E. D. Zoldin, Strong law of large numbers for positively and negatively dependent random fields indexed by sets, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.*, 2001, Number 4, 6–13

из графа G удалением всех граничных ребер (при этом никакие вершины из графа G не удаляются). Размерность T равна цикломатическому числу графа $\tilde{G}$. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\Gamma : G \to S^2$ *— локально минимальная сеть на* S^2, *длина каждого ребра которой меньше* π. *Тогда ограничение индексной формы на пространство, натянутое на сжимания простых подвижных циклов сети, является отрицательно определенной формой и индекс* Γ *не меньше, чем цикломатическое число графа* $\tilde{G}$, *полученного из* G *удалением граничных ребер.*

Следствие. *Индекс замкнутой локально минимальной сети на* S^2, *длина каждого ребра которой меньше* π, *не меньше, чем цикломатическое число сети.*

Отметим, что у восьми из десяти замкнутых локально минимальных сетей на сфере длины всех ребер меньше π.

Имеет место следующая лемма, несложная, но громоздкое доказательство которой мы опускаем.

Лемма 3. *Пусть* $\bar{\alpha}$ *— вариация регулярной критической сети* Γ_0 *из* $\Omega(G, \partial\Gamma)$, *причем* $\bar{\alpha}(u)$ *— регулярная критическая сеть при* $u > 0$. *Тогда набор ортогональных компонент векторного поля вариации* $\bar{\alpha}$ *лежит в ядре индексной формы сети.*

Теорема 4. *Пусть* Γ *— замкнутая локально минимальная сеть на* S^2, *отличная от замкнутой геодезической. Тогда ядро индексной формы сети* Γ *порождено ортогональными компонентами полей вариаций, соответствующих изометриям* S^2.

Доказательство. Так как изометрии сферы сохраняют свойство сети быть регулярной критической, то по лемме 3 нуль-индекс сети Γ не меньше, чем размерность группы изометрий сферы. Известно, что это число равно трем. С другой стороны, нуль-индекс Γ по теореме 1 также равен трем. Значит, ортогональные компоненты полей вариаций, соответствующих изометриям S^2, порождают все ядро. □

Теоремы 3 и 4 дают геометрическую интерпретацию теоремы 1.

Автор благодарит академика РАН А. Т. Фоменко, д.ф.-м.н. А. О. Иванова и д.ф.-м.н. А. А. Тужилина за помощь и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982.
2. *Иванов А.О., Тужилин А.А.* Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // Успехи матем. наук. 1992. **47**, №2(284). 53–115.
3. *Ivanov A.O., Tuzhilin A.A.* Minimal networks. Steiner problem and its generalizatons. CRC, 1994.
4. *Heppes A.* Isogonale spherishe Netze // Ann. Univ. sci. budapest. Sec. Math. 1964. N 7. 41–48.
5. *Дао Чонг Тхи, Фоменко А.Т.* Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
6. *Милнор Дж.* Теория Морса. М.: Мир, 1965.
7. *Громол Д., Мейер В., Клингенберг В.* Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1975.

Поступила в редакцию
07.12.98

УДК 519.21

УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНО И ОТРИЦАТЕЛЬНО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ, ИНДЕКСИРОВАННЫХ МНОЖЕСТВАМИ

Е. Д. Зольдин

Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ) является одной из основных предельных теорем теории вероятностей. Классическая схема суммирования независимых слагаемых (см., например, [1]) обобщалась в различных направлениях. Одно из них — изучение мультииндексированных слагаемых. В работах Смита [2] и Гута [3] рассматривались поля, образованные независимыми и одинаково распределенными величинами. Для этого класса полей УЗБЧ доказан Клесовым [4] при весьма широких моментных условиях и более общих, чем в [2] и [3], нормировках. Далее стали изучаться случайные величины, индексированные множествами. В работе Басса и Пайка [5] для независимых одинаково распределенных величин даны достаточные условия УЗБЧ, равномерного по семейству индексирующих множеств. Суммы взвешенных слагаемых исследованы Жине и Зинном в [6]. В работах Клесова [7], Морица [8, 9] и Ле Гака, Морица и Тандори [10] УЗБЧ установлен для определенного класса зависимых слагаемых. Гапошкиным [11] и [12] получены критерии УЗБЧ для стационарных процессов и однородных полей с непрерывным параметром. Эти критерии даются в терминах сходимости ортогональных рядов из некоторых интегралов по спектральной мере. В последнее время большое внимание привлекают семейства величин, являющихся ассоциированными или попарно квадрантно зависимыми (см., например, статьи Биркела [13] и Матулы [14]).

В данной работе устанавливаются достаточные условия выполнимости равномерного варианта (по некоторому классу множеств) УЗБЧ для положительно и отрицательно попарно квадрантно зависимых случайных полей с дискретным и непрерывным параметрами. Показана оптимальность полученных результатов.

Напомним (см. [15]), что случайные величины X и Y называются положительно квадрантно зависимыми (ПК-зависимыми), если для любых $x, y \in \mathbb{R}$

$$\mathsf{P}\{X > x, Y > y\} - \mathsf{P}\{X > x\}\mathsf{P}\{Y > y\} \geqslant 0,$$

и отрицательно квадрантно зависимыми (ОК-зависимыми), если

$$\mathsf{P}\{X > x, Y > y\} - \mathsf{P}\{X > x\}\mathsf{P}\{Y > y\} \leqslant 0.$$

Для множества $A \subset \mathbb{R}^d$ пусть $|A|$ — мера Лебега, если A измеримо. Пусть $\mathcal{A}$ — семейство измеримых по Лебегу подмножеств $[0,1]^d$, таких, что

$$r(\delta) \equiv \sup\nolimits_{A\in\mathcal{A}} |A(\delta)| \to 0 \text{ при } \delta \to 0, \tag{1}$$

где $A(\delta)$ — δ-окрестность границы множества A в евклидовой метрике.

Пусть $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_d) \in \mathbb{N}^d$. Определим для семейства случайных величин $\{X_\mathbf{j} : \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d\}$ частичные суммы

$$S_\mathbf{n} = \sum\nolimits_{\mathbf{j}\leqslant\mathbf{n}} X_\mathbf{j}, \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d,$$

где $\mathbf{j} \leqslant \mathbf{n} \Leftrightarrow j_1 \leqslant n_1, \dots, j_d \leqslant n_d$. Если $A \subseteq \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^d$, то положим $\mathbf{n}A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : (x_1/n_1, \dots, x_d/n_d) \in A\}$ и

$$S(\mathbf{n}A) = \sum\nolimits_{\mathbf{j}\in\mathbf{n}A} X_\mathbf{j}.$$

Скажем, что последовательность $\{\mathbf{n}_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}^d$ не убывает, если $\mathbf{n}_k \leqslant \mathbf{n}_{k+1}$.

Теорема 1. *Пусть $\{X_\mathbf{j} : \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d\}$ — семейство попарно ПК-зависимых случайных величин, для которых $\sigma_\mathbf{j}^2 \equiv \mathsf{D}X_\mathbf{j} < \infty$. Пусть $\{b_\mathbf{j} : \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d\}$ — неубывающее семейство положительных чисел, т.е. $0 < b_\mathbf{j} \leqslant b_\mathbf{n}$ при $\mathbf{j} \leqslant \mathbf{n}$, таких, что $b_\mathbf{j} \to \infty$ при $|\mathbf{j}| \equiv j_1 \cdot \ldots \cdot j_d \to \infty$, и пусть $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств $[0,1]^d$, для которого выполнено условие (1). Если*

$$\sum\nolimits_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d} \mathsf{cov}(X_\mathbf{i}, X_\mathbf{j}) / \max\{b_\mathbf{i}^2, b_\mathbf{j}^2\} < \infty, \tag{2}$$

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \sup\nolimits_{\mathbf{n}\in\mathbb{N}^d} \left(\sum\nolimits_{\mathbf{j}\in\mathbf{n}A} \mathsf{E}|X_\mathbf{j} - \mathsf{E}X_\mathbf{j}| / b_\mathbf{n} \right) \leqslant C \cdot |A|, \tag{3}$$

где C — не зависящая от A константа, то имеет место усиленный закон больших чисел

$$\sup\nolimits_{A\in\mathcal{A}} |S(\mathbf{n}_k A) - \mathsf{E}S(\mathbf{n}_k A)| / b_{\mathbf{n}_k} \to 0 \text{ п.н. при } k \to \infty \tag{4}$$

для любой неубывающей последовательности $\{\mathbf{n}_k\}$, такой, что $|\mathbf{n}_k| \to \infty$ при $k \to \infty$.

Теорема 2. *Пусть $\{X_\mathbf{j} : \mathbf{j} \in \mathbb{N}^d\}$ — семейство попарно ОК-зависимых случайных величин с конечными дисперсиями. Пусть $\{b_\mathbf{j}\}$ и $\mathcal{A}$ — те же, что в теореме 1. Если выполнено условие (3) и*

$$\sum\nolimits_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d} \left(\sigma_\mathbf{j}/b_\mathbf{j}\right)^2 < \infty,$$

то имеет место (4).

Вместо сумм $S(\mathbf{n}A)$ можно рассматривать "сглаженные суммы"

$$\hat{S}(\mathbf{n}A) = \sum_{\mathbf{j}\in\mathbb{N}^d} |(\mathbf{j}-\mathbf{1},\mathbf{j}] \cap \mathbf{n}A| X_{\mathbf{j}},$$

где $\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$, и доказывать УЗБЧ для них. Но мы будем рассматривать более общую ситуацию, а именно случайное поле $\{X_{\mathbf{t}}\}$, индексированное непрерывным параметром $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d$, траектории которого п.н. локально интегрируемы, и вместо сумм интегралы

$$S^c(\mathbf{u}A) = \int_{\mathbf{t}\in\mathbf{u}A} X_{\mathbf{t}}\, d\mathbf{t}, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}_+^d.$$

Пусть $S_{\mathbf{u}}^c = \int_{\mathbf{t}<\mathbf{u},\, \mathbf{t}\in\mathbb{R}_+^d} X_{\mathbf{t}}\, d\mathbf{t}$, где $\mathbf{t} < \mathbf{u} \Leftrightarrow t_1 < u_1, \ldots, t_d < u_d$.

Теорема 3. *Пусть $\{X_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ — семейство попарно ПК-зависимых случайных величин, для которых $\sigma_{\mathbf{t}}^2 \equiv \mathsf{D}X_{\mathbf{t}} < \infty$. Пусть $\{b_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ — непрерывная справа неубывающая положительная функция, такая, что $b_{\mathbf{t}} \to \infty$ при $|\mathbf{t}| \to \infty$, и пусть для семейства $\mathcal{A}$ подмножеств $[0,1]^d$ справедливо условие* (1). *Тогда, если выполнены условия*

$$\iint_{\mathbf{r},\mathbf{t}\in\mathbb{R}_+^d} \mathrm{cov}(X_{\mathbf{r}}, X_{\mathbf{t}}) / \max\{b_{\mathbf{r}}^2, b_{\mathbf{t}}^2\}\, d\mathbf{r}d\mathbf{t} < \infty, \tag{5}$$

$$\forall A \in \mathcal{A} \qquad \sup\nolimits_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d} \frac{1}{b_{\mathbf{u}}} \int_{\mathbf{t}\in\mathbf{u}A} \mathsf{E}|X_{\mathbf{t}} - \mathsf{E}X_{\mathbf{t}}|\, d\mathbf{t} = C \cdot |A|, \tag{6}$$

где C — некоторая постоянная, не зависящая от A, то

$$\sup\nolimits_{A\in\mathcal{A}} |S^c(\mathbf{u}_t A) - \mathsf{E}S^c(\mathbf{u}_t A)| / b_{\mathbf{u}_t} \to 0 \text{ п.н. при } t \to \infty \tag{7}$$

для любой непрерывной справа (в евклидовой метрике) неубывающей функции $\{\mathbf{u}_t : t \in \mathbb{R}_+\}$, такой, что $|\mathbf{u}_t| \to \infty$ при $t \to \infty$.

Теорема 4. *Пусть $\{b_{\mathbf{t}}\}$ и $\mathcal{A}$ — те же, что в теореме 3, а $\{X_{\mathbf{t}} : \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d\}$ — поле попарно ОК-зависимых случайных величин с конечными дисперсиями. Если выполнено условие* (6) *и*

$$\int_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}_+^d} (\sigma_{\mathbf{t}}/b_{\mathbf{t}})^2\, d\mathbf{t} < \infty,$$

то имеет место (7).

Доказательство теоремы 1. ПК-зависимость величин X и Y, согласно лемме 1 из [15], равносильна тому, что для любых неубывающих функций f, g

$$\mathrm{cov}\,(f(X), g(Y)) \geqslant 0, \tag{8}$$

если указанная ковариация существует. Используя это соотношение, Биркел в [13] показал, что

$$\mathrm{cov}(X,Y) \geqslant \mathrm{cov}(X^+,Y^+) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{cov}(X,Y) \geqslant \mathrm{cov}(X^-,Y^-) \geqslant 0, \tag{9}$$

где $X^+ = \max\{0, X\}$ и $X^- = X^+ - X$. Без ограничения общности можем полагать, что величины $X_{\mathbf{j}}$ центрированы. Пусть далее в доказательстве $S^+(\cdot)$ и $S_\cdot^+$ обозначают соответствующие суммы, составленные только из $X_{\mathbf{j}}^+$.

Пусть $\{\mathbf{n}_k\}$ — некоторая неубывающая последовательность, для которой верно условие (3). Сперва покажем, что

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}_k}}(S^+(\mathbf{n}_k[0,1]^d) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_k[0,1]^d)) = \frac{1}{b_{\mathbf{n}_k}}(S_{\mathbf{n}_k}^+ - \mathsf{E}S_{\mathbf{n}_k}^+) \to 0 \text{ п.н. при } k \to \infty. \tag{10}$$

Определим множество $I = \{p \in \mathbb{N} : [2^p, 2^{p+1}) \cap \{b_{\mathbf{n}_k},\, k \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset\} \cup \{0\}$. Пусть p' — следующий за $p \in I$ элемент I. Для $p \in I$ положим $k(0) = 0$ и $k(p) = \min\{k \in \mathbb{N} : b_{\mathbf{n}_k} \in [2^p, 2^{p+1})\}$ при $p \geqslant 1$. Возьмем множество $T = \{\mathbf{n}_{k(p)},\, p \in I\}$, где $\mathbf{n}_0 = \mathbf{1}$. Выделим в $\mathbb{N}^d$ подмножества

$$J_p = \{\mathbf{j} \in \mathbb{N}^d : \mathbf{j} \leqslant \mathbf{n}_{k(p')-1}\} \setminus \cup_{q\in I, q<p} J_q,$$

где $p \in I$. Учитывая монотонность $b_{\mathbf{j}}$, для $\mathbf{n}_{k(p)} \in T$ можем записать $2^p \leqslant b_{\mathbf{n}_{k(p)}} \leqslant b_{\mathbf{n}_{k(p')-1}} < 2^{p+1} \leqslant b_{\mathbf{n}_{k(p')}}$. Отсюда следует, что $\max_{\mathbf{i}\in J_p} b_{\mathbf{i}}/b_{\mathbf{n}_{k(p)}} = b_{\mathbf{n}_{k(p')-1}}/b_{\mathbf{n}_{k(p)}} \leqslant 2$. Тогда согласно (2) с учетом ПК-зависимости и условия (9) имеем

$$\sum_{p\in I} \frac{\mathsf{D}S^+(J_p)}{b^2_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \leqslant \sum_{p\in I} \sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in J_p} \frac{\operatorname{cov}(X^+_{\mathbf{i}}, X^+_{\mathbf{j}})}{\max\{b^2_{\mathbf{i}}, b^2_{\mathbf{j}}\}} \frac{\max_{\mathbf{i}\in J_p} b^2_{\mathbf{i}}}{b^2_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \leqslant 4 \sum_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in \mathbb{N}^d} \frac{\operatorname{cov}(X_{\mathbf{i}}, X_{\mathbf{j}})}{\max\{b^2_{\mathbf{i}}, b^2_{\mathbf{j}}\}} < \infty. \tag{11}$$

Таким образом, по неравенству Чебышева и лемме Бореля—Кантелли

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \sum\nolimits_{\mathbf{j}\in J_p} (X^+_{\mathbf{j}} - \mathsf{E}X^+_{\mathbf{j}}) = \frac{S^+(J_p) - \mathsf{E}S^+(J_p)}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \to 0 \text{ п.н. при } p \in I,\ p \to \infty. \tag{12}$$

Теперь заметим, что для любого $p \in I$

$$\frac{1}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \sum\nolimits_{q\leqslant p,\, q\in I} b_{\mathbf{n}_{k(q)}} \leqslant \frac{2^p}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \frac{1}{2^p} \sum\nolimits_{q\leqslant p,\, q\in I} \frac{b_{\mathbf{n}_{k(q)}}}{2^{q+1}} 2^{q+1} \leqslant \frac{1}{2^p} \sum\nolimits_{q\leqslant p,\, q\in I} 2^{q+1} \leqslant \frac{1}{2^p} 2^{p+2} = 4.$$

Отсюда и из (12) по лемме Теплица в силу представления

$$\frac{S^+_{\mathbf{n}_{k(p')-1}}}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} = \frac{1}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \sum\nolimits_{\mathbf{j}\in \bigcup_{q\leqslant p,\, q\in I} J_p} X^+_{\mathbf{j}} = \frac{1}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \sum\nolimits_{q\leqslant p,\, q\in I} b_{\mathbf{n}_{k(q)}} \frac{S^+(J_q)}{b_{\mathbf{n}_{k(q)}}} \tag{13}$$

получаем

$$\left(S^+_{\mathbf{n}_{k(p')-1}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k(p')-1}}\right) / b_{\mathbf{n}_{k(p)}} \to 0 \text{ п.н. при } p \in I,\ p \to \infty. \tag{14}$$

Применим метод, предложенный в [16]. По условию (3) для всех $p \in I$ и любого $\mathbf{n}_k \in J_p$

$$0 \leqslant \frac{1}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_k} = \frac{b_{\mathbf{n}_k}}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \frac{1}{b_{\mathbf{n}_k}} \sum_{\mathbf{j}\in \mathbf{n}_k[0,1]^d} \mathsf{E}X^+_{\mathbf{j}} \leqslant 2 \frac{1}{b_{\mathbf{n}_k}} \sum_{\mathbf{j}\in \mathbf{n}_k[0,1]^d} \mathsf{E}|X_{\mathbf{j}}| \leqslant 2C \cdot |[0,1]^d| = 2C.$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть $L = [2C/\varepsilon]$ — целая часть $2C/\varepsilon$. Для $p \in I$ и $s = 1, \ldots, L$ положим

$$k^+_{p,s} = \max\{k \in \mathbb{N} : \mathbf{n}_k \in J_p,\ s\varepsilon \leqslant \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_k}/b_{\mathbf{n}_{k(p)}} < (s+1)\varepsilon\};$$

$$k^-_{p,s} = \min\{k \in \mathbb{N} : \mathbf{n}_k \in J_p,\ s\varepsilon \leqslant \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_k}/b_{\mathbf{n}_{k(p)}} < (s+1)\varepsilon\}.$$

Если множества в правой части пусты, то полагаем $k^\pm_{p,s} = k(p)$. Пусть $J^+_{p,s} = \{\mathbf{j} \in J_p : \mathbf{j} \leqslant \mathbf{n}_{k^+_{p,s}}\}$. Тогда для любого $s = 1, \ldots, L$ из соотношения (11) вытекает

$$\sum\nolimits_{p\in I} b^{-2}_{\mathbf{n}_{k(p)}} \mathsf{D}\left(\sum\nolimits_{\mathbf{j}\in J^+_{p,s}} X^+_{\mathbf{j}}\right) \leqslant \sum\nolimits_{p\in I} b^{-2}_{\mathbf{n}_{k(p)}} \mathsf{D}S^+(J_p) < \infty.$$

Таким образом, $\sum_{\mathbf{j}\in J^+_{p,s}} (X^+_{\mathbf{j}} - \mathsf{E}X^+_{\mathbf{j}})/b_{\mathbf{n}_{k(p)}} \to 0$ п.н. при $p \to \infty$, что с учетом (14) дает для любого $s = 1, \ldots, L$

$$\frac{S^+_{\mathbf{n}_{k^+_{p,s}}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^+_{p,s}}}}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} = \frac{S^+_{\mathbf{n}_{k(p)-1}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k(p)-1}}}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} + \frac{\sum_{\mathbf{j}\in J^+_{p,s}} (X^+_{\mathbf{j}} - \mathsf{E}X^+_{\mathbf{j}})}{b_{\mathbf{n}_{k(p)}}} \to 0 \quad \text{п.н. при } p \to \infty.$$

Аналогично $(S^+_{\mathbf{n}_{k^-_{p,s}}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^-_{p,s}}})/b_{\mathbf{n}_{k(p)}} \to 0$ п.н. при $p \to \infty$.

Пусть число p достаточно велико и $k : \mathbf{n}_k \in J_p$. Введем событие $B = \{\omega : S^+_{\mathbf{n}_k}(\omega) > \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_k}\}$. Пусть число $s(k)$ таково, что $\mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_k} \in [s(k)\varepsilon, (s(k)+1)\varepsilon)$. Тогда

$$b^{-1}_{\mathbf{n}_{k(p)}} \left|S^+_{\mathbf{n}_k} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_k}\right| \leqslant b^{-1}_{\mathbf{n}_{k(p)}} \left(\left|S^+_{\mathbf{n}_{k^+_{p,s(n)}}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^+_{p,s(n)}}}\right| + \left|\mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^+_{p,s(n)}}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^-_{p,s(n)}}}\right|\right) \mathbb{I}(B) +$$

$$+b^{-1}_{\mathbf{n}_{k(p)}}\left(\left|S^+_{\mathbf{n}_{k^-_{p,s(n)}}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^-_{p,s(n)}}}\right| + \left|\mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^+_{p,s(n)}}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^-_{p,s(n)}}}\right|\right)\mathbb{I}(\Omega \setminus B) \leqslant$$

$$\leqslant b^{-1}_{\mathbf{n}_{k(p)}}\left|S^+_{\mathbf{n}_{k^+_{p,s(n)}}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^+_{p,s(n)}}}\right| + b^{-1}_{\mathbf{n}_{k(p)}}\left|S^+_{\mathbf{n}_{k^-_{p,s(n)}}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^-_{p,s(n)}}}\right| + b^{-1}_{\mathbf{n}_{k(p)}}\left|\mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^+_{p,s(n)}}} - \mathsf{E}S^+_{\mathbf{n}_{k^-_{p,s(n)}}}\right| \leqslant 3\varepsilon,$$

что доказывает (10) для любой последовательности $\{\mathbf{n}_k\}$, такой, что $|\mathbf{n}_k| \to \infty$. Отсюда следует, что для любого вектора $\mathbf{x} \in (0,1]^d$ и любой такой последовательности $\{\mathbf{n}_k\}$ выполнено

$$(S^+(\mathbf{n}_k[\mathbf{0},\mathbf{x}]) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_k[\mathbf{0},\mathbf{x}]))/b_{\mathbf{n}_k} \to 0 \text{ п.н. при } k \to \infty,$$

где $\mathbf{0} = (0,\dots,0)$ и $[\mathbf{0},\mathbf{x}] = [0,x_1] \times \dots \times [0,x_d]$. Действительно, для любого фиксированного вектора $\mathbf{x} \in (0,1]^d$ при каждом $k \in \mathbb{N}$ верно

$$\frac{|S^+(\mathbf{n}_k[\mathbf{0},\mathbf{x}]) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_k[\mathbf{0},\mathbf{x}])|}{b_{\mathbf{n}_k}} = \frac{b_{\mathbf{n}'_k}}{b_{\mathbf{n}_k}}\frac{|S^+(\mathbf{n}'_k[0,1]^d) - \mathsf{E}S(\mathbf{n}'_k[0,1]^d)|}{b_{\mathbf{n}'_k}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|S^+(\mathbf{n}'_k[0,1]^d) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}'_k[0,1]^d)|}{b_{\mathbf{n}'_k}} \to 0 \text{ п.н. при } k \to \infty,$$

где $n'_{ki} = [n_{ki} \cdot x_i]$, $i = 1,\dots,d$, а значит, $\mathbf{n}'_k \leqslant \mathbf{n}_k$ и $b_{\mathbf{n}'_k} \leqslant b_{\mathbf{n}_k}$. Далее используем схему доказательства теоремы 1 из [15]. Приведем соответствующие рассуждения для полноты изложения. Из предыдущего соотношения по линейности следует, что

$$|S^+(\mathbf{n}_kA) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kA)|/b_{\mathbf{n}_k} \to 0 \text{ п.н. при } k \to \infty \tag{15}$$

для всякого множества $A \in \mathcal{A}$, которое может быть представлено как конечные объединения и пересечения параллелепипедов вида $[\mathbf{0},\mathbf{x}] \subseteq [0,1]^d$. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и обозначим $C_{\mathbf{j}} = m^{-1}(\mathbf{j}-\mathbf{1},\mathbf{j}] \equiv (m^{-1}(j_1-1), m^{-1}j_1] \times \dots \times (m^{-1}(j_d-1), m^{-1}j_d]$. Для любого $A \in \mathcal{A}$ определим $R^-_m(A) = \cup_{C_{\mathbf{j}} \subseteq A} C_{\mathbf{j}}$ и $R^+_m(A) = \cup_{C_{\mathbf{j}} \cap A \neq \emptyset} C_{\mathbf{j}}$. Так как любая точка $R^+_m(A) \setminus R^-_m(A)$ удалена от границы A не далее чем на длину диагонали куба со стороной $1/m$, то

$$\sup_{A \in \mathcal{A}} |R^+_m(A) \setminus R^-_m(A)| \leqslant r(d^{1/2}/m). \tag{16}$$

Обозначим $\mathcal{R}^-_m = \{R^-_m(A) : A \in \mathcal{A}\}$ и $\mathcal{R}^\Delta_m = \{R^+_m(A) \setminus R^-_m(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Так как все $A \subseteq [0,1]^d$, то множества $\mathcal{R}^-_m$ и $\mathcal{R}^\Delta_m$ конечны. Тогда

$$\sup\nolimits_{A\in\mathcal{A}} |S^+(\mathbf{n}_kA) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kA)|/b_{\mathbf{n}_k} \leqslant \sup\nolimits_{A\in\mathcal{A}} (S^+(\mathbf{n}_kA) - S^+(\mathbf{n}_kR^-_m(A)))/b_{\mathbf{n}_k} +$$

$$+ \sup_{A\in\mathcal{A}} |S^+(\mathbf{n}_kR^-_m(A)) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kR^-_m(A))|/b_{\mathbf{n}_k} + \sup_{A\in\mathcal{A}} (\mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kA) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kR^-_m(A)))/b_{\mathbf{n}_k} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{A\in\mathcal{A}} (S^+(\mathbf{n}_kR^+_m(A)) - S^+(\mathbf{n}_kR^-_m(A)))/b_{\mathbf{n}_k} + \sup_{A\in\mathcal{A}} |S^+(\mathbf{n}_kR^-_m(A)) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kR^-_m(A))|/b_{\mathbf{n}_k} +$$

$$+ \sup_{A\in\mathcal{A}} (\mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kR^+_m(A)) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kR^-_m(A)))/b_{\mathbf{n}_k} \leqslant \max_{B\in\mathcal{R}^\Delta_m} S^+(\mathbf{n}_kB)/b_{\mathbf{n}_k} + \max_{B\in\mathcal{R}^\Delta_m} \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kB)/b_{\mathbf{n}_k} +$$

$$+ \max\nolimits_{B\in\mathcal{R}^-_m} |S^+(\mathbf{n}_kB) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kB)|/b_{\mathbf{n}_k} \leqslant \max\nolimits_{B\in\mathcal{R}^\Delta_m} |S^+(\mathbf{n}_kB) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kB)|/b_{\mathbf{n}_k} +$$

$$+ \max\nolimits_{B\in\mathcal{R}^\Delta_m} 2\mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kB)/b_{\mathbf{n}_k} + \max\nolimits_{B\in\mathcal{R}^-_m} |S^+(\mathbf{n}_kB) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kB)|/b_{\mathbf{n}_k}.$$

Имеем

$$\lim_{k\to\infty} \max_{B\in\mathcal{R}^\Delta_m} |S^+(\mathbf{n}_kB) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kB)|/b_{\mathbf{n}_k} = 0 \text{ п.н. (из (15) и конечности } \mathcal{R}^\Delta_m\text{)}, \tag{17}$$

$$\lim_{k\to\infty} \max_{B\in\mathcal{R}^-_m} |S^+(\mathbf{n}_kB) - \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kB)|/b_{\mathbf{n}_k} = 0 \text{ п.н. (из (15) и конечности } \mathcal{R}^-_m\text{)}, \tag{18}$$

$$\sup_{k\to\infty}\max_{B\in\mathcal{R}_m^\Delta} \mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kB)/b_{\mathbf{n}_k} \leqslant \sup_{k\to\infty}\max_{B\in\mathcal{R}_m^\Delta} |B|C \leqslant C\cdot r(d^{1/2}/m) \quad \text{(ввиду (3) и (16)).} \tag{19}$$

Объединяя (17), (18) и (19), получаем

$$\overline{\lim}_{k\to\infty}\sup\nolimits_{A\in\mathcal{A}}|S^+(\mathbf{n}_kA)-\mathsf{E}S^+(\mathbf{n}_kA)|/b_{\mathbf{n}_k} \leqslant C\cdot r(d^{1/2}/m) \text{ п.н.},$$

что в силу произвольности m по условию (1) может быть сделано сколь угодно малым. Заменяя теперь $X_\mathbf{j}$ на $-X_\mathbf{j}$, получаем аналогичное сооношение для $X_\mathbf{j}^-$, что и доказывает теорему 1.

Доказательство теоремы 2. Заметим, что если величины X и Y ОК-зависимы, то $-X$ и Y ПК-зависимы. Поэтому из (8) имеем

$$\mathsf{cov}\,(f(X),g(Y)) = -\,\mathsf{cov}\,(f_1(-X),g(Y)) \leqslant 0,$$

где функции f,g — неубывающие функции, для которых указанная ковариация существует, а $f_1(x)=-f(-x)$. Отсюда следует, что $\mathsf{cov}(X^+,Y^+)\leqslant 0$ и $\mathsf{cov}(X^-,Y^-)\leqslant 0$. Далее доказываем так же, как теорему 1, заменяя всюду $\mathsf{D}S^+(\cdot)$ и $\mathsf{D}S^+_{(\cdot)}$ на суммы дисперсий слагаемых, входящих в $S^+(\cdot)$ и $S^+_{(\cdot)}$ соответственно.

Доказательство теоремы 3. Будем следовать схеме доказательства теоремы 1. Построим множество $I=\{p\in\mathbb{N} : [2^p,2^{p+1})\cap\{b_{\mathbf{u}_t},\, t\in\mathbb{R}_+\}\neq\emptyset\}\cup\{0\}$, последовательность $t(0)=0$ и $t(p)=\min\{t\in\mathbb{R}_+ : b_{\mathbf{u}_t}\in[2^p,2^{p+1})\}$ при $p\in I$, $p\geqslant 1$. Здесь минимум достигается, так как функция $b_{\mathbf{u}_t}$ не убывает и непрерывна справа по t. Вводим множества $J_p=\{\mathbf{t}\in\mathbb{R}_+^d : \mathbf{t}<\hat{\mathbf{u}}_p\equiv\lim_{t\to t(p')-0}\mathbf{u}_{t(p')}\}\setminus\bigcup_{q\in I,\,q<p}J_q$, где $p\in I$. Как и в дискретном случае, для $p\in I$ верно

$$2^p\leqslant b_{\mathbf{u}_{t(p)}}\leqslant\sup\nolimits_{\mathbf{t}\in J_p}b_\mathbf{t}\leqslant 2^{p+1}\leqslant b_{\mathbf{u}_{t(p')}} \quad \text{и} \quad b^{-1}_{\mathbf{u}_{t(p)}}\sum\nolimits_{q\leqslant p,\,q\in I}b_{\mathbf{u}_{t(q)}}\leqslant 4. \tag{20}$$

По условию (5) и теореме Фубини имеем

$$\sum_{p\in I}\frac{\mathsf{D}S^{c+}(J_p)}{b^2_{\mathbf{u}_{t(p)}}}\leqslant\sum_{p\in I}\frac{\sup_{\mathbf{t}\in J_p}b^2_\mathbf{t}}{b^2_{\mathbf{u}_{t(p)}}}\iint\limits_{\mathbf{r},\mathbf{t}\in J_p}\frac{\mathsf{cov}(X^+_\mathbf{r},X^+_\mathbf{t})}{\max\{b^2_\mathbf{r},b^2_\mathbf{t}\}}\,d\mathbf{r}d\mathbf{t}\leqslant 4\iint\limits_{\mathbf{r},\mathbf{t}\in J_p}\frac{\mathsf{cov}(X^+_\mathbf{r},X^+_\mathbf{t})}{\max\{b^2_\mathbf{r},b^2_\mathbf{t}\}}\,d\mathbf{r}d\mathbf{t}<\infty.$$

Отсюда следует, что $(S^{c+}(J_p)-\mathsf{E}S^{c+}(J_p))/b_{\mathbf{u}_{t(p)}}\to 0$ п.н. при $p\to\infty$. Тогда согласно представлению, аналогичному (13), из соотношения (20) и леммы Теплица вытекает

$$(S^{c+}(\cup_{q\leqslant p}J_p)-\mathsf{E}S^{c+}(\cup_{q\leqslant p}J_p))/b_{\mathbf{u}_{t(p)}}=(S^{c+}_{\hat{\mathbf{u}}_p}-\mathsf{E}S^{c+}_{\hat{\mathbf{u}}_p})/b_{\mathbf{u}_{t(p)}}\to 0 \text{ п.н. при } p\to\infty.$$

Далее точно так, как при доказательстве теоремы 1, последовательно показывается, что

$$(S^{c+}_{\mathbf{u}_t}-\mathsf{E}S^{c+}_{\mathbf{u}_t})/b_{\mathbf{u}_t}\to 0 \text{ п.н. при } t\to\infty;$$

$$(S^{c+}(\mathbf{u}_t[\mathbf{0},\mathbf{x}])-\mathsf{E}S^{c+}(\mathbf{u}_t[\mathbf{0},\mathbf{x}]))/b_{\mathbf{u}_t}\to 0 \text{ п.н. при } t\to\infty,\ x\in[0,1]^d$$

$$\text{и } \sup\nolimits_{A\in\mathcal{A}}|S^{c+}(\mathbf{u}_tA)-\mathsf{E}S^{c+}(\mathbf{u}_tA)|/b_{\mathbf{u}_t}\to 0 \text{ п.н. при } t\to\infty.$$

Заменяя величины $X_\mathbf{j}$ на $-X_\mathbf{j}$, устанавливаем справедливость (7) для $X_\mathbf{j}^-$, откуда и следует утверждение теоремы.

Доказательство теоремы 4. Учитывая замечание, сделанное в начале доказательства теоремы 2, и заменяя в доказательстве теоремы 3 всюду $\mathsf{D}S^+(\cdot)$ и $\mathsf{D}S^+_{(\cdot)}$ на интегралы дисперсий слагаемых по соответствующим множествам, получим требуемое утверждение.

Заметим, что теорема 1 распространяет результат работы [5] на семейство зависимых величин, а теорему 1 из [13] обобщает на случайные поля, частичные суммы которых индексированы множествами.

Теперь покажем, что условия доказанных теорем являются оптимальными в том смысле, что если хотя бы условие (2) или условие (3) не выполняется, то УЗБЧ может не иметь места. Действительно, пусть $\{X_j\}$ — последовательность попарно независимых, а значит и попарно ПК-зависимых, случайных величин, $d=1$, $\mathcal{A}$ — семейство всех измеримых подмножеств отрезка $[0,1]$, для которых выполнено (1), и $b_j \equiv j$. Если выполнены все остальные условия теоремы 1 кроме (3), то даже при замене условия (2) на более сильное:

$$\sum\nolimits_{j\geqslant 1} j^{-2}\mathsf{D}X_j(\log\log j)^{\varepsilon} < \infty,$$

где $0 < \varepsilon < 1$, соотношение (4) может не выполняться. Соответствующий пример построен при доказательстве теоремы 3 из [16].

Пусть опять $d = 1$, $\mathcal{A}$ — семейство измеримых подмножеств отрезка $[0, 1]$, для которых выполнено условие (1), и $\inf\{|A| : A \in \mathcal{A}\} = x_0 > 0$. Пусть теперь X — случайная величина, $\mathsf{E}X = 0$, $\mathsf{E}|X| = 1$, $\mathsf{E}X^2 = 1$, а $\{a_j\}$ — последовательность положительных чисел, таких, что $\sup a_j < 1$ и $\sum_{j\geqslant 1} a_j = \infty$. Положим

$$b'_0 = 1, \quad b'_j = \prod\nolimits_{i=1}^{j} 1/(1-a_i), \qquad \delta_j = b'_j - b'_{j-1} = a_j b'_j, \qquad b_j = \sqrt{b'_j(b'_j - 1)} \quad j \geqslant 1.$$

Заметим, что b_j не убывает и $b_j \to \infty$, так как

$$\ln b'_j = \sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant j} -\ln(1-a_i) = \sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant j} a_i(-a_i^{-1}\ln(1-a_i)) \geqslant \sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant j} a_i \to \infty \text{ при } j \to \infty,$$

а функция $-x^{-1}\ln(1-x) \geqslant 1$ при $x \in (0, 1)$. Определим $X_j = \delta_j X$. Очевидно, что полученная последовательность состоит из попарно ПК-зависимых величин, при этом

$$\mathsf{cov}(S_j, X_j) = \mathsf{E}S_jX_j = \delta_j \sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant j} \delta_i = a_j b'_j \sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant j} (b'_i - b'_{i-1}) = a_j b'_j (b'_j - 1),$$

$$\sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant j} \mathsf{E}|X_i| = \sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant j} \delta_i = \sum\nolimits_{1\leqslant i\leqslant j} (b'_i - b'_{i-1}) = b'_j - 1.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \frac{\mathsf{cov}(X_i, X_j)}{\max\{b_i^2, b_j^2\}} = \sum_{j\geqslant 1} \frac{\mathsf{cov}(S_j, X_j)}{b_j^2} = \sum_{j\geqslant 1} \frac{a_j b'_j (b'_j - 1)}{b'_j(b'_j - 1)} = \sum_{j\geqslant 1} a_j = \infty \qquad ((2) \text{ не выполнено}),$$

$$\forall A \in \mathcal{A} \quad \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{|A|} \frac{\sum_{i\in jA} \mathsf{E}|X_i|}{b_j} \leqslant \frac{1}{x_0} \frac{b'_j - 1}{\sqrt{b'_j(b'_j - 1)}} \leqslant \frac{1}{x_0} \qquad ((3) \text{ выполнено})$$

и

$$\frac{|S_j|}{b_j} = \frac{\sum_{1\leqslant i\leqslant j} \delta_i |X|}{b_j} = \frac{(b'_j - 1)|X|}{\sqrt{b'_j(b'_j - 1)}} = |X| \sqrt{\frac{b'_j - 1}{b'_j}} \geqslant \frac{1}{2}|X|$$

при всех достаточно больших p, т.е. УЗБЧ не выполнен.

Автор выражает искреннюю признательность проф. А.В. Булинскому за постоянное внимание и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Петров В.В.* Предельные теоремы для суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.
2. *Smythe R.T.* Strong law of large numbers for r-dimensional arrays of random variables // Ann. Probab. 1973. **1**. 164–170.
3. *Gut A.* Marcinkiewicz laws and convergence rates in the law of large numbers for random variables with multidimensional indices // Ann. Probab. 1978. **6**. 469–482.
4. *Клесов О.И.* Усиленный закон больших чисел для кратных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин // Матем. заметки. 1985. **38**. 915–930.
5. *Bass R.F., Pyke R.* A strong law of large numbers for partial-sum processes indexed by sets // Ann. Probab. 1984. **12**. 268–271.
6. *Giné E., Zinn J.* The strong law of large numbers for partial sum processes indexed by sets // Ann. Probab. 1987. **15**, N 1. 154–163.

7. *Клесов О.И.* Неравенство Гаека–Реньи для случайных полей и усиленный закон больших чисел // Теория вероятностей и матем. статистика. 1980. Вып. 22. 58–66.
8. *Moricz F.* Multiparameter strong laws of Large numbers. I (Second moment restrictions) // Acta sci. math. 1978. **40**. 143–156.
9. *Moricz F.* Strong limit theorem for blockwise m-dependent and quasi-orthogonal r.v.'s. // Proc. AMS. 1987. **101**. 709–715.
10. *Le Gac B., Moricz F., Tandori K.* A new inequality of Menshov–Rademaher type and the strong law of large numbers // Acta math. hung. 1995. **67**. 347–360.
11. *Гапошкин В.Ф.* Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей // Теория вероятностей и ее применения. 1977. **22**, вып. 2. 295–319.
12. *Гапошкин В.Ф.* Многопараметрический усиленный закон больших чисел для однородных случайных полей // Успехи матем. наук. 1981. **36**. 197–198.
13. *Birkel T.* A note on the strong law of large numbers for positively dependent random variables // Statist. Probab. Lett. 1989. **7**. 17–20.
14. *Matula P.* Convergence of weighted averages of associated random variables // Probab. Math. Statist. 1996. **16**. 337–343.
15. *Lehmann E.L.* Some concepts of dependence // Ann. Math. Statist. 1966. **37**. 1137–1153.
16. *Csörgő S., Tandori K., Totik V.* On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables // Acta math. hung. 1983. **42**, N 3-4. 319–330.

Поступила в редакцию
1.04.2000

УДК 514.763.637

КЛАССИФИКАЦИЯ МИНИМАЛЬНЫХ СЕТЕЙ НА ПОЛНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С ТРЕМЯ "ПАРАБОЛИЧЕСКИМИ КОНЦАМИ"

О. О. Егорова

В данной статье рассматриваются локально минимальные сети на полной поверхности постоянной отрицательной кривизны, гомеоморфной сфере с тремя выколотыми точками. Нас интересует вопрос: сколько таких сетей существует с точностью до гомотопической эквивалентности и все ли ребра имеют равные длины?

В настоящее время известно подробное описание локально минимальных сетей на полных поверхностях постоянной кривизны $K \geqslant 0$. Например, в случае $K > 0$ для сферы существует 10 локально минимальных сетей [1]. Более того, А. А. Ошемковым [2] получено геометрическое описание "правильных" минимальных сетей на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, а также некоторый способ их построения для случая, когда длина ребра равна $\ln 3$.

Определение 1. Назовем 3-графом граф, все вершины которого имеют степень 3.

Определение 2. Локально минимальной сетью Γ на полной (в смысле метрики) поверхности P постоянной отрицательной кривизны называется такое вложение 3-графа γ в P, при котором ребра графа переходят в отрезки геодезических, а углы между ребрами в каждой вершине равны $2\pi/3$. Минимальную сеть назовем "правильной", если все ее ребра имеют одинаковую длину.

Утверждение 1 (А. А. Ошемков). *Вершины ломаных, ограничивающих области, на которые правильная минимальная сеть (с длиной ребра a) разбивает плоскость Лобачевского, лежат*

1) *на окружностях в случае $a < \ln 3$;*
2) *на орициклах в случае $a = \ln 3$;*
3) *на гиперциклах в случае $a > \ln 3$.*

Определение 3 (А. А. Ошемков). Рассмотрим на модели Пуанкаре (верхняя полуплоскость) плоскости Лобачевского многоугольник с вершинами $i + \frac{2k}{\sqrt{3}}$, $k = 0, 1, \dots, n$ и ∞. Поверхность (с границей), полученную из этого многоугольника отождествлением его "вертикальных" сторон, будем называть (правильным) проколотым n-угольником.