УДК 621.385.6; 631.372.413 ФИЗИКА

Академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

РЕЗОНАНСНЫЕ И МЕЖДУТИПОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В электродинамике, физике плазмы и твердого тела изучение колебаний можно проводить с помощью дисперсионных уравнений (ДУ), которые устанавливают связь между спектральной величиной (частотой) и неспектральными параметрами (геометрией границ раздела, материальными константами и др.). ДУ позволяют найти множество корней (в общем случае – комплексных), определяющих характеристические числа задачи и соответствующие им собственные колебания. Зависимость спектральной величины от одного какого-либо неспектрального параметра дает возможность построить дисперсионную кривую. Описанные процедуры составляют основу спектральной теории. Для ее постановки и построения достаточно исследовать граничную проблему без учета внешнего воздействия, т.е. решить однородную краевую задачу. Конечно, найденные из ДУ определенные характеристические числа позволяют только указать на возможные собственные колебания, которые характерны для исследуемой структуры. Их реализация осуществляется внешним возбуждением, когда данному характеристическому числу строго соответствует определенная спектральная величина (частота) внешнего воздействия; это резонансное возбуждение колебаний. В рамках спектральной теории наличие комплексных характеристических чисел указывает на возможность потерь (отношение вещественной части характеристического числа к его мнимой части определяет добротность колебаний). Традиционно изучение колебаний ограничивается указанными исследованиями.

Оказывается, ДУ значительно глубже по своему содержанию, чем предполагалось при изучении только резонансных колебаний. ДУ доставляет также информацию о процессах, которые определяют явления междутиповых колебаний.

Междутиповые колебания впервые экспериментально обнаружены [1, 2] и изучены [3] на примере закрытых круглых цилиндрических резонаторов. Установлено, что в этих электродинамических структурах происходит резкое изменение (уменьшение) добротности при совпадении определенных частот собственных колебаний. Аналогичная ситуация имеет место и для открытых резонаторов (ОР), где наблюдается существенное увеличение дифракционных потерь (уменьшение добротности) для симметричной конфокальной геометрии [4, 5].

Явление междутиповых колебаний закрытых резонаторов и ОР, согласно [4–6], возникает при взаимодействии собственных колебаний "идеальной" электродинамической структуры за счет малых возмущений, которые неизбежны при наличии элементов связи, искажения формы границы раздела и т.д. Для закрытых резонаторов исследования [6] основываются на свойствах базисности (полноты) собственных колебаний идеальной структуры и классической теории возмущений самосопряженных операторов. В ОР принципиальное значение имеют дифракционные потери. Согласно [7], при заданных частотах и размерах ОР наименьшие дифракционные потери должны иметь колебания симметричного конфокального ОР. Экспериментально этот эффект не подтверждается, а его описание с помощью [6] невозможно; в то же время асимптотическая теория [7] определяет приближенно только часть спектра собственных колебаний, соответствующих коротковолновым колебаниям типа "прыгающего мячика" или "шепчущей галереи".

Для исследования собственных колебаний в ОР построена строгая спектральная теория [8–10]; она существенно несамосопряженна и ее развитие требует формулировки условия на бесконечности, моделирующего расход энергии из ОР в окружающее неограниченное пространство. Условие излучения является несамосопряженным, а спектральный параметр (частота) входит в него нелинейно. Спектральная теория ОР [8–10] позволяет полностью объяснить явление междутиповых колебаний и, в частности, установить, что резкое уменьшение добротности собственных колебаний вблизи конфокальной геометрии присуще непосредственно симметричному двухзеркальному ОР и не связано с малыми его возмущениями. Эти результаты являются фундаментальным следствием того, что характеристический определитель ОР как линейной колебательной структуры имеет изолированную морсовскую критическую точку, расположенную вблизи множества собственных частот.

Как известно [8–10], спектральная теория для двухмерного кругового цилиндрического ОР позволяет определить спектральный параметр $\kappa = ka$ $\left(k = \dfrac{2\pi}{\lambda} = \dfrac{\omega}{c}\right.$, ω – собственная частота, a – геометрический параметр ОР, c – скорость света в вакууме), для которого существуют нетривиальные решения однородных уравнений Максвелла, удовлетворяющих граничным условиям на поверхностях ОР, условиям Мейкснера (на ребрах) и Рейхарда (на бесконечности) [11]. Математически строгое решение этой задачи получено методом, развитым в [12], с использованием данных спектральной теории несамосопряженных аналитических фредгольмовых оператор-функций в банаховом пространстве [13]. Эта оператор-функция, аналитически зависящая от κ на римановой поверхности Λ, имеет вид $I - A(\kappa): H \to H$, где I – тождественный оператор; $H = \bigotimes_{n=1}^{N} l_2$ – декартово произведение N экземпляров пространства l_2 с естественной структурой гильбертового пространства; N – число зеркал ОР;

$$A(\kappa) = \begin{Vmatrix} A^{11}(\kappa)\ldots A^{1N}(\kappa) \\ \ldots \\ \ldots \\ \ldots \\ A^{N1}(\kappa)\ldots A^{NN}(\kappa) \end{Vmatrix}.$$

Оператор-функция $A^{ij}(\kappa): l_2 \to l_2$ – ядерная для любого $\kappa \in \Lambda$, $\kappa \neq 0, \infty$; при $i \neq j$ описывает взаимное влияние зеркал ОР, а при $i = j$ – спектральные характеристики i-го зеркала.

Указанные свойства $A(\kappa)$ позволяют доказать дискретность и конечную кратность спектра комплексных собственных частот и получить ДУ

$$\mathcal{F}(\kappa, \chi) \equiv \det\{I - A(\kappa)\} = 0. \tag{1}$$

Данное ДУ является характеристическим бесконечным определителем ядерного оператора $A(\kappa)$, и его решение можно получить только с помощью ЭВМ.

Существенно, что $A(\kappa)$ зависит также и от неспектральных, в частности геометрических, параметров ОР. Ограничимся одним из них: $\chi = l/a$ (l – расстояние между зеркалами, a – их радиус). При этом запишем оператор-функцию в виде $A(\kappa, \chi)$, где κ изменяется в области $D_\chi \subseteq C$ аналитичности $A(\kappa, \chi)$ (C – комплексная плоскость). Физический смысл параметра χ – определять настройку ОР. Считаем также, что собственная частота $\kappa \subset \Lambda_0$, где $\Lambda_0 = \{\kappa \in C; -\pi < \arg \kappa < \pi, \kappa \neq 0\}$ – нулевой лист Λ.

Поскольку $A(\kappa, \chi)$ – ядерная оператор-функция, множество нулей ДУ $\mathcal{F}(\kappa, \chi) = 0$ совпадает с множеством характеристических чисел $\sigma(\kappa)$ оператор-функции $I - A(\kappa, \chi)$ ($\sigma(\kappa)$ определено на подмножестве D в C^2 вида $D = \Lambda_0 \times D_\kappa$).

Важно установить, что происходит с $\sigma(\kappa)$, когда собственная частота κ изменяется в D_κ. Для этого введем аналитическое множество D вида $\sigma_0 = \{(\kappa, \chi) \in D: \mathcal{F}(\kappa, \chi) = 0\}$ и рассматриваем $\mathcal{F}(\kappa, \chi)$ как отображение $\mathcal{F}: C^2 \to C$ с областью определения D (при этом, естественно, считаем, что χ – величина комплексная). Если вблизи σ_0 существует изолированная особая точка (κ_0, χ_0) отображения $\mathcal{F}$, то локальная структура σ_0 в окрестности (κ_0, χ_0) определяется расположением и типом (κ_0, χ_0) (это следствие теории функций многих комплексных переменных и особенностей дифференцируемых отображений [14, 15]). Вдали от (κ_0, χ_0) множество σ_0 локально устроено как гиперплоскость. Ясно, что малые изменения χ в окрестности (κ_0, χ_0) приводят к малым изменениям $\sigma(\kappa)$.

Рассмотрим σ_k – множество критических точек:

$$\sigma_k = \left\{ (\kappa, \chi) \in D: \ \mathrm{grad}\, \mathcal{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa}, \ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \chi} \right) = 0 \right\}$$

и σ_{Mk} – множество изолированных морсовских критических точек:

$$\sigma_{M_k} = \left\{ (\kappa, \chi) \in \sigma_k: \ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \kappa^2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \chi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \kappa \partial \chi} \neq 0 \right\}.$$

Пусть (κ_0, χ_0) – изолированная морсовская критическая точка, лежащая вблизи σ_0 (т.е. $\mathcal{F}(\kappa_0, \chi_0) = \delta$ мало). Тогда в окрестности (κ_0, χ_0) ДУ $\mathcal{F}(\kappa, \chi) = 0$ можно записать в виде

$$(2) \qquad \delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \kappa^2} \Bigg|_{\substack{\kappa = \kappa_0 \\ \chi = \chi_0}} (\kappa - \kappa_0)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \kappa \partial \chi} \Bigg|_{\substack{\kappa = \kappa_0 \\ \chi = \chi_0}} (\kappa - \kappa_0)(\chi - \chi_0) + $$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \chi^2} \Bigg|_{\substack{\kappa = \kappa_0 \\ \chi = \chi_0}} (\chi - \chi_0)^2 + O^3 = 0,$$

где O^3 – кубически малые члены. Так как $(\kappa_0, \chi_0) \in \sigma_{M_k}$, то существует нелинейная неособая замена переменных $\tilde{\kappa} = \psi_1(\kappa, \chi)$, $\tilde{\chi} = \psi_2(\kappa, \chi)$, которая переводит (2) в

$$(3) \qquad \tilde{\kappa}^2 + \tilde{\chi}^2 + \sigma = 0,$$

откуда $\tilde{\kappa} = \pm\sqrt{-\tilde{\chi}^2 - \delta}$. При $\delta = 0$ получаем $\tilde{\kappa} = \pm i\, \tilde{\kappa}$. Заметим, что качественно решения (2), (3) совпадают. Уравнение (3) содержит закон дисперсии (зависимость спектрального параметра ω от неспектрального l, или a), характерный для междутиповой связи, а величина $\delta = \mathcal{F}(\kappa_0, \chi_0)$ определяет степень этой связи. При $\delta = 0$ в (κ_0, χ_0) имеет место двухкратное вырождение $\mathcal{F}(\kappa, \chi)$ как по κ, так и по χ.

Исследование зависимостей $\mathrm{Re}\, \kappa(\chi)$ и $\mathrm{Im}\, \kappa(\chi)$ как решений (2) в физической области изменения неспектрального параметра χ (т.е. при $\mathrm{Im}\, \chi = 0$) настройки ОР достаточно произвести из (3) для $\mathrm{Re}\, \tilde{\kappa}(\tilde{\chi})$ и $\mathrm{Im}\, \tilde{\kappa}(\tilde{\chi})$ при изменении $\tilde{\chi}$ вдоль прямых $\mathrm{Re}\, \tilde{\chi} = \xi$, $\mathrm{Im}\, \tilde{\chi} = \alpha\xi + \beta$, где β – вещественный параметр прямой, α – угол ее наклона, $\beta \neq 0$ при $\mathrm{Im}\, \chi_0 \neq 0$. В результате имеем

$$\tilde{\kappa}(\xi) = \pm \left[\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2} + a}{2} \right)^{1/2} + i \,\mathrm{sing}\, b \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \right)^{1/2} \right],$$

где $a = (\alpha\xi + \beta^2) - \xi^2 - \delta_1$, $b = -\delta_2 - 2\xi(\alpha\xi + \beta)$, $\delta = \delta_1 + i\delta_2$, $\delta_1, \delta_2 \in R^1$.

Двухпараметрические по α и β семейства кривых $\operatorname{Re}\tilde{\kappa}(\xi)$, $\operatorname{Im}\tilde{\kappa}(\xi)$ содержат при определенных α, β зависимости, аналогичные известному "графику Вина" для резонансных частот связанных колебательных контуров. Существуют и другие типы зависимостей, физический смысл которых еще необходимо определять. Требуется также установить эффективные способы возбуждения междутиповых колебаний.

Следовательно, наличие изолированной морсовской критической точки (κ_0, χ_0) характеристического определителя $\mathcal{F}(\kappa, \chi)$ ОР приводит к существованию в окрестности (κ_0, χ_0) двух решений $\kappa_+(\chi)$, $\kappa_-(\chi)$ ДУ $\mathcal{F}(\kappa, \chi) = 0$. Поведение этих решений при изменении настройки ОР χ полностью определяется (3) и описывает междутиповые колебания ОР; в частности, определяет резкое изменение добротности (дифракционных потерь) ОР при малых изменениях его геометрических параметров (все эти рассуждения применимы и к идеальному закрытому резонатору).

Теперь мы вправе ожидать, что любые ДУ, полученные в электродинамике, теории плазмы, твердого тела и др., можно, при выполнении указанных выше условий, подвергнуть исследованию для выяснения наличия (или отсутствия) особых морсовских точек и вытекающих отсюда возможностей не только резонансных, но и междутиповых колебаний. При этом в качестве спектрального параметра выбирается частота, а неспектральным может быть любой другой – геометрический, электродинамический, механический – параметр. Важно, чтобы ДУ имело вид $\mathcal{F}(\kappa, \chi) = 0$, где κ – частота, а χ – любой из указанных неспектральных параметров (κ и χ – комплексные величины). Процедура нахождения морсовской точки проста. Для этого находим решение (в общем случае с помощью ЭВМ) уравнений $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \kappa} = 0$ и $\dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial \chi} = 0$ относительно $\kappa = \kappa_0$ и $\chi = \chi_0$. После этого следует определение $\mathcal{F}(\kappa_0, \chi_0) = \delta$, вычисление вторых производных в точке (κ_0, χ_0), построение уравнений (2), отыскание замены переменных $\kappa \to \tilde{\kappa}$ и $\chi \to \tilde{\chi}$ и, наконец, получение исходных уравнений (3); их решение дает набор дисперсионных кривых, определяющих поведение структуры в междутиповых колебаниях.

Институт радиофизики и электроники
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
16 IX 1987

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wilson I., Schramin C., Kinzer J.* – Bell Syst. Techn., 1946, vol. 25, № 3, p. 408–415. 2. *Bleaney B., Lobser J., Penroze R.* – Proc. Phys. Soc., 1947, vol. 59, part. 2, p. 185–191. 3. *Штейншлейгер В.Б., Фельдман Ю.И., Элькинд С.А.* Тр. нии МАП, 1948, т. 5, с. 1–65. 4. *Дюбко С.Ф., Камышан В.В., Шейко В.П.* – ЖТФ, 1965, т. 35, вып. 10, с. 1806–1812. 5. *Валитов Р.А., Дюбко С.Ф., Камышан В.В. и др.* Техника субмиллиметровых волн. М.: Сов. радио, 1969. 432 с. 6. *Штейншлейгер В.Б.* – ДАН, 1949, т. 59, № 5, с. 669–672. 7. *Вайнштейн Л.А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 476 с. 8. *Кошпаренок В.Н., Мележик П.Н., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П.* – ДАН, 1984, т. 279, № 5, с. 1114–1118. 9. *Мележик П.Н., Поединчук А.Е., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П.* – Докл. АН УССР, 1987, № 8, с. 57–61. 10. *Мележик П.Н., Поединчук А.Е., Тучкин Ю.А., Шестопалов В.П.* – ДАН, 1987, т. 300, № 6, с. 1356–1359. 11. *Reichardt H.* – Abh. ans dem Math. Seminar Univer. Hamburg, 1960, Bd. 24, S. 41–63. 12. *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана–Гильберта в теории дифракции. Харьков: Изд-во ХГУ, 1971. 417 с. 13. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984. 472 с. 14. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Сусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцирующих отображений. М.: Наука, 1982. 302 с. 15. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984, ч. 2. 285 с.