления в жидкости. Следовательно, течение в ячейке должно быть вихревым. Решение системы (3.1) будем искать в виде

$$u_x(x,y)=-\left|\nabla p_0\right|\frac{h^2-y^2}{2\eta}+v(x,y),\quad u_y(x,y)=w(x,y).$$

Для функций $v(x,y)$ и $w(x,y)$ получаем уравнения

$$\begin{aligned}
&\tfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0,\\
&\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\tfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,\\
&\tfrac{\partial v}{\partial x}+\tfrac{\partial w}{\partial y}=0.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Решение системы (3.2) будем искать в виде

$$v(x,y)=\psi(x)\zeta(y),\quad w(x,y)=f(x)\varphi(y).$$

Из первого уравнения системы (3.1) получаем равенство

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\frac{1}{\psi(x)}+\frac{d^2\zeta(y)}{dy^2}\frac{1}{\zeta(y)}=0.$$

Первый вариант комбинации функций.

Полагаем, что имеем равенства

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\frac{1}{\psi(x)}=-k^2,\quad \frac{d^2\zeta(y)}{dy^2}\frac{1}{\zeta(y)}=k^2. \tag{3.3}$$

Здесь $k=2\pi/\lambda$, а λ – некий параметр, имеющий размерность длины. Решение уравнений (3.3) имеет вид

$$\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx), \quad \zeta(y) = C\exp(-ky) + D\exp(ky).$$

Из третьего уравнения системы (3.1) получим соотношения

$$\frac{d\psi(x)}{dx}\zeta(y) + f(x)\frac{d\varphi(y)}{dy} = 0.$$

Будем считать,что

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = f(x), \quad \zeta(y) = -\frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Интегрируя последние соотношения, получаем равенства

$$f(x) = -Ak\cos(kx) + Bk\sin(kx), \quad \varphi(y) = (C\exp(-ky) - D\exp(ky))/k.$$

Таким образом имеем выражения для скорости жидкости

$$v(x,y) = (A\cos(kx) + B\sin(kx))(C\exp(-ky) + D\exp(ky)),$$
$$w(x,y) = (-A\cos(kx) + B\sin(kx))(C\exp(-ky) - D\exp(ky)).$$

Легко проверить, что выражение для $w(x,y)$ удовлетворяет второму уравнению системы (3.1).

Из условия непрерывности скорости $v(x,y)$ на границах ячейки следует, что $B = 0$, $D = C$. То есть получаем

$$v(x,y) = AC\cos(kx)(\exp(-ky) + \exp(ky)),$$
$$w(x,y) = -AC\cos(kx)(\exp(-ky) - \exp(ky)).$$

Однако, составляющая скорости $w(x,y)$ и нормальные напряжения $\sigma_{xx}n_x$ в этом случае не удовлетворяют условиям непрерывности (2.3 и 2.4). Для того, чтобы удовлетворить этим условиям, рассмотрим еще один вариант комбинации функций, определяющих решение.

Второй вариант комбинации функций.

Полагаем, что в этом случае имеем равенства

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\frac{1}{\psi(x)} = k^2, \quad \frac{d^2\zeta(y)}{dy^2}\frac{1}{\zeta(y)} = -k^2.$$

Повторяя вычисления, приведенные выше для первого варианта, получим, что составляющие скорости в этом случае имеют вид

$$v(x,y) = (A_1\cos(ky) + B_1\sin(ky))(C_1\exp(-kx) + D_1\exp(kx)),$$
$$w(x,y) = (-A_1\cos(ky) + B_1\sin(ky))(C_1\exp(-kx) - D_1\exp(kx)).$$

Аналогично первому варианту из условия непрерывности скорости $v(x,y)$ на границах ячейки следует, что $B_1 = 0$, $D_1 = C_1$. То есть

$$v(x,y) = A_1C_1\cos(ky)(\exp(-kx)+\exp(kx)),$$
$$w(x,y) = -A_1C_1\cos(ky)(\exp(-kx)-\exp(kx)).$$

Объединяя решения двух рассмотренных вариантов комбинаций функций, получаем окончательно выражения для составляющих скорости

$$v(x,y) = AC\cos(kx)(\exp(-ky)+\exp(ky)) + A_1C_1\cos(ky)(\exp(-kx)+\exp(kx)),$$
$$w(x,y) = -AC\cos(kx)(\exp(-ky)-\exp(ky)) - A_1C_1\cos(ky)(\exp(-kx)-\exp(kx)).$$

Подставляя найденные соотношения в выражения для скорости $w(x,y)$ и считая, что $kx << 1$, $ky << 1$ (это всегда можно сделать соответствующим выбором размеров ячейки L и h) получим следующее приближение с точностью до квадратов малых величин включительно

$$w(x,y) = -2(AC + A_1C_1)kykx.$$

Для того, чтобы составляющая скорости была непрерывна на границах ячейки полагаем, что $A_1C_1 = -AC$. Тогда последнее условие в (2.4) выполняется с той же точностью, что и для $w(x,y)$, а из первого условия (2.4) получим

$$AC = -\frac{1}{4k^2\eta}\,|\nabla p_0|\,.$$

Профили составляющих скорости в ячейке показаны на рис.1 и рис. 2.

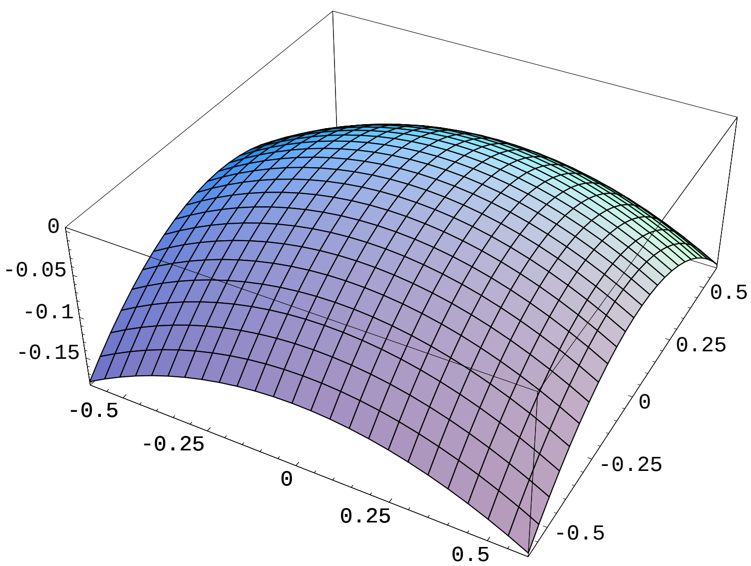

Рисунок **3.1**

Профиль скорости v в ячейке

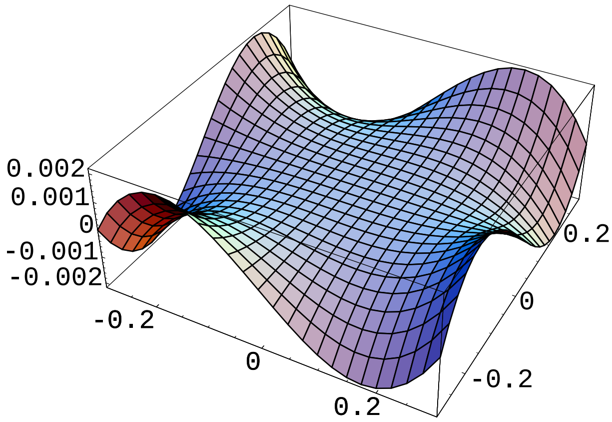

Рисунок **3.2**

Профиль скорости w в ячейке

4. Результаты

Как видно из рисунков, хотя скорость зависит от координат не по квадратичному закону, вблизи центра ячейки ее профиль близок к параболическому, что и было получено в работе [2]. В соседних ячейках имеется такое же распределение скорости и удовлетворяет условиям непрерывности скорости, касательных и нормальных напряжений на границе ячеек. Таким образом, невозмущенное течение вязкой жидкости представляет собой периодическое движение с заданным градиентом давления. Используя это решение можно рассчитать течение жидкости с заданным градиентом давления через бесконечную периодическую решетку частиц, помещенных в центр ячейки.

Следует отметить, что полученные выражения для составляющих скорости течения жидкости содержат параметры k и h. Вопрос об определении средних значений этих параметров и получении осредненных выражений для скорости течения требует дальнейшего рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-007-р_урал_а)

Дата поступления 29.11.2016

Список литературы

1. С. И. Мартынов, А. О. Сыромясов, “Вязкость суспензии с кубической решеткой сфер в сдвиговом потоке”, *Изв. РАН. МЖГ.*, 2005, № 4, 3–14.

2. С. И. Мартынов, “Движение вязкой жидкости через периодическую решетку сфер”, *Изв. РАН. МЖГ.*, 2002, № 6, 48 - 54.

3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифщиц, *Гидродинамика*, Наука, М., 1986, 736 с.

4. М. С. Дерябина, С. И. Мартынов, “Моделирование фильтрации вязкой жидкости с заданным градиентом давления”, *Укр. мат. журн.*, **45**:12 (1993), 1595–1600.

Construction of periodic solutions equations of motion of a viscous fluid with a predetermined pressure gradient

© M. S. Deryabina[3], S. I. Martynov[4]

Abstract. The problem of constructing a periodic solution for the equations of viscous flow in unbounded domain for a given pressure gradient in the class of piecewise smooth functions for the flow velocity is considered. An approximate solution of the problem is obtained.

Key Words: viscous fluid, periodic solution, piecewise smooth function

[3] Ugra State University, Khanty-Mansiysk; deryabinams@mail.ru
[4] Professor of Ugra State University, Khanty-Mansiysk; martynovsi@mail.ru