Ф. Л. Варпаховский, К вопросу об аксиоматизации реализуемых пропозициональных формул,
Докл. АН СССР, 1990, том 314, номер 1, 32–36

https://www.mathnet.ru/dan6442

ЛИТЕРАТУРА

1. *Renno P.* – Mech. Res. Comm., 1981, vol. 8(2), p. 83–92. 2. *Lick W.* – Adv. Appl. Mech., 1967, vol. 10, p. 1–72. 3. *Soo S.L.* Fluid Dynamics of Multiphase Systems. N.Y.: Blaisedell, 1967. 356 p. 4. *Morrison J.A.* – Quart. Appl. Math., 1956, vol. 14, p. 16–34. 5. *Вайнберг Б.Р.* Асимптотические методы в уравнениях математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1982. 296 с. 6. *Габов С.А., Тикиляйнен А.А.* – ЖВМ и МФ, 1987, т. 27, № 7, с. 1100–1105. 7. *Fattorini H.O.* – J. Different. Equat., 1969, vol. 6, p. 50–70. 8. *Lutz D.* – Lect. Notes Math., 1982, vol. 948, p. 73–97. 9. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1967. 464 с.

УДК 517.12 МАТЕМАТИКА

© Ф.Л. ВАРПАХОВСКИЙ

К ВОПРОСУ ОБ АКСИОМАТИЗАЦИИ РЕАЛИЗУЕМЫХ ПРОПОЗИЦИОНАЛЬНЫХ ФОРМУЛ

(Представлено академиком А.А. Дородницыным 4 VII 1989)

Понятие реализуемой пропозициональной формулы, основанное на определении реализуемости по Клини [1], введено еще в начале пятидесятых годов [2]. До сих пор неизвестно, однако, как устроено множество реализуемых пропозициональных формул, например, является ли это множество разрешимым или хотя бы перечислимым. В работе [3] автором построен весьма обширный р а з р е ш и м ы й класс реализуемых пропозициональных формул, но впоследствии В.Е. Плиско и М.М. Кипнису удалось построить примеры реализуемых формул, не содержащихся в этом классе [4]. Не исключено, что трудности, связанные с описанием всех реализуемых пропозициональных формул, можно будет преодолеть, если несколько расширить традиционный логико-арифметический язык, увеличив тем самым его выразительные возможности. В настоящей работе предпринимается попытка аксиоматизации указанного класса на основе подходящим образом расширенного логико-арифметического языка.

Большая часть используемых (и, как правило, не оговариваемых) здесь обозначений заимствована из монографии [5]. Заглавные латинские буквы будут обозначать формулы (пропозициональные или логико-арифметические), строчные латинские буквы – натуральные числа или числовые переменные, выражения вида $f(x_1, \ldots, x_m)$, $k(x)$ и т.д. – частично-рекурсивные функции (соответствующей местности) с номерами f, k и т.д., выражение $a \mid A$ будет означать, что число a реализует логико-арифметическую формулу A.

Добавим теперь к обычным правилам образования формул следующие два правила.

1. Пусть A и B – произвольные арифметические (или пропозициональные) формулы. Тогда выражение

$$A \Rightarrow B$$

также будем считать арифметической (соответственно пропозициональной) формулой; указанную формулу будем называть с и л ь н о й и м п л и к а ц и е й (от A к B).

2. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – произвольные арифметические (или пропозициональные) формулы и пусть θ означает последовательность формул $(A_1, A_2, \ldots, A_m)$, а θ_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, – некоторую ее подпоследовательность $(A_{i,1}, A_{i,2}, \ldots, A_{i,m_i})$. Тогда выражение

$$(\theta(\theta_1 B_1 \nabla \theta_2 B_2 \nabla \ldots \nabla \theta_n B_n)) \quad \text{(сокращенно } \left(\theta\left(\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} \theta_i B_i\right)\right)\text{)}$$

также будет считаться арифметической (соответственно пропозициональной) формулой; эту формулу будем называть условной дизъюнкцией формул $B_1, B_2, \ldots, B_n$ (с условиями $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_n$).

Введенные в п.п. 1 и 2 арифметические формулы считаются замкнутыми тогда и только тогда, когда замкнутыми являются все составляющие их формулы (т.е. A и B в п. 1, соответственно $A_1, \ldots, A_m$ и $B_1, \ldots, B_n$ в п. 2).

Содержательное истолкование операций сильной импликации и условное дизъюнкции дается определениями реализуемости соответствующих формул.

Определение 1. Пусть формула $A \Rightarrow B$ замкнута, а k – натуральное число. Полагаем по определению

$$k \mid (A \Rightarrow B) \rightleftharpoons (a)((a \mid A \to !k(a)) \,\&\, (!k(a) \to k(a) \mid B)).$$

Для большей компактности определения реализуемости условной дизъюнкции введем некоторые сокращения. Положим $\mathrm{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $\mathrm{a}_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,m_i})$, $f(\mathrm{a}) = f(a_1, \ldots, a_m)$ (если f – m-местная функция), $f(\mathrm{a}_i) = f(a_{i,1}, \ldots, a_{i,m_i})$ (если f – m_i-местная функция); записи $\mathrm{a} \mid \theta$ и $\mathrm{a}_i \mid \theta_i$ означают соответственно $\mathop{\&}_{j=1}^{m} a_j \mid A_j$ и $\mathop{\&}_{j=1}^{m_i} a_{i,j} \mid A_{i,j}$.

Определение 2. Пусть формула $\left(\theta\left(\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} \theta_i B_i\right)\right)$ замкнута, а k – натуральное число. Полагаем, по определению,

$$k \left| \left(\theta\left(\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} \theta_i B_i\right)\right) \right. \rightleftharpoons \left(k = \prod_{i=0}^{n} p_i^{k_i}\right) \,\&$$

$$\& \ (\mathrm{a})(Ei)_{(1 \leqslant i \leqslant n)}(\mathrm{a} \mid \theta \to (k_0(\mathrm{a}) = i) \,\&\, (!k_i(\mathrm{a}_i))) \,\&$$

$$\& \ (i)_{(1 \leqslant i \leqslant n)}(\mathrm{a})((\mathrm{a}_i \mid \theta_i) \,\&\, (!k_i(\mathrm{a}_i)) \to k_i(\mathrm{a}_i) \mid B_i).$$

Расширив понятие формулы логики высказываний за счет присоединения двух указанных выше операций, мы будем по-прежнему считать пропозициональную формулу регулярно реализуемой в том и только том случае, когда существует число, реализующее любой ее арифметический пример, а именно результат подстановки вместо пропозициональных переменных произвольных замкнутых арифметических формул исходного языка (при этом нужно отметить, что сам этот пример может оказаться арифметической формулой расширенного языка).

В приводимой ниже теореме 1 θ^*, θ_1^* означают последовательности, получающиеся соответственно из θ и θ_1 путем присоединения к ним (в качестве их последних членов) формулы A, а θ' и θ_i' получаются соответственно из θ и θ_i заменой в них формулы A_p, $1 \leqslant p \leqslant m$, формулой A.

Теорема 1. *Следующие схемы формул* 1–10 *регулярно реализуемы*:

1. $\neg\neg S \supset ((S \Rightarrow A) \supset A)$,

2. $(S_1 \Rightarrow A_1) \,\&\, (S_2 \Rightarrow A_2) \supset ((S_1 \vee S_2) \Rightarrow (A_1 \vee A_2))$,

3. $(S \Rightarrow A_1) \,\&\, (A_1 \supset A_2) \supset (S \Rightarrow A_2)$,

4. $(S \Rightarrow A_1) \& (S \Rightarrow A_2) \supset (S \Rightarrow (A_1 \& A_2))$,

5. $(A \supset B) \sim ((A)((A)B))$,

6. $(\theta(\ldots \nabla\theta_i B_i \nabla\theta_{i+1} B_{i+1} \nabla \ldots)) \sim (\theta(\ldots \nabla\theta_{i+1} B_{i+1} \nabla\theta_i B_i \nabla \ldots))$,

7. $(\theta(\theta_1(B' \vee B'')\nabla \ldots)) \supset (\theta(\theta_1 B' \nabla \theta_1 B'' \nabla \ldots))$,

8. $(\theta(\theta_1(A \supset B)\nabla \ldots)) \supset (\theta^*(\theta_1^* B \nabla \ldots))$,

9. $(A \supset A_p) \& \left(\theta\left(\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} \theta_i B_i\right)\right) \supset \left(\theta'\left(\mathop{\nabla}_{i=1}^{n} \theta'_i B_i\right)\right)$,

10. $(B_1 \supset B) \& (\theta(\theta_1 B_1 \nabla \ldots)) \supset (\theta(\theta_1 B \nabla \ldots))$.

Доказательство теоремы 1 заключается в указании для каждой из схем 1–10 определенного числа и проверке того, что это число реализует любой арифметический пример соответствующей схемы. Так, можно проверить, что для схемы 7 искомым будет число

$$\Lambda k\left(2^{q(k)} \cdot 3^{\Lambda x \mu y((k)_1(x_1) = 3^y)} \cdot 5^{\Lambda x \mu y((k)_1(x_1) = 2 \cdot 3^y)} \prod_{i=3}^{n} p_i^{(k)_{i-1}}\right),$$

где

$$q(k) = \Lambda x((k)_0(x) + ((k)_1(x_1))_0 \cdot \overline{\mathrm{sg}}\,((k)_0(x) \dot{-} 1) + \mathrm{sg}((k)_0(x) \dot{-} 1)).$$

Вообще же, если отвлечься от технических деталей, доказательство теоремы 1 почти не представляет затруднений, и мы его опускаем. Отметим только, что принцип конструктивного подбора (принцип А.А. Маркова [6]) используется лишь при доказательстве регулярной реализуемости схемы 1.

Нашей дальнейшей целью является доказательство регулярной реализуемости еще одной схемы, в которой особую роль будут играть некоторые специальные формулы.

О п р е д е л е н и е 3. Пропозициональную формулу A будем называть ST-формулой, если можно указать такие ее подформулы $S, T_1, \ldots, T_l$ и такую функцию $r(t, s)$, что, каков бы ни был арифметический пример формулы A,

$$(t)_{1 \leqslant t \leqslant l}(s)(\overline{\overline{(Ex)(x \mid T_t)}} \vee s \mid S \to r(t, s) \mid A).$$

Мы ограничимся ST-формулами следующих двух видов:

(1) $\quad \neg S \supset \bigvee_{t=1}^{l} \neg\neg T_t$;

(2) $\quad \neg T_1 \supset S$

(к этим двум случаям сводится – в известном смысле – случай произвольной ST-формулы).

Пусть все члены последовательностей $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_n$ – ST-формулы вида (1) или (2). Выберем из каждой ST-формулы, входящей в θ_i, одну из подформул T_t и конъюнкцию выбранных подформул обозначим T^i. Пусть r – натуральное число и $1 \leqslant r \leqslant n$.

Т е о р е м а 2. *Следующая схема регулярно реализуема:*

11. $\theta\left(\left(\mathop{\nabla}_{i=1}^{r} \theta_i B_i\right) \nabla \left(\mathop{\nabla}_{i=r+1}^{n} \theta_i(\neg S)\right)\right) \supset \left(S \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{r} (\neg\neg T^i \supset B_i)\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим числа l_{ij}, $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant i \leqslant n$, следующим образом: если формула A_j есть формула вида (1) и входит в θ_i, а выбранная в ней подформула T_t реализуема, то l_{ij} реализует заключение формулы A_j; в остальных случаях положим $l_{ij} = 0$.

Обозначим для краткости функцию $\Lambda x U_2^2(x, y)$ символом $[y]$ (при каждом фиксированном y функция $[y]$ дает номер одноместной функции-константы, равной y). Определим для каждого j, $1 \leqslant j \leqslant m$, функцию $g_j(u, s)$, положив

$$(3) \qquad g_j(u, s) = \left[\sum_{i=1}^{n} l_{ij} \overline{\mathrm{sg}} (|u(u) - i|) \right] \text{ или } g_j(u, s) = [s],$$

смотря по тому, является ли формула A_j формулой вида (1) или (2). Под $\mathbf{g}(u, s)$ и $\mathbf{g}_i(u, s)$ будем понимать соответственно вектор-функции $(g_1(u, s), \ldots, g_m(u, s))$ и $(g_{i,1}(u, s), \ldots, g_{i,m_i}(u, s))$. Пусть $e(s)$ – примитивно-рекурсивная функция, которая при любом фиксированном s равна номеру функции $(k)_0(\mathbf{g}(u, s))$. Имеем:

$$(4) \qquad (e(s))(e(s)) \simeq (k)_0(\mathbf{g}(e(s), s)).$$

Определим функцию $h(s)$ условием: если $1 \leqslant (e(s))(e(s)) \leqslant r$, то

$$(5) \qquad h(s) = (e(s))(e(s));$$

в противном случае будем считать, что функция $h(s)$ не определена.

Пусть, далее, общерекурсивная функция $f(i, z)$ удовлетворяет следующему требованию:

$$(6) \qquad (z)(i)_{1 \leqslant i \leqslant r} \left(z \,|\, C_i \to f(i, z) \,\middle|\, \left(\bigvee_{i=1}^{r} C_i \right) \right).$$

Мы теперь покажем, что любой арифметический пример схемы 11 реализуется числом

$$\Lambda k \Lambda s f(h(s), [(k)_{h(s)}(\mathbf{g}_{h(s)}(e(s), s))]).$$

Пусть k реализует посылку схемы 11. Нужно показать, что при условии $s \,|\, S$ функция

$$(7) \qquad f(h(s), [(k)_{h(s)}(\mathbf{g}_{h(s)}(e(s), s))])$$

определена, и если она определена при каком-либо s, то ее значение реализует формулу $\bigvee_{i=1}^{r} (\neg\neg T^i \supset B_i)$.

1°. Пусть $s \,|\, S$. Тогда, очевидно, для любого j, $1 \leqslant j \leqslant m$,

$$g_j(e(s), s) \,|\, A_j.$$

Следовательно, в силу определения 2,

$$(k)_0(\mathbf{g}(e(s), s)) = i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \quad !\,(k)_i(\mathbf{g}_i(e(s), s)).$$

Если бы было $i > r$, то мы имели бы

$$(k)_i(\mathbf{g}_i(e(s), s)) \,|\, \neg S,$$

что противоречит условию $s \,|\, S$. Поэтому $1 \leqslant i \leqslant r$, функция $h(s)$ определена (см. (4), (5)), а значит, определена и функция (7).

2°. Пусть при каком-либо s функция (7) определена. Следовательно, $!h(s)$, т.е. (в силу (5))

$$h(s) = (e(s))(e(s)) = i, \quad 1 \leqslant i \leqslant r.$$

Допустим, что формула T^i реализуема. Тогда для всякой формулы A_j вида (1), входящей в θ_i, выделенная в ней подформула T_t также реализуема. Но ввиду (3)

$$g_j(e(s), s) = [l_{ij}],$$

поэтому в силу определения чисел l_{ij}

$$g_j(e(s), s) \mid A_j.$$

Ясно, что формулу A_j вида (2), входящую в θ_i, реализует любое число, в частности число $g_j(e(s), s) = [s]$.

Таким образом,

$$(8) \quad \begin{aligned} &(k)_{h(s)}(g_{h(s)}(e(s), s)) \mid B_i; \\ &[(k)_{h(s)}(g_{h(s)}(e(s), s))] \mid (\neg\neg T^i \supset B_i). \end{aligned}$$

Но понятно, что условие (8) выполняется также и в случае, когда формула T^i нереализуема. Следовательно, в любом случае число (7) (в силу (6)) реализует формулу $\bigvee_{i=1}^{r} (\neg\neg T^i \supset B_i)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь исчисление высказываний в расширенном языке, в котором к аксиомам интуиционистского исчисления высказываний добавлены схемы аксиом 1–11 (и правило modus ponens сохранено в качестве единственного правила вывода). В силу теорем 1 и 2 в новом исчислении выводимы только регулярно реализуемые формулы. Все известные автору реализуемые формулы, в частности формула Дж. Роуза [2], формула В.А. Янкова [7], формула В.Е. Плиско [4], формула Г.С. Цейтина [8], а также некоторые формулы, построенные М.М. Кипнисом, выводимы в новом исчислении. Аксиомы 1–11 дают единообразную формализацию всех тех принципов, с помощью которых до сих пор удавалось строить реализуемые пропозициональные формулы, а возможно, и всех таких принципов.

Автор выражает искреннюю признательность Н.М. Нагорному и участникам руководимого им семинара по основаниям математики за заинтересованное обсуждение настоящей работы и полезные замечания.

Московский государственный заочный
педагогический институт

Поступило
14 VII 1989

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kleene S.C.* – J. Symbol. Log., 1945, vol. 10, p. 109. 2. *Rose G.F.* – Trans. Amer. Math. Soc., 1953, vol. 75, p. 1. 3. *Варпаховский Ф.Л.* – Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1971, т. 20, с. 8. 4. *Плиско В.Е.* В сб.: Теория алгорифмов и матем. логика, 1974, с. 148. 5. *Клини С.К.* Введение в математику. М., 1957. 6. *Марков А.А., Нагорный Н.М.* Теория алгорифмов. М., 1984. 7. *Янков В.А.* – ДАН, 1963, т. 151, № 5, с. 796–798. 8. *Цейтин Г.С.* – Зап. научн. семинаров ЛОМИ, 1968, т. 8, с. 260.