С. В. Хабиров, Групповая классификация идеальных газодинамических релаксирующих сред по преобразованиям эквивалентности,
Сиб. матем. журн., 2023, том 64, номер 4, 841–859

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2023. Том 64, № 4

УДК 517.958:533.7

ГРУППОВАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ РЕЛАКСИРУЮЩИХ СРЕД ПО ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

С. В. Хабиров

Аннотация. Для дифференциальных уравнений идеальной газовой динамики основные задачи группового анализа решены. Уравнение состояния для термодинамических параметров предполагались не зависящими от времени. Изменяющаяся со временем релаксирующая среда, например, в результате реологии или в силу энергетического усреднения процессов в многофазной среде изучается с точки зрения группового анализа.

Преобразования эквивалентности не меняют уравнения движения, но меняют уравнение состояния. Вычисления преобразований эквивалентности задают предварительную групповую классификацию, т. е. определяют классы уравнений состояния, для которых группа преобразований эквивалентности дифференциальных уравнений изменяется. Показано, что проективные преобразования допускаются для уравнений состояния более общих, чем для стационарных уравнений состояния. Предложен новый конструктивный метод решения задачи групповой классификации путем вычисления преобразований эквивалентности с дополнительными условиями на уравнения состояния, возникающих в процессе анализа условий инвариантности.

DOI 10.33048/smzh.2023.64.415

Ключевые слова: газодинамика, релаксирующее уравнение состояния, преобразования эквивалентности, групповая классификация.

Введение

Групповой (симметрийный) анализ модели из дифференциальных уравнений состоит из нескольких основных задач, и одна из них — вычисление группы преобразований, допускаемой уравнениями. Для уравнений с произвольными элементами решается задача групповой классификации: перечислить классы произвольных элементов, для которых допускаемая группа расширяется. Далее изучаются структуры алгебр Ли допускаемых групп: с точностью до внутренних автоморфизмов составить граф вложенных подалгебр. Каждой подалгебре соответствует подмодель, цепочке вложенных подалгебр соответствуют вложенные подмодели. Каждая подмодель подвергается групповому анализу. Каждой симметрии отвечает закон сохранения. Каждой подгруппе соответствуют точные решения, поведение которых можно изучать групповыми методами и которые могут иметь свои специфические особенности.

Для дифференциальных уравнений газовой динамики со стационарным уравнением состояния задача групповой классификации решена [1]. Структуры допускаемых алгебр Ли приведены в работах [1–7]. Граф вложенных подалгебр построен в [8]. Некоторые инвариантные подмодели подвергались групповому анализу [9, 10]. Частично инвариантные подмодели бывают двух типов: регулярные и нерегулярные [11]. Общая теория регулярных подмоделей изложена в работах [11, 12]. Примеры нерегулярных частично инвариантных решений можно найти в [13]. Примеры дифференциально инвариантных подмоделей рассмотрены в [14, 15]. Каждая подгруппа имеет свои особенности у ее групповых решений, изучение которых далеко от завершения. Нетривиальной ситуацией является появление сильных и слабых разрывов на точных групповых решениях [16–18].

Обобщение классической газодинамики дает уравнения состояния, зависящие от времени в силу реологии [19] или в результате энергетического усреднения физико-химических процессов в элементарном объеме многофазной среды [20]. В настоящей работе решается задача групповой классификации с реологическим уравнением состояния. Метод решения основан на предварительной классификации по преобразованиям эквивалентности. Множество преобразований эквивалентности меняется при дополнительных условиях на уравнение состояния, возникающих при рассмотрении условий инвариантности основных уравнений. После решения задачи групповой классификации по преобразованиям эквивалентности групповая классификация по допускаемым группам вычисляется стандартными методами [21], но требует большого объема аналитических вычислений.

1. Уравнение газовой динамики с уравнением состояния, меняющегося со временем

Дифференциальные уравнения газообразных сред выводятся из законов сохранения массы, импульса, энергии [16]:

$$V_t + (\vec{u}\cdot\nabla)V = V\nabla\cdot\vec{u},$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + V\nabla p = 0,$$

$$\varepsilon_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\varepsilon + Vp\nabla\cdot\vec{u} = 0,$$

где V — удельный объем ($\rho = V^{-1}$ — плотность), $\vec{u}$ — скорость, ε — удельная внутренняя энергия, p — давление, $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент. Уравнение состояния среды, меняющейся со временем, задается равенством

$$\varepsilon = e(t, V, S),$$

при этом в частице выполняется термодинамическое равенство, связывающее дифференциалы основных величин:

$$T\,dS = d\varepsilon + p\,dV + \mu\,dt,$$

где S — энтропия, $T = e_S > 0$ — температура, $\mu = -e_t \geqslant 0$ — мощность выделенной энергии, $p = -e_V$. Если дифференциал взять вдоль мировой линии частицы $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$, то можно получить дифференциальные уравнения на все термодинамические параметры:

$$e_S DS + e_t = 0, \quad Dp + Ve_{VV}\nabla\cdot\vec{u} = e_S^{-1}e_{VS}e_t - e_{tV},$$

$$DT - Ve_{SV}\nabla\cdot\vec{u} = e_{tS} - e_S^{-1}e_t e_{SS}.$$

Групповую классификацию будем проводить для замкнутой системы уравнений

$$V_t + \vec{u}\cdot\nabla V = V\nabla\cdot\vec{u}, \tag{1}$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} = V(e_{VV}\nabla V + e_{VS}\nabla S), \tag{2}$$

$$S_t + \vec{u}\cdot\nabla S = -e_S^{-1}e_t \tag{3}$$

с произвольным элементом $e(t,V,S)$, $e_t \neq 0$, $e_S \neq 0$, $e_{VV} \neq 0$, не зависящим от $\vec{x} = (x^1,x^2,x^3)$, $\vec{u} = (u^1,u^2,u^3)$:

$$e_j = e_{x^j} = 0, \quad e_{u^k} = 0, \tag{4}$$

x^j, u^k — декартовы координаты векторов $\vec{x}$ и $\vec{u}$.

2. Вычисление преобразований эквивалентности

Преобразования эквивалентности всех переменных не изменяют вид системы (1)–(3), но меняют только произвольный элемент — функцию $e(t,V,S)$. Однопараметрические группы таких преобразований задаются оператором [21], продолженным на производные, входящие в уравнения (1)–(4):

$$\begin{aligned} X = {} & \xi^t\partial_t + \xi^i\partial_{x^i} + \eta^k\partial_{u^k} + \eta^V\partial_V + \eta^S\partial_S + \eta^e\partial_e + \big(\widetilde{D}_t\eta^k - u^k_t\widetilde{D}_t\xi^t - u^k_j\widetilde{D}_t\xi^j\big)\partial_{u^k_t} \\ & + \big(\widetilde{D}_i\eta^k - u^k_t\widetilde{D}_i\xi^t - u^k_j\widetilde{D}_i\xi^j\big)\partial_{u^k_i} + \big(\widetilde{D}_t\eta^V - V_t\widetilde{D}_t\xi^t - V_j\widetilde{D}_t\xi^j\big)\partial_{V_t} \\ & + \big(\widetilde{D}_i\eta^V - V_t\widetilde{D}_i\xi^t - V_j\widetilde{D}_i\xi^j\big)\partial_{V_i} + \big(\widetilde{D}_t\eta^S - S_t\widetilde{D}_t\xi^t - S_j\widetilde{D}_t\xi^j\big)\partial_{S_t} \\ & + \big(\widetilde{D}_j\eta^S - S_t\widetilde{D}_i\xi^t - S_j\widetilde{D}_i\xi^j\big)\partial_{S_i} + \zeta^t\partial_{e_t} + \zeta^i\partial_{e_i} + \zeta^{u^k}\partial_{e_{u_k}} + \zeta^S\partial_{e_S} + \zeta^V\partial_{e_V} \\ & + \big(D_V\zeta^V - e_{Vt}D_V\xi^t - e_{VV}D_V\eta^V - e_{VS}D_V\eta^S\big)\partial_{e_{VV}} \\ & + \big(D_S\zeta^V - e_{Vt}D_S\xi^t - e_{VV}D_S\eta^V - e_{VS}D_S\eta^S\big)\partial_{e_{VS}}, \end{aligned}$$

где

$$\zeta^\mu = D_\mu\eta^e - e_tD_\mu\xi^t - e_VD_\mu\eta^V - e_SD_\mu\eta^S, \quad \mu = t, j, u^k, S, V;$$

$$\widetilde{D}_t = \partial_t + u^k_t\partial_{u^k} + V_t\partial_V + S_t\partial_S + (e_VV_t - e_S\vec{u}\cdot\nabla S)\partial_e,$$

$$\widetilde{D}_j = \partial_{x^j} + u^k_j\partial_{u^k} + V_j\partial_V + S_j\partial_S + (e_VV_j + e_SS_j)\partial_e,$$

$$D_t = \partial_t + e_t\partial_e + e_{tt}\partial_t + e_{tV}\partial_{e_V} + e_{tS}\partial_{e_S} + \ldots, \quad D_{u^k} = \partial_{u^k}, \quad D_j = \partial_{x^j},$$

$$D_V = \partial_V + e_V\partial_e + e_{VV}\partial_{e_V} + e_{VS}\partial_{e_S} + e_{tV}\partial_{e_t} + \ldots,$$

$$D_S = \partial_S + e_S\partial_e + e_{VS}\partial_{e_V} + e_{SS}\partial_{e_S} + e_{tS}\partial_{e_t} + \ldots.$$

Координаты оператора ξ^t, η^k, η^V, η^S, η^e — функции переменных t, $\vec{x}$, $\vec{u}$, V, S, e. Координаты определяются из условий инвариантности уравнений (1)–(4) относительно оператора X. Для этого надо подействовать оператором X на каждое уравнение в силу уравнений, т. е. исключить производные по t от функций V, S, $\vec{u}$. Условия инвариантности расщепляются приравниванием к нулю коэффициентов при производных по x^j от функций V, S и $\vec{u}$. Если в процессе вычислений окажется, что функция $e(t,V,S)$ удовлетворяет дополнительному уравнению, то это уравнение должно быть инвариантно относительно оператора X. Дополнительные условия инвариантности уточняют преобразование эквивалентности, с помощью которых вычисляется допускаемая группа.

Условия инвариантности уравнений (1)–(3) полиноминальны степени 2 от первых производных по переменным x^i. Обнуляем квадратичные слагаемые для уравнения (1):

$$\big(\vec{u}\cdot\nabla S\xi^t_{u^k} - S_j\xi^j_{u^k}\big)(e_{VV}V_k + e_{VS}S_k) + \nabla\cdot\vec{u}\big(\vec{u}\cdot\nabla S\big(\xi^t_V + \xi^t_e e_V\big) - S_j\big(\xi^j_V + \xi^j_e e_V\big)\big) = 0.$$

Расщепление по производным дает равенства

$$\xi^j_{u^k} = u^j \xi^t_{u^k}, \quad \xi^j_V + e_V \xi^j_e = u^j\big(\xi^t_V + e_V \xi^t_e\big).$$

Изучение совместности приводит к соотношениям

$$\xi^t_{u^k} = 0 = \xi^j_{u^k}, \quad D_V \vec{\xi} = 0, \quad D_V \xi^t = \xi^t_V + e_V \xi^t_e = 0. \tag{5}$$

Линейные слагаемые по производным дают соотношения

$$D_V \eta^S_e = 0, \quad \eta^S_{u^k} = 0,$$
$$\eta^k = \xi^k_t + u^i \xi^k_i - \xi^k_S e_t e_s^{-1} - u^k\big(\xi^t_t + u^i \xi^t_i - \xi^t_S e_t e_S^{-1}\big). \tag{6}$$

Остается равенство

$$\eta^e_t e_S - \eta^e_S e_t - e_V\big(\eta^V_t e_S - \eta^V_S e_t\big) + e_S u^i\big(\eta^S_i e_S + \xi^t_i e_t\big) = 0. \tag{7}$$

В условии инвариантности уравнения (2) квадратичные и линейные слагаемые по производным u^k_i дают

$$\eta^V_{u^i} = 0, \quad \eta^k_V + e_V \eta^k_e + \xi^t_k V e_{VV} = 0, \quad D_S \xi^t = \xi^t_S + e_S \xi^t_e = 0. \tag{8}$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при V_j и S_j, получим

$$\xi^k_j + \xi^j_k = 0 \ (j \neq k), \quad \xi^1_1 = \xi^2_2 = \xi^3_3 = n, \tag{9}$$
$$2e_{VV}\big(n - \xi^t_t - \xi^t_e e_t\big) = D^2_V \eta^e, \tag{10}$$
$$e_{VS} D^2_V \eta^e = e_{VV}(D_V D_S \eta^e - V^{-1} e_V D_S \eta^V). \tag{11}$$

От условия инвариантности уравнения (2) остается соотношение

$$\eta^k_t - \eta^k_S e_t e_S^{-1} + u^j \eta^k_j = V e_{VV} \eta^V_k + V e_{VS} \eta^S_k. \tag{12}$$

Условия инвариантности уравнения (3) дают дополнительные соотношения

$$\xi^t_i = 0, \quad D_S \xi^j = 0, \quad \eta^V = V D_V \eta^V, \quad D_V \eta^k = 0, \quad D_S \eta^k = 0,$$
$$\eta^V_i = V \xi^k_{ki} = 3V n_i, \quad \eta^V_t - \eta^V_S e_t e_S^{-1} = 3V\big(n_t - n_S e_t e_S^{-1}\big). \tag{13}$$

Из условий инвариантности уравнений (4) следует, что

$$\eta^e_{u^k} = 0, \quad \eta^e_i = e_V \eta^V_i,$$

так как расщепление уравнения (7) по u^k приводит к равенству $\eta^S_i = 0$. Из (6) и (13) следует, что $\vec{\eta}$ линейна по $\vec{u}$:

$$\vec{\eta} = D_t \vec{\xi} - \vec{u} D_t \xi^t + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\xi} \Rightarrow D_V \vec{\eta} = 0. \tag{14}$$

Из (12) следует, что величина $\vec{\xi}$ линейна по $\vec{x}$, т. е.

$$n_i = \eta^V_i = \eta^e_i = 0, \quad D_t \vec{\eta} + (\vec{u} \cdot \nabla) D_t \xi = 0. \tag{15}$$

В силу (9) имеем представление

$$\vec{\xi} = n\vec{x} + \vec{\omega} \times \vec{x} + \vec{a}(t, S, V, e). \tag{16}$$

Подстановка (14) в (15) после расщепления по $\vec{u}$ приводит к соотношениям

$$D^2_t \vec{\xi} = 0, \quad D^2_t \xi^t = 2 D_t n, \quad D_t \vec{\omega} = 0.$$

Из (16) следует
$$D_t^2 n = 0, \quad D_t^2 \vec{a} = 0, \quad D_t^3 \xi^t = 0.$$

Координаты оператора X зависят от переменной e. Если вместо e подставить функцию $e(t, V, S)$, то координаты будут зависеть только от t, $\vec{x}$, $\vec{u}$, V, S, а дифференцирование D_μ, $\mu = t$, V, S, становится частной производной ∂_μ. В силу сделанного замечания можно считать
$$n = Nt + N_0, \quad \vec{\omega} = \vec{\Omega}, \quad \vec{a} = \vec{A}t + \vec{A}_0,$$
где N, N_0, B, B_0 — постоянные, $\vec{\Omega}$, $\vec{A}$, $\vec{A}_0$ — постоянные векторы. Определяются следующие координаты оператора X:
$$\begin{gathered}\vec{\xi} = t(N\vec{x} + \vec{A}) + N_0\vec{x} + \vec{A}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{x}, \quad \xi^t = Nt^2 + Bt + B_0,\\ \vec{\eta} = N\vec{x} + \vec{A} - \vec{u}(Nt + B - N_0) + \vec{\Omega} \times \vec{u},\\ \eta^V = V(3Nt + E), \quad \eta^S = \eta(t, S),\end{gathered} \tag{17}$$
где E — постоянная, $\eta(t, S)$ — произвольная функция.

Равенства (10), (11) принимают вид
$$2e_{VV}(N_0 - B - Nt) = D_V^2 \eta^e, \quad 2e_{VS}(N_0 - B - Nt) = D_V D_S \eta^e$$
и интегрируются по V:
$$\eta^e = 2e(N_0 - B - Nt) - \beta(t)V - \gamma(t, S). \tag{18}$$
Подстановка (18) в (7) приводит к уравнению
$$e_S N(2e + 3Ve_V) = e_S(-\beta' V - \gamma_t) + e_t \gamma_S. \tag{19}$$

Теорема 1. *Координаты операторов алгебры Ли преобразований эквивалентности уравнений* (1)–(4) *удовлетворяют равенствам* (17)–(19).

Если функция $e(t, V, S)$ общего вида, то расщепление (19) по производным дает $N = 0$, $\beta' = 0$, $\gamma_t = \gamma_S = 0 \Rightarrow \beta = B_1$, $\gamma = \Gamma$. Координаты оператора X принимают вид
$$\begin{gathered}\xi^t = Bt + B_0, \quad \vec{\xi} = \vec{A}_0 + t\vec{A} + N_0\vec{x} + \vec{\Omega} \times \vec{x},\\ \vec{\eta} = \vec{A} + \vec{u}(N_0 - B) + \vec{\Omega} \times \vec{u}, \quad \eta^V = VE,\\ \eta^S = \eta(t, S), \quad \eta^e = 2e(N_0 - B) - B_1 V - \Gamma.\end{gathered}$$
Каждой постоянной отвечает однопараметрическая группа, операторы которой обозначены так же, как при групповой классификации уравнений газовой динамики со стационарным уравнением состояния [1]:
$$X_i = \partial_{x^i},\ i = 1, 2, 3; \quad X_{3+i} = t\partial_{x^i} + \partial_{u^i}, \quad X_{6+i} = -x^k\partial_{x^j} + x^j\partial_{x^k} - u^k\partial_{u^j} + u^j\partial_{u^k},$$
(i, j, k) — круговая перестановка индексов $(1, 2, 3)$;
$$X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x^i\partial_{x^i}, \quad X_{12} = V\partial_V, \quad X_{13} = t\partial_t - u^k\partial_{u^k} - 2e\partial_e,$$
$$X_{14} = V\partial_e, \quad X_{15} = \partial_e, \quad X_\eta = \eta(t, S)\partial_S.$$

Теорема 2. *Преобразования эквивалентности, которые изменяют функцию* $e(t,V,S)$, *имеют вид*

$$\Pi_1:\quad \widetilde{t}=t+a_0,\quad \widetilde{e}(\widetilde{t},S,V)=e(t,S,V);$$

$$\Pi_2:\quad \widetilde{t}=bt,\quad \widetilde{\vec{x}}=b\vec{x},\quad \widetilde{e}(\widetilde{t},S,V)=e(t,S,V);$$

$$\Pi_3:\quad \widetilde{t}=ct,\quad \widetilde{\vec{u}}=c^{-1}\vec{u},\quad \widetilde{e}=c^{-2}e,\quad \widetilde{e}(\widetilde{t},S,V)=c^{-2}e(t,S,V);$$

$$\Pi_4:\quad \widetilde{V}=dV,\quad \widetilde{e}(t,\widetilde{V},S)=e(t,V,S);\quad \Pi_5:\quad \widetilde{e}=e+\Gamma;$$

$$\Pi_6:\quad \widetilde{e}=Vb_1+e;\quad \Pi:\quad \widetilde{S}=h(t,S),\quad \widetilde{e}(t,V,\widetilde{S})=e(t,V,S),$$

где h *— произвольная функция;* a_0, b, c, Γ, d, b_1 *— постоянные.*

Остальные операторы X_i, $i=1,\dots,9$, *образуют 9-мерную алгебру Ли* L_9, *которая порождает допускаемую системой* (1)–(3) *группу с произвольным уравнением состояния.*

Замечание 1. Почти все преобразования эквивалентности участвуют в расширениях группы симметрий для системы со стационарным уравнением состояния [1].

Замечание 2. Координата оператора X_η — произвольная функция. Любая фиксированная η порождает однопараметрическую группу. Суперпозиция всех таких однопараметрических групп, вообще говоря, задает любую функцию $h(t,S)$. Легко проверить, что преобразование Π есть преобразование эквивалентности системы (2), (3).

3. Групповая классификация по преобразованиям эквивалентности

Пусть уравнение состояния удовлетворяет уравнению вида (19) с коэффициентами $\widetilde{N}$, $\widetilde{\beta}(t)$, $\widetilde{\gamma}(t,S)$. Тогда оно должно быть инвариантным относительно оператора X с координатами (17), (18). Условие инвариантности исследуем для различных случаев.

3.1. $\widetilde{N}\neq 0$, $\widetilde{\gamma}_S\neq 0$. Переобозначая функции $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$, сделаем $\widetilde{N}=1$. Преобразование Π дает $\widetilde{\gamma}(t,S)=S$. Тогда уравнение типа (19) принимает вид

$$e_t=e_S(\widetilde{\beta}'V+2e+3Ve_V). \tag{20}$$

Подставив это выражение в (19), получим

$$\gamma=NS+\Gamma,\quad \beta=N\widetilde{\beta}+B_1,$$

если на функцию e больше нет новых уравнений. Иначе уравнение вида (19) будет с $\widetilde{N}=0$. Условия инвариантности уравнения (20) принимает вид

$$(2e+3Ve_V)(\eta_S-2N_0+B)+V(-\widetilde{\beta}''(Nt^2+Bt+B_0)$$
$$+\widetilde{\beta}'(\eta_S-5Nt-B-E)+5\beta)+2\gamma-\eta_t=0.$$

Расщепление по V приводит к равенствам

$$\eta_S=2N_0-B,\quad \eta_t=2(NS+\Gamma)\Rightarrow N=0,\quad \eta=2\Gamma t+(2N_0-B)S+D,$$
$$\widetilde{\beta}''(Bt+B_0)=\widetilde{\beta}'(2N_0-2B-E)+5B_1. \tag{21}$$

Если $\widetilde{\beta}$ произвольна, то $B = B_0 = 0$, $E = 2N_0$, $B_1 = 0$ и операторы преобразований эквивалентности таковы: ∂_S, $-2t\partial_S + \partial_e$, $X_{11} - X_{13} + 2X_{12} + 2X_S = \vec{x}\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V + 2S\partial_S + 2e\partial_e$.

Если $\widetilde{\beta}' = 0$, то $B_1 = 0$ и имеем операторы

$$t\partial_t - \vec{u}\partial_{\vec{u}} - 2e\partial_e - S\partial_S = X_{13} - S\partial_S,$$

$$\partial_S, \quad X_{15} + X_\eta = \partial_e - 2t\partial_S, \quad X_{11} + S\partial_S, \quad X_{12}.$$

Функция $\widetilde{\beta}(t)$ удовлетворяет уравнению типа (21), которое преобразованиями эквивалентности приводится к одному из трех видов

1°) $t\widetilde{\beta}'' = k\widetilde{\beta}'$ или $\widetilde{\beta}'' = M \neq 0 \Rightarrow \widetilde{\beta}' = M|t|^k$,

2°) $t\widetilde{\beta}'' = k \Rightarrow \widetilde{\beta}' = k \ln |t|$,

3°) $\widetilde{\beta}'' = k\widetilde{\beta}' \Rightarrow \widetilde{\beta}' = e^{kt}$,

где $k \neq 0$ и M — постоянные. Подстановка этих выражений в (21) дает связь на алгебраические постоянные

1°) $E = 2N_0 - (k+2)B$; $B_1 = \frac{1}{5}MB_0$ при $k = 1$ и $B_1 = B_0 = 0$ при $k \neq 1$,

2°) $B_0 = 0$, $B_1 = \frac{1}{5}kB$, $E = 2N_0 - 2B$,

3°) $E = 2N_0 - kB_0$, $B = B_1 = 0$.

При этом уравнение (20) допускает операторы $2t\partial_S - \partial_e = 2X_t - X_{15}$, $X_{11} - X_{13} + 2X_{12} + 2X_S$, ∂_S, а также

1°) $X_{11} - kX_{12} + X_S$ и при $k = 1$ дополнительный оператор

$$X_{10} - \frac{1}{5}MX_{14} = \partial_t - \frac{1}{5}MV\partial_e,$$

2°) $X_{11} + X_S - \frac{1}{5}kX_{14}$,

3°) $X_{10} - kX_{12} = \partial_t - kV\partial_V$.

Эти операторы по-прежнему задают преобразования эквивалентности уравнений (1)–(3).

3.2. $\widetilde{\gamma}_S = 0$, $e_S \neq 0$, $e_t \neq 0$. Отсюда следует, что $\widetilde{N} \neq 0$, иначе функция e произвольна. Уравнение вида (19) становится таким:

$$3Ve_V + 2e = -\widetilde{\beta}'V - \widetilde{\gamma}',$$

решение его с точностью до преобразования эквивалентности П можно записать в виде

$$e = -\frac{1}{5}\widetilde{\beta}'V - \frac{1}{2}\widetilde{\gamma}' + SV^{-2/3}, \quad \widetilde{\beta}''^2 + \widetilde{\gamma}''^2 \neq 0. \tag{22}$$

Подстановка в (19) и расщепление по V дает

$$\beta = N\widetilde{\beta} + B_1, \quad \gamma = N\widetilde{\gamma} + \Gamma.$$

Условие инвариантности равенства (22) после расщепления по V приводит к тому, что

$$\eta = 2S\left(N_0 - B + \frac{1}{3}E\right),$$

$$\widetilde{\beta}''(Nt^2 + Bt + B_0) + \widetilde{\beta}'(5Nt - 2N_0 + 2B + E) - 5N\widetilde{\beta} - 5B_1 = 0,$$

$$\widetilde{\gamma}''(Nt^2 + Bt + B_0) + \widetilde{\gamma}'(2Nt - 2N_0 + 2B) - 2N\widetilde{\gamma} - 2\Gamma = 0. \tag{23}$$

Если функции $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$ общего вида, то все постоянные равны нулю и нет преобразований эквивалентности.

Пусть функции $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$ удовлетворяют уравнением типа (23),

$$\widetilde{\beta}''(\widetilde{\widetilde{N}}t^2+\widetilde{B}t+\widetilde{B}_0)+\widetilde{\beta}'(5\widetilde{\widetilde{N}}t+\widetilde{K}_1)-5\widetilde{\widetilde{N}}\widetilde{\beta}-\widetilde{B}_1=0,$$

$$\widetilde{\gamma}''(\widetilde{\widetilde{N}}t^2+\widetilde{B}t+\widetilde{B}_0)+\widetilde{\gamma}'(2\widetilde{\widetilde{N}}t+\widetilde{K_2})-2\widetilde{\widetilde{N}}\widetilde{\gamma}-\widetilde{\Gamma}=0.$$

3.2.1. Если $\widetilde{\widetilde{N}}\neq 0$, то преобразованиями эквивалентности эти уравнения приводятся к виду

$$\widetilde{\beta}''(t^2+k)+\widetilde{\beta}'(5t+n_1)-5\widetilde{\beta}=0,\quad \widetilde{\gamma}''(t^2+k)+\widetilde{\gamma}'(2t+n_2)-2\widetilde{\gamma}=0.$$

Дифференцированием по t находим

$$\widetilde{\beta}''=M_1e^{-n_1I}|t^2+k|^{-7/2},\quad I=\int(t^2+k)^{-1}dt,\quad \widetilde{\gamma}''=M_2e^{-n_2I}(t^2+k)^{-2}.$$

Подставляя эти выражения в продифференцированные условия инвариантности (23) и расщепляя по степеням t, получим

$$M_1\neq 0:\quad E=2N_0+4B+Nn_1,\quad B_0=Nk-\frac{1}{7}n_1B,\quad B\left(7k+\frac{1}{7}n_1^2\right)=0;$$

$$M_2\neq 0:\quad N_0=-\frac{1}{2}(B+n_2N),\quad B_0=Nk-\frac{1}{4}n_2B,\quad B\left(4k+\frac{1}{4}n_2^2\right)=0.\quad (24)$$

Если $B\neq 0$, то отсюда и из условия инвариантности следует, что

$$n_1=7n,\quad n_2=4n,\quad k=-n^2,\quad E=3(B+nN),\quad B_0=-nB-Nn^2,$$

$$N_0=-\frac{1}{2}B-2nN,\quad \Gamma=0,\quad B_1=0,$$

$$\widetilde{\beta}=M_1(t-n)^{-5},\quad \widetilde{\gamma}=M_2(t-n)^{-2}.$$

Остаются два свободных параметра B и N, которым соответствуют операторы преобразований эквивалентности

$$-nX_{10}-\frac{1}{2}X_{11}+\frac{3}{2}X_{13}+3X_{12}-X_S,$$

$$(t^2-n^2)\partial_t+(t-2n)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+(\vec{x}-\vec{u}(t+2n))\cdot\partial_{\vec{u}}+3(t+n)V\partial_V-2nS\partial_S$$
$$-[2e(t+2n)+M_1V(t-n)^{-5}+M_2(t-n)^{-2}]\partial_e.$$

Если $B=0$, то из (23) и (24) следует, что

$$B_0=Nk,\quad N_0=-\frac{1}{2}Nn_2,\quad E=N(n_1-n_2),\quad B_1=\Gamma=0.$$

Параметру N соответствует оператор преобразования эквивалентности

$$(t^2+k)\partial_t+\left(t-\frac{1}{2}n_2\right)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\left(\vec{x}-\vec{u}\left(t+\frac{1}{2}n_2\right)\right)\cdot\partial_{\vec{u}}+V(3t+n_1-n_2)\partial_V$$
$$+\frac{1}{3}(2n_1-5n_2)S\partial_S-[e(n_2+2t)+V\widetilde{\beta}+\widetilde{\gamma}]\partial_e.$$

В случае $M_1=0$, $M_2\neq 0$ имеем $\widetilde{\beta}\sim 0$, $B_1=0$. Если $B\neq 0$, то $k=-\left(\frac{n_2}{4}\right)^2$, $\Gamma=0$, $\widetilde{\gamma}=\frac{1}{6}M_2\left(t-\frac{n_2}{4}\right)^{-2}$, $B_0=-N\left(\frac{n_2}{4}\right)^2-\frac{n_2}{4}B$, $N_0=-\frac{1}{2}B-\frac{n_2}{2}N$, E любое.

Операторы преобразований эквивалентности таковы:

$$V\partial_V + \frac{2}{3}S\partial_S, \quad \left(t - \frac{n_2}{4}\right)\partial_t - \frac{1}{2}\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} - \frac{3}{2}\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 3S\partial_S - 3e\partial_e,$$

$$\left(t^2 - \left(\frac{n_2}{4}\right)^2\right)\partial_t + \left(t - \frac{n_2}{2}\right)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \left(\vec{x} - \vec{u}\left(t + \frac{n_2}{2}\right)\right)\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V - n_2S\partial_S - (e(2t+n_2)+\widetilde{\gamma})\,\partial_e.$$

Если $B=0$, то $N_0 = -\frac{1}{2}n_2N$, $B_0 = Nk$, $B_1 = 0$, $\Gamma = 0$, E любое;

$$(t^2+k)\partial_t + \left(t - \frac{n_2}{2}\right)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \left(\vec{x} - \vec{u}\left(t + \frac{n_2}{2}\right)\right)\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V - n_2S\partial_S - [e(2t+n_2)+\widetilde{\gamma}]\partial_e, \quad V\partial_V + \frac{2}{3}S\partial_S.$$

В случае $M_2 = 0$, $M_1 \neq 0$ имеем $\widetilde{\gamma} \sim 0$, $\Gamma = 0$. Если $B \neq 0$, то $k = -\left(\frac{n_1}{7}\right)^2$, $\widetilde{\beta} = \frac{1}{30}M_1\left(t - \frac{n_1}{7}\right)^{-5}$, $B_1 = 0$, $B_0 = Nk - \frac{1}{7}n_1B$, $E = 2N_0 + 4B + n_1N$;

$$N_0\colon \quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V + \frac{10}{3}S\partial_S + 2e\partial_e,$$

$$B\colon \quad \left(t - \frac{n_1}{7}\right)\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 4V\partial_V + \frac{2}{3}S\partial_S - 2e\partial_e,$$

$$N\colon \quad (t^2+k)\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}} + (3t+n_1)V\partial_V + \frac{2}{3}n_1S\partial_S - (2te + V\widetilde{\beta})\partial_e.$$

Если $B=0$, то $E = 2N_0 + n_1N$, $B_0 = Nk$, $B_1 = 0$, $\Gamma = 0$ и исключается оператор, соответствующий параметру B.

3.2.2. $\widetilde{\widetilde{N}} = 0$, $\widetilde{B} \neq 0$. Уравнения для $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ эквивалентны следующим:

$$t\widetilde{\beta}'' - k_1\widetilde{\beta}' = m_1, \quad t\widetilde{\gamma}'' - k_2\widetilde{\gamma}' = m_2.$$

С точностью до преобразований эквивалентности решения уравнений имеют вид $\widetilde{\beta}' = M_1\chi_1(t)$, $\widetilde{\gamma}' = M_2\chi_2(t)$, $M_1^2 + M_2^2 \neq 0$, $\chi_i(t) = |t|^{k_i}$, $k_i \neq 0$; $\ln|t|$, $k_i = 0$; t, $k_i = 1$; 0. Дифференцирование условий инвариантности (23), подстановка решений $\widetilde{\beta}'$, $\widetilde{\gamma}'$, расщепление по t приводят к следующим равенствам:

$$M_1 \neq 0\colon \quad (k_1+6)N = 0, \quad (k_1+2)B - 2N_0 + E = 0, \quad (k_1-1)B_0 = 0;$$

$$M_2 \neq 0\colon \quad (k_2+3)N = 0, \quad (k_2+2)B = 2N_0, \quad (k_2-1)B_0 = 0.$$

Параметр N ненулевой лишь в случае $k_1 = -6$, $k_2 = -3$. При этом $B_0 = 0$, $B = -2N_0$, $E = -6N_0$. Свободным параметрам соответствуют операторы

$$N_0\colon \quad -2t\partial_t + \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + 3\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 6V\partial_V + 2S\partial_S + 6e\partial_e;$$

$$N\colon \quad t^2\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V - \left(2te - \frac{1}{5}VM_1t^{-5} - \frac{1}{2}M_2t^{-2}\right)\partial_e.$$

Имеем $N = 0$, $B_0 \neq 0$ лишь в случае $k_1 = k_2 = 1$. При этом $B = \frac{2}{3}N_0$, $E = 0$. Свободным параметрам соответствуют операторы

$$N_0\colon \quad 2t\partial_t + 3\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2S\partial_S + 2e\partial_e,$$

$$B_0\colon \quad \partial_t - \left(\frac{1}{5}M_1V + \frac{1}{2}M_2\right)\partial_e.$$

Если $N = B_0 = 0$, то $N_0 = \frac{1}{2}(k_2+2)B$, $E = (k_2-k_1)B$. Из условий инвариантности следует, что $B_1 = 0$ при $k_1 \neq 0$, $B_1 = \frac{1}{5}BM_1$ при $k_1 = 0$; $\Gamma = 0$ при $k_2 \neq 0$, $\Gamma = \frac{1}{2}BM_2$ при $k_2 = 0$. Параметру B соответствует оператор

$$t\partial_t + \frac{1}{2}(k_2+2)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \frac{1}{2}k_2\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + (k_2-k_1)V\partial_V + \frac{1}{3}S(5k_2-2k_1)\partial_S$$
$$+\left(k_2 e - \frac{1}{5}\lambda M_1 V - \frac{1}{2}\mu M_2\right)\partial_e,\ \text{где}\ \lambda = \begin{cases} 0, & k_1\neq 0,\\ 1, & k_1 = 0,\end{cases}\quad \mu = \begin{cases} 0, & k_2 \neq 0,\\ 1, & k_2 = 0.\end{cases}$$

В случае $M_1 = 0$, $M_2 \neq 0$ имеем: $\widetilde{\beta} \sim M_0$ — постоянная, $\widetilde{\gamma}' = M_2\chi_2(t)$, $B_1 = -M_0 N$, $(k_2+3)N = 0$, $(k_2+2)B = 2N_0$, $(k_2-1)B_0 = 0$. Возможны особые случаи $k_2 = 0, -1, -3, 1$. Свободному параметру E соответствует оператор $3V\partial_V + 2S\partial_S$.

$k_2 = 0 \Rightarrow N = 0,\ B_1 = 0,\ B = N_0,\ B_0 = 0,\ \widetilde{\gamma} = M_2 t(\ln|t| - 1) + M_1$. Из (23) следует, что $\Gamma = \frac{1}{2}M_2 B$, и параметру B соответствует оператор $t\partial_t + \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} - \frac{1}{2}M_2\partial_e$.

$k_2 = -1 \Rightarrow N = 0, B = 2N_0, B_0 = 0, B_1 = 0, \widetilde{\gamma} = M_2\ln|t|$. Из (23) следует $\Gamma = 0$ и свободному параметру N_0 соответствует оператор

$$2t\partial_t + \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 2S\partial_S - 2e\partial_e.$$

$k_2 = -3 \Rightarrow B = -2N_0,\ B_0 = 0,\ \Gamma = -NM_1,\ B_1 = -M_1 N,\ \widetilde{\gamma} = -\frac{1}{2}M_2 t^{-2}$. Свободным параметрам соответствуют операторы

$$N_0\colon\quad -2t\partial_t + \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + 3\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 6S\partial_S + 6e\partial_e,$$
$$N\colon\quad t^2\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V + \left(-2te + \frac{1}{2}M_2 t^{-2}\right)\partial_e.$$

$k_2 = 1 \Rightarrow N = 0,\ B = \frac{2}{3}N_0,\ \Gamma = \frac{1}{2}M_2 B_0,\ B_1 = 0,\ \widetilde{\gamma} = \frac{1}{2}M_2 t^2$. Свободным параметрам соответствуют операторы

$$B_0\colon\quad \partial_t - \frac{1}{2}M_2\partial_e,\qquad N_0\colon\quad 2t\partial_t + 3\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2S\partial_S + 2e\partial_e.$$

$k_2 \neq -3, -1, 0, 1 \Rightarrow N = 0,\ B_0 = 0,\ N_0 = \frac{1}{2}(k_2+2)B,\ B_1 = 0, \Gamma = 0$, $\widetilde{\gamma} = M_2(k_2+1)^{-1}t|t|^{k_2}$. Параметру B соответствует оператор

$$2t\partial_t + (k_2+2)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + k_2\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2k_2 S\partial_S + 2k_2 e\partial_e.$$

В случае $M_1 \neq 0$, $M_2 = 0$ имеем: $\widetilde{\gamma} \sim M_0$ — постоянная, $\widetilde{\beta}' = M_1\chi_1(t)$, $(k_1+6)N = 0$, $E = 2N_0 - (k_1+2)B$, $(k_1-1)B_0 = 0$.

$k_1 \neq -6, 1 \Rightarrow N = B_0 = 0,\ \Gamma = 0,\ B_1 = \frac{1}{5}\lambda M_1 B$ и свободным параметрам соответствуют операторы

$$N_0\colon\quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V + \frac{10}{3}S\partial_S + 2e\partial_e = X_{11} - X_{13} + 2X_{12} + \frac{10}{3}X_S,$$

$$B\colon\quad t\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - (k_1+2)V\partial_V - \frac{2}{3}(k_1+5)S\partial_S - \left(2e + \frac{1}{5}\lambda M_1 V\right)\partial_e$$
$$= X_{13} - (k_1+2)X_{12} - \frac{2}{3}(k_1+5)X_S - \frac{1}{5}\lambda M_1 X_{14}.$$

$k_1 = -6 \Rightarrow E = 2N_0 + 4B,\ B_0 = 0,\ \Gamma = -M_0 N,\ B_1 = -M_2 N$ и добавляется оператор, соответствующий параметру N:

$$t^2\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V + \left(-2te + \frac{1}{5}M_1 t^{-5}V\right)\partial_e.$$

$k_1 = 1 \Rightarrow N = 0,\ E = 2N_0 - 3B,\ \Gamma = 0,\ B_1 = \frac{1}{5}M_1B_0$ и добавляется оператор, соответствующий параметру B_0:

$$\partial_t - \frac{1}{5}M_1V\partial_e.$$

3.2.3. $\widetilde{\widetilde{N}} = 0$, $\widetilde{B} = 0$, $\widetilde{B}_0 \neq 0$. Уравнения для функций $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$ эквивалентны следующим:

$$\widetilde{\beta}'' - k_1\widetilde{\beta}' = m_1, \quad \widetilde{\gamma}'' - k_2\widetilde{\gamma}' = m_2.$$

С точностью до преобразований эквивалентности решения уравнений имеют вид

$$\widetilde{\beta}' = M_1\mu_1(t), \quad \widetilde{\gamma}' = M_2\mu(t), \quad M_1^2 + M_2^2 \neq 0,$$
$$\mu_i(t)e^{k_it},\ k_i \neq 0;\ t,\ k_i = 0; 0.$$

Дифференцируем уравнения (23):

$$\widetilde{\beta}''[k_1(Nt^2 + Bt + B_0) + 7Nt + 3B - 2N_0 + E] = 0,$$
$$\widetilde{\gamma}''[k_2(Nt^2 + Bt + B_0) + 4Nt + 3B - 2N_0] = 0.$$

В случае $\widetilde{\beta}'' \neq 0$, $\widetilde{\gamma}'' \neq 0$ после расщепления по t последних уравнений получим $N = 0$, $k_1B = 0$, $E = 2N_0 - 3B - k_1B_0$; $k_2B = 0$, $3B = 2N_0 - k_2B_0$.

$k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0 \Rightarrow B = 0,\ N_0 = \frac{1}{2}k_2B_0,\ E = (k_2 - k_1)B_0,\ B_1 = 0,\ \Gamma = 0.$ Параметру B_0 соответствует оператор

$$\partial_t + \frac{1}{2}k_2\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \frac{1}{2}k_2\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + (k_2 - k_1)V\partial_V + \frac{1}{3}(5k_2 - 2k_1)S\partial_S + k_2e\partial_e$$
$$= X_{10} + \frac{1}{2}k_2(X_{11} - X_{13}) + (k_2 - k_1)X_{12} + \frac{1}{3}(5k_2 - 2k_1)X_S,$$

$k_1 \neq 0,\ k_2 = 0 \Rightarrow B = 0,\ N_0 = 0,\ E = -k_1B_0,\ B_1 = 0,\ \Gamma = \frac{1}{2}M_2B_0;$

$$B_0\colon\quad \partial_t - k_1V\partial_V - \frac{2}{3}k_1S\partial_S - \frac{1}{2}M_2\partial_e.$$

$k_1 = 0, k_2 \neq 0 \Rightarrow B = 0,\ N_0 = \frac{1}{2}k_2B_0,\ E = -k_2B_0,\ B_1 = \frac{1}{5}MB_0,\ \Gamma = 0;$

$$B_0\colon\quad \partial_t + \frac{1}{2}k_2\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \frac{1}{2}k_2\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + k_2V\partial_V + \frac{5}{3}k_2S\partial_S + \left(k_2e - \frac{1}{5}M_1V\right)\partial_e.$$

$k_1 = k_2 = 0 \Rightarrow B = \frac{2}{3}N_0,\ E = 0,\ B_1 = \frac{1}{5}M_1B_0,\ \Gamma = \frac{1}{2}M_2B_0;$

$$B_0\colon\quad \partial_t - \left(\frac{1}{5}M_1V + \frac{1}{2}M_2\right)\partial_e, \quad N_0\colon\quad 2t\partial_t + 3\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2S\partial_S + 2e\partial_e.$$

В случае $\widetilde{\beta}'' = 0$, $\widetilde{\gamma}'' \neq 0$ из (23) следует, что $\widetilde{\beta} \sim M_0$, $B_1 = N = 0$, $k_2B = 0$, $N_0 = \frac{1}{2}(3B + k_2B_0)$. Свободному параметру E соответствует оператор $V\partial_V + \frac{2}{3}S\partial_S = X_{12} + \frac{2}{3}X_S$.

$k_2 \neq 0 \Rightarrow \Gamma = 0$, $B = 0$, $N_0 = \frac{1}{2}k_2B_0$;

$$B_0\colon\quad \partial_t + \frac{1}{2}k_2(\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}) + k_2(S\partial_S + e\partial_e) = X_{10} + \frac{1}{2}k_2(X_{11} - X_{13}) + k_2X_S.$$

$k_2 = 0 \Rightarrow N_0 = \frac{3}{2}B$, $\Gamma = \frac{1}{2}M_2B_0$;

$$B_0\colon\quad \partial_t - \frac{1}{2}M_2\partial_e = X_{10} - \frac{1}{2}M_2X_{15}; \quad B\colon\quad t\partial_t + \frac{3}{2}\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \frac{1}{2}\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + S\partial_S + e\partial_e.$$

В случае $\widetilde{\beta}'' \neq 0$, $\widetilde{\gamma}'' = 0$ из (23) следует, что $\widetilde{\gamma} \sim M_0$, $\Gamma = N = 0$, $k_1 B = 0$, $E = 2N_0 - 3B - k_1 B_0$. Свободному параметру N_0 соответствует оператор $\vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V + \frac{10}{3} S\partial_S + 2e\partial_e$.

$k_1 \neq 0 \Rightarrow B = 0$, $E = 2N_0 - k_1 B_0$, $B_1 = 0$ и добавляется оператор

$$B_0\colon \quad \partial_t - k_1 V\partial_V - \frac{2}{3} k_1 S\partial_S.$$

$k_1 = 0 \Rightarrow E = 2N_0 - 3B$, $B_1 = \frac{1}{5} M_2 B_0$ и добавляются операторы

$$B_0\colon \quad \partial_t - \frac{1}{5} M_2 V\partial_e, \quad B\colon \quad t\partial_t - \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} - 3V\partial_V - 4S\partial_S - 2e\partial_e.$$

3.3. $\widetilde{N} = 0$, $\widetilde{\gamma}_S \neq 0$. Уравнение вида (19) с точностью до преобразований эквивалентности можно представить в виде

$$e_t = e_S V \widetilde{\beta}'(t), \quad \widetilde{\beta}' \neq 0. \tag{25}$$

Из уравнения (19) следует соотношение

$$N(2e + 3Ve_V) = \gamma_S V \widetilde{\beta}' - \beta' V - \gamma_t, \tag{26}$$

в силу которого условие инвариантности уравнения (25) относительно оператора X принимает вид

$$V\widetilde{\beta}''(Nt^2 + Bt + B_0) + V\widetilde{\beta}'(5Nt + B + E) - V\widetilde{\beta}'\eta_S + \eta_t = 0.$$

Расщепление по V приводит к равенствам

$$\eta = CS + C_0; \quad C \text{ и } C_0 \text{ — постоянные},$$

$$\widetilde{\beta}''(Nt^2 + Bt + B_0) = \widetilde{\beta}'(C - B - E - 5Nt). \tag{27}$$

Если $\widetilde{\beta}'$ общего вида, то из (26) и (27) следуют равенства

$$N = B = B_0 = 0, \quad E = C, \quad \gamma = \Gamma S + \Gamma_0, \quad \beta = \Gamma\widetilde{\beta} + B_1.$$

Свободным постоянным N_0, C, C_0, Γ, B_1, Γ_0 соответствуют операторы преобразований эквивалентности

$$X_{11} - X_{13}, \quad X_{12} + X_S, \quad \partial_S, \quad (S + V\widetilde{\beta})\partial_e, \quad X_{14}, \quad X_{15}, \tag{28}$$

которые допускаются уравнением (25).

Если на функцию e нет уравнений кроме (25), то из (26) следует $N = 0$, $\gamma = \Gamma S + \Gamma_0$, $\beta = \Gamma\widetilde{\beta} + B_1$. Пусть функция $\widetilde{\beta}$ удовлетворяет уравнению вида (27). Тогда преобразование эквивалентности приводит его к виду

1°) $t\widetilde{\beta}'' = k\widetilde{\beta}' \Rightarrow \widetilde{\beta}' = M|t|^k \neq 0$,

2°) $\widetilde{\beta}'' = k\widetilde{\beta}' \Rightarrow \widetilde{\beta}' = e^{kt}$, $k \neq 0$.

Из соотношения (27) следуют равенства на постоянные

1°) $kB_0 = 0$, $E = C - (k+1)B$,

2°) $B = 0$, $E = C - kB_0$.

Тогда к операторам (28) добавляются

1°) $X_{13} - (k+1)X_{12}$ и X_{10} при $k = 0$,

2°) $X_{10} - kX_{12}$.

Рассмотрим случай, когда функция e кроме уравнения (25) удовлетворяет уравнению вида (26). Изучение совместности определяет функцию e с точностью до преобразований эквивалентности:

$$e = V\widetilde{\beta}(t) + S + MV^{-2/3}, \quad M \text{ — постоянная}, \ \widetilde{\beta}' \neq 0.$$

Подстановка этого выражения в (26), расщепление по V определяет

$$\gamma = S(-2Nt + \Gamma_1) + \Gamma_0, \quad \Gamma_1 \text{ и } \Gamma_0 \text{ — постоянные},$$

$$\beta' = \Gamma_1\widetilde{\beta}' - N(2t\widetilde{\beta}' + 5\widetilde{\beta}). \tag{29}$$

Условие инвариантности функции e расщепляем по V:

$$\eta = S(2N_0 - 2B - \Gamma_1) - \Gamma_0, \quad E = 3(B - N_0) \text{ при } M \neq 0,$$

$$\beta = -\widetilde{\beta}'(Nt^2 + Bt + B_0) - \widetilde{\beta}(5Nt + 2B - 2N_0 + E).$$

Подстановка выражения для β в (29) дает соотношение

$$\widetilde{\beta}''(Nt^2 + Bt + B_0) + \widetilde{\beta}'(5Nt + E + 3B - 2N_0 + \Gamma_1) = 0. \tag{30}$$

Свободному параметру Γ_0 соответствует оператор $\partial_S + \partial_e$.

Если $\widetilde{\beta}'$ произвольно, то $N = B = B_0 = 0$, $E = -3N_0$, $\Gamma_1 = 5N_0$ ($M \neq 0$) и $E = 2N_0 - \Gamma_1$ ($M = 0$). Такие соотношения на постоянные приводят к операторам преобразований эквивалентности

$$\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 3V\partial_V - 3S\partial_S + (2e - 5V\widetilde{\beta} - 5S)\partial_e \quad (M \neq 0);$$

$$\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V + 2S\partial_S + 2e\partial_e, \quad V\partial_V + S\partial_S + (\widetilde{\beta}V + S)\partial_e \quad (M = 0).$$

Пусть $\widetilde{\beta}$ удовлетворяет уравнению типа (30)

$$\widetilde{\beta}''(\widetilde{\widetilde{N}}t^2 + \widetilde{B}t + \widetilde{B}_0) = \widetilde{\beta}'(-5\widetilde{\widetilde{N}}t + \widetilde{k}). \tag{31}$$

3.3.1. Если $\widetilde{\widetilde{N}} \neq 0$, то уравнение (31) эквивалентно следующему:

$$\widetilde{\beta}''(t^2 + k) = \widetilde{\beta}'(-5t + n) \Rightarrow \widetilde{\beta}' = M_1 e^{nI}|t^2 + k|^{-5/2} \neq 0, \quad I = \int (t^2 + k)^{-1}dt.$$

Подстановка в (30) и расщепление по степеням t приводит к соотношениям

$$E = 2N_0 + 2B - nN - \Gamma_1, \quad B_0 = kN + \frac{1}{5}nB, \quad B(25k + n^2) = 0.$$

Если $k = -\left(\frac{n}{5}\right)^2$, то $\widetilde{\beta} = -\frac{1}{4}M_1\left(t + \frac{n}{5}\right)^{-4}$, $B_0 = -N\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}nB$, $E = 2N_0 + 2B - nN - \Gamma_1$ при $M = 0$. Свободным параметрам соответствуют операторы

$$B\colon \quad \left(t + \frac{n}{5}\right)\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V - 2S\partial_S - 2e\partial_e,$$

$$N_0\colon \quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2S\partial_S + 2e\partial_e, \quad \Gamma_1\colon \quad V\partial_V + S\partial_S + (V\widetilde{\beta} + S)\partial_e,$$

$$N\colon \quad \left(t^2 - \left(\frac{n}{5}\right)^2\right)\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}} + (3t - n)V\partial_V - \left(2te - V\widetilde{\beta}\left(t - \frac{n}{5}\right)\right)\partial_e.$$

При $M \neq 0$ имеем $E = 3B - 3N_0$, $\Gamma_1 = 5N_0 - B - nN$, $B_0 = -N\left(\frac{n}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}nB$;

$$B\colon \quad \left(t + \frac{n}{5}\right)\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 3V\partial_V - S\partial_S - (2e - V\widetilde{\beta} - S)\partial_e,$$

$$N_0\colon\quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}-3V\partial_V-3S\partial_S+(2e-5S-5V\widetilde{\beta}-S)\partial_e,$$

$$N\colon\quad \left(t^2-\left(\frac{n}{5}\right)^2\right)\partial_t+t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+(\vec{x}-t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}}+3tV\partial_V+nS\partial_S$$
$$-\left(2te-V\left(t+\frac{4}{5}n\right)\widetilde{\beta}-S(2t+n)\right)\partial_e.$$

Если $k\neq\left(\frac{n}{5}\right)^2$, то $B=0$, $B_0=Nk$, $E=2N_0-nN-\Gamma_1$ при $M=0$;

$$\Gamma_1\colon\quad S\partial_S+V\partial_V+(V\widetilde{\beta}+S)\partial_e,\quad N_0\colon\quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}+2V\partial_V+2S\partial_S+2e\partial_e,$$

$$N\colon\quad (t^2+k)\partial_t+t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+(\vec{x}-t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}}+(3t-n)V\partial_V$$
$$+[-2te+V((t^2+k)\widetilde{\beta}'+(5t-n)\widetilde{\beta})+2tS]\partial_e.$$

При $M\neq 0$ имеем $E=-3N_0$, $B=0$, $B_0=Nk$, $\Gamma_1=5N_0-nN$;

$$N_0\colon\quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}-3V\partial_V-3S\partial_S+(2e-5V\widetilde{\beta}-5S)\partial_e,$$

$$N\colon\quad (t^2+k)\partial_t+t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+(\vec{x}-t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}}+3tV\partial_V+nS\partial_S$$
$$+[-2te+V(5t\widetilde{\beta}+\widetilde{\beta}'(t^2+k))+(2t+n)S]\partial_e.$$

3.3.2. Если $\widetilde{\widetilde{N}}\neq 0$, $\widetilde{B}\neq 0$, то уравнение (31) эквивалентно следующему:

$$t\widetilde{\beta}''=k\widetilde{\beta}'\Rightarrow\widetilde{\beta}'=M_1|t|^k,\quad \widetilde{\beta}=M_1(k+1)^{-1}t|t|^k,\quad M_1\ln|t|$$

при $k=-1$.

Подстановка в (30) и расщепление по степеням t приводит к соотношениям

$$N(k+5)=0,\quad E+\Gamma_1=2N_0-(k+3)B,\quad kB_0=0.$$

Если $k\neq 0,\ -1,\ -5$, то $N=0$, $B_0=0$, $E=-\Gamma_1+2N_0-(k+3)B$ при $M=0$;

$$B\colon\quad t\partial_t-\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}-(k+3)V\partial_V-2S\partial_S-2e\partial_e,$$

$$N_0\colon\quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}+2V\partial_V+2S\partial_S+2e\partial_e,$$

$$\Gamma_1\colon\quad V\partial_V+S\partial_S+(S+M_1(k+1)^{-1}t|t|^kV)\partial_e.$$

При $M\neq 0$ имеем $E=3(B-N_0)$, $\Gamma_1=5N_0-(k+6)B$;

$$B\colon\quad t\partial_t-\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}+3V\partial_V+(k+4)S\partial_S+(-2e+(k+6)(V\widetilde{\beta}+S))\partial_e,$$

$$N_0\colon\quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}-3V\partial_V-3S\partial_S+(2e-5\widetilde{\beta}V-5S)\partial_e.$$

Если $k=0$, то $N=0$, $\widetilde{\beta}=M_1t$, $E=-\Gamma_1+2N_0-3B$ при $M=0$, $\beta=M_1(\Gamma_1t-B_0)$, $\gamma=S\Gamma_1+\Gamma_0$, $\eta=S(2N_0-2B-\Gamma_1)-\Gamma_0$.

Свободные параметры дают операторы

$$\Gamma_1\colon\quad V\partial_V+S\partial_S+(M_1tV+S)\partial_e,\quad B_0\colon\quad \partial_t+M_1V\partial_e,$$

$$N_0\colon\quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}+2V\partial_V+2S\partial_S+2e\partial_e=X_{11}-X_{13}+2X_{12}+2X_S,$$

$$B\colon\quad t\partial_t-\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}-3V\partial_V-2S\partial_S-2e\partial_e=X_{13}-3X_{12}-2X_S.$$

При $M \neq 0$ имеем $E = 3B - 3N_0$, $\Gamma_1 = 5N_0 - 6B$,

$$\beta = M_1 t(5N_0 - 6B) - M_1 B_0, \quad \gamma = S(5N_0 - 6B) + \Gamma_0, \quad \eta = S(4B - 3N_0) - \Gamma_0.$$

Получаем два новых оператора, соответствующие параметрам N_0 и B:

$$t\partial_t + \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + S\partial_S + (M_1 V t + S)\partial_e,$$

$$5t\partial_t + 6\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 3V\partial_V + 2S\partial_S + 2e\partial_e.$$

Если $k = -1$, то $N = B_0 = 0$, $\widetilde{\beta} = M_1 \ln|t|$, $E = -\Gamma_1 - 2B$ при $M = 0$,

$$\beta = M_1 \ln|t|(2N_0 + \Gamma_1) - M_1 B;$$

$$\Gamma_1\colon \quad V\partial_V + S\partial_S + (VM_1 \ln|t| + S)\partial_e,$$

$$N_0\colon \quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2S\partial_S + (2e - 2M_1 V \ln|t|)\partial_e,$$

$$B\colon \quad t\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 2V\partial_V - 2S\partial_S + (-2e + M_1 V)\partial_e.$$

При $M \neq 0$ имеем $E = 3B - 3N_0$, $\Gamma_1 = 5N_0 - 5B$;

$$N_0\colon \quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 3V\partial_V - 3S\partial_S + (2e - 5M_1 V \ln|t| - 5S)\partial_e,$$

$$B\colon \quad t\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 3V\partial_V + 3S\partial_S + (-2e + 5M_1 V \ln|t| + M_1 - 5S)\partial_e.$$

Если $k = -5$, то $B_0 = 0$, $\widetilde{\beta} = -\frac{1}{4}M_1 t^{-4}$, $E = -\Gamma_1 + 2N_0 + 2B$ при $M = 0$,

$$\beta = \frac{1}{4}M_1 N t^{-3} - \frac{1}{4}M_1 \Gamma_1 t^{-4} - M_1 B t^{-4};$$

$$\Gamma_1\colon \quad V\partial_V + S\partial_S + \left(S - \frac{1}{4}M_1 V t^{-4}\right)\partial_e, \quad N_0\colon \quad X_{11} - X_{13} + 2X_{12} + 2X_S,$$

$$B\colon \quad t\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V - 2S\partial_S - (2e - M_1 V t^{-4})\partial_e,$$

$$N\colon \quad t^2\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}} - \left(2te + \frac{1}{4}M_1 V t^{-3} - 2tS\right)\partial_e.$$

При $M \neq 0$ имеем $E = 3B - 3N_0$, $\Gamma_1 = 5N_0 - B$, $\beta = \frac{1}{4}M_1 N t^{-3} - \frac{5}{4}M_1 N_0 t^{-4} + \frac{1}{4}M_1 B t^{-4}$, остается оператор с параметром N и изменяются операторы, соответствующие параметрам N_0 и B:

$$\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 3V\partial_V - 3S\partial_S + \left(2e + \frac{5}{4}VM_1 t^{-4} - 5S\right)\partial_e,$$

$$t\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 3V\partial_V - S\partial_S - \left(2e + \frac{1}{4}VM_1 t^{-4} - S\right)\partial_e.$$

3.3.3. Если $\widetilde{\widetilde{N}} = \widetilde{B} = 0$, $\widetilde{B_0} \neq 0$, то уравнение (31) эквивалентно следующему:

$$\widetilde{\beta}'' = k\widetilde{\beta}' \Rightarrow \widetilde{\beta}' = e^{kt}, \quad k \neq 0.$$

Из уравнения (30) вытекает, что $N = B = 0$, $kB_0 = 2N_0 - E - \Gamma_1$ при $M = 0$, $\beta = \frac{1}{k}\Gamma_1 e^{kt}$. Получим операторы для свободных параметров:

$$\Gamma_0\colon \quad \partial_S + \partial_e, \quad \Gamma_1\colon \quad V\partial_V + S\partial_S + \left(\frac{1}{k}Ve^{kt} + S\right)\partial_e,$$

$$N_0\colon \quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V + 2S\partial_S + 2e\partial_e, \quad B_0\colon \quad \partial_t - kV\partial_V.$$

Таблица 1. Таблица групповой классификации
по преобразованиям эквивалентности, где
$Y = t^2\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V - 2te\partial_e$,
M_1, M_2, k, n_1, n_2, M_0, M, n — постоянные

	Уравнение состояния	Операторы преобразований эквивалентности
1	$\varepsilon = e(t, v, S)$	$X_{10}, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15}, X_{\eta(t,S)}$
2	$e_t = e_S(2e + 3Ve_V)$	$\partial_S, \partial_e - 2t\partial_S, X_{11} + S\partial_S, X_{13} - S\partial_S, X_{12}$
3.	$e_t = e_S(\widetilde{\beta}'(t)V + 2e + 3Ve_V)$	$\partial_S, \partial_e - 2t\partial_S, X_{11} - X_{13} + 2X_{12} + 2S\partial_S$
3.1	$\widetilde{\beta}' = M\|t\|^k$	$X_{11} - kX_{12} + S\partial_S, X_{10} - \frac{1}{5}MX_{14}$ $(k = 1)$
3.2	$\widetilde{\beta}' = k\ln\|t\|$	$X_{11} - \frac{1}{5}kX_{14} + S\partial_S$
3.3	$\widetilde{\beta}' = e^{kt}$	$X_{10} - kX_{12}$
4	$e = -\frac{1}{5}\widetilde{\beta}'(t) - \frac{1}{2}\widetilde{\gamma}'(t) + SV^{-\frac{2}{3}}$	
4.1	$\widetilde{\beta} = M_1(t-n)^{-5}$, $\widetilde{\gamma} = M_2(t-n)^{-2}$	$-nX_{10} - \frac{1}{2}X_{11} + \frac{3}{2}X_{13} + 3X_{12} - S\partial_S$, $-(V\widetilde{\beta} + \widetilde{\gamma})\partial_e + Y - n(n\partial_t +$ $2\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + 2\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 3V\partial_V + 2S\partial_S + 4e\partial_e)$
4.2	$\widetilde{\beta}'' = M_1e^{-n_1I}\|t^2 + k\|^{-\frac{7}{2}}$, $\widetilde{\gamma}'' = M_2e^{-n_2I}(t^2 + k)^{-2}$, $I = \int\frac{dt}{t^2+k}$	$Y + k\partial_t - \frac{1}{2}n_2(\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}) +$ $(n_1 - n_2)V\partial_V + \frac{1}{3}(2n_1 - 5n_2)S\partial_S -$ $(n_2e + V\widetilde{\beta} + \widetilde{\gamma})\partial_e$
4.3	$\widetilde{\beta} = 0$, $\widetilde{\gamma}'' = M_2e^{-n_2I}(t^2 + k)^{-2}$	$V\partial_V + \frac{2}{3}S\partial_S, Y + k\partial_t - \frac{1}{2}n_2(\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}$ $+\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}) - n_2S\partial_S - (n_2e + \widetilde{\gamma})\partial_e$
4.3.1	$\widetilde{\gamma} = \frac{1}{6}M_2\left(t - \frac{1}{4}n_2\right)^{-2}$, $k = -\left(\frac{1}{4}n_2\right)^2$	$\left(t - \frac{1}{4}n_2\right)\partial_t - \frac{1}{2}\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} - \frac{3}{2}\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} -$ $3S\partial_S - 3e\partial_e$
4.4	$\widetilde{\beta}'' = M_1e^{-n_1I}\|t^2 + k\|^{-7/2}$, $\widetilde{\gamma} = 0$	$\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2V\partial_V + \frac{10}{3}S\partial_S + 2e\partial_e$, $Y + k\partial_t + n_1V\partial_V + \frac{2}{3}n_1S\partial_S - V\widetilde{\beta}\partial_e$
4.4.1	$\widetilde{\beta} = \frac{1}{30}M_1\left(t - \frac{1}{7}n_1\right)^{-5}$, $\widetilde{\gamma} = 0$, $k = -\left(\frac{1}{7}n_1\right)^2$	$\left(t - \frac{1}{7}n_1\right)\partial_t + 4V\partial_V + \frac{2}{3}S\partial_S - 2e\partial_e$,
4.5	$\widetilde{\beta}' = M_1t^{-6}$, $\widetilde{\gamma}' = M_2t^{-3}$	$-2t\partial_t + \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + 3\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 6V\partial_V +$ $2S\partial_S + 6e\partial_e, Y - (V\widetilde{\beta} + \widetilde{\gamma})\partial_e$
4.6	$\widetilde{\beta}' = M_1t, \widetilde{\gamma}' = M_2t$	$2t\partial_t + 3\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2S\partial_S + 2e\partial_e$, $\partial_t - \left(\frac{1}{5}M_1V + \frac{1}{2}M_2\right)\partial_e$
4.7	$\widetilde{\beta}' = M_1\|t\|^{k_1}$, $\widetilde{\gamma}' = M_2\|t\|^{k_2}$, $\lambda = \begin{cases} 0, & k_1 \neq 0, \\ 1, & k_1 = 0, \end{cases}$ $\mu = \begin{cases} 0, & k_2 \neq 0, \\ 1, & k_2 = 0, \end{cases}$	$t\partial_t + \frac{1}{2}(k_2 + 2)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \frac{1}{2}k_2\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} +$ $(k_2 - k_1)V\partial_V + \frac{1}{3}(5k_2 - 2k_1)S\partial_S +$ $\left(k_2e - \frac{1}{5}\lambda M_1V - \frac{1}{2}\mu M_2\right)\partial_e$
4.8	$\widetilde{\beta} = M_0$,	$3V\partial_V + 2S\partial_S$,
4.8.1	$\widetilde{\gamma} = M_2t(\ln\|t\| - 1)$	$t\partial_t + \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} - \frac{1}{2}M_2\partial_e$
4.8.2.	$\widetilde{\gamma} = M_2\ln\|t\|$	$2t\partial_t + \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 2S\partial_S - 2e\partial_e$
4.8.3	$\widetilde{\gamma} = -\frac{1}{2}M_2t^{-2}$	$-2t\partial_t + \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + 3\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} +$ $6S\partial_S + 6e\partial_e, Y - \widetilde{\gamma}\partial_e$
4.8.4	$\widetilde{\gamma} = \frac{1}{2}M_2t^2$	$2t\partial_t + 3\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2S\partial_S +$ $2e\partial_e, \partial_t - \frac{1}{2}M_2\partial_e$
4.8.5	$\widetilde{\gamma} = M_2(k_2 + 1)^{-1}t\|t\|^{k_2}$, $k \neq -3, -1, 0, 1$	$2t\partial_t + (k_2 + 2)\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + k_2\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} +$ $2k_2(S\partial_S + e\partial_e)$

Таблица 1. Продолжение

4.9	$\widetilde{\gamma} = M_0$	
4.9.1	$\beta' = M_1\|t\|^{k_1}, k_1 \neq -6, 1$	$X_{11} - X_{13} + 2X_{12} + \frac{10}{3}S\partial_S$, $X_{13} - (k_1+2)X_{12} - \frac{2}{3}(k_1+5)S\partial_S - \frac{1}{5}\lambda M_1 X_{14}$
4.9.2	$\widetilde{\beta}' = M_1 t^{-6}, k_1 = -6$	$Y - \widetilde{\beta} X_{14}$
4.9.3	$\widetilde{\beta}' = M_1 t, k_1 = 1$	$X_{10} - \frac{1}{5}M_1 X_{14}$
4.10	$\widetilde{\beta}' = M_1 e^{k_1 t}$, $\widetilde{\gamma}' = M_2 e^{k_2 t}$	$X_{10} + \frac{1}{2}k_2(X_{11} - X_{13}) + (k_2 - k_1)X_{12} + \frac{1}{3}(5k_2 - 2k_1)S\partial_S$
4.11	$\widetilde{\beta}' = M_1 e^{k_1 t}, \widetilde{\gamma}' = M_2 t$	$X_{10} - k_1 X_{12} - \frac{2}{3}k_1 S\partial_S - \frac{1}{2}M_2 X_{15}$
4.12	$\widetilde{\beta}' = M_1 t, \widetilde{\gamma}' = M_2 e^{k_2 t}$	$X_{10} + \frac{1}{2}k_2(X_{11} - X_{13}) - \frac{1}{5}M_1 X_{14} + \frac{5}{3}k_2 S\partial_S$
4.13	$\widetilde{\beta}' = M_1 t, \widetilde{\gamma}' = M_2 t$	$2t\partial_t + 3\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 2S\partial_S + 2e\partial_e$, $X_{10} - \frac{1}{5}M_1 X_{14} - \frac{1}{2}M_2 X_{15}$
4.14	$\widetilde{\beta} = M_0$	$X_{12} + \frac{2}{3}S\partial_S$
4.14.1	$\widetilde{\gamma}' = M_2 e^{k_2 t}$	$X_{10} + \frac{1}{2}k_2(X_{11} - X_{13}) + k_2 S\partial_S$
4.14.2	$\widetilde{\gamma}' = M_2 t$	$X_{10} - \frac{1}{2}M_2 X_{15}, 3X_{11} - X_{13} + 2S\partial_S$
4.15	$\widetilde{\gamma} = M_0$	$X_{11} - X_{13} + 2X_{12} + \frac{10}{3}S\partial_S$
4.15.1	$\widetilde{\beta}' = M_1 e^{k_1 t}$	$X_{10} - k_1 X_{12} - \frac{2}{3}k_1 S\partial_S$
4.15.2	$\widetilde{\beta}' = M_1 t$	$X_{10} - \frac{1}{5}M_2 X_{12}, X_{13} - 3X_{12} - 4S\partial_S$
5	$e_t = e_S V\widetilde{\beta}'$	$X_{11} - X_{13}, X_{12} + S\partial_S, \partial_S$, $(S + V\widetilde{\beta})\partial_e, X_{14}, X_{15}$
5.1	$\widetilde{\beta}' = M\|t\|^k$	$X_{13} - (k+1)X_{12}, X_{10} \quad (k = 0)$
5.2	$\widetilde{\beta}' = e^{kt}$	$X_{10} - kX_{12}$
6	$e = V\widetilde{\beta}(t) + S + MV^{-\frac{2}{3}}$	$\partial_S + \partial_e$
6.1	$\widetilde{\beta}$ произвольно	$X_{11} - X_{13} - 3(X_{12} + S\partial_S) - 5(V\widetilde{\beta} + S)\partial_e$ $(M \neq 0)$, $X_{11} - X_{13} + 2(X_{12} + S\partial_S)$, $X_{12} + S\partial_S + (V\widetilde{\beta} + S)\partial_e$ $(M = 0)$
6.2	$\widetilde{\beta}' = M_1 e^{nI}\|t^2 + k\|^{-\frac{5}{2}}$, $I = \int \frac{dt}{t^2+k}, k \neq \left(\frac{1}{5}n\right)^2$	$M = 0: X_{12} + S\partial_S + (V\widetilde{\beta} + S)\partial_e$, $X_{11} - X_{13} + 2X_{12} + 2S\partial_S$, $Y + k\partial_t + (3t - n)V\partial_V + (V(t^2+k)\widetilde{\beta}' + (5t - n)\widetilde{\beta} + 2tS)\partial_e$ $M \neq 0: X_{11} - X_{13} - 3X_{12} - 3S\partial_S - 5(V\widetilde{\beta} + S)\partial_e$, $Y + k\partial_t + 3tV\partial_V + nS\partial_S + (V((t^2+k)\widetilde{\beta}' + 5t\widetilde{\beta}) + (2t + n)S)\partial_e$
6.2.1	$\widetilde{\beta} = -\frac{1}{4}M_1\left(t + \frac{1}{5}n\right)^{-4}$, $k = -\left(\frac{1}{5}n\right)^2$	$M = 0: \frac{1}{5}nX_{10} + X_{13} + 2X_{12} - 2S\partial_S$ $M \neq 0: X_{13} + \frac{1}{5}nX_{10} + 3X_{12} - S\partial_S + (V\widetilde{\beta} + S)\partial_e$

При $M \neq 0$ имеем $E = -3N_0$, $\Gamma_1 = -kB_0 + 5N_0$, $\beta = \frac{1}{k}e^{kt}(5N_0 - kB_0)$ и операторы для N_0 и B изменяются:

$$N_0:\quad \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 3V\partial_V - 3S\partial_S + \left(2e - \frac{5}{k}e^{kt}V - 5S\right)\partial_e,$$

$$B_0:\quad \partial_t + kS\partial_S + (Ve^{kt} + kS)\partial_e.$$

Таблица 1. Окончание

6.3	$\widetilde{\beta}' = M_1\|t\|^k$	$M=0: V\partial_V + S\partial_S + (V\widetilde{\beta}+S)\partial_e$ $M\neq 0: X_{13}+3X_{12}+(k+4)S\partial_S+$ $(k+6)(V\widetilde{\beta}+S)\partial_e$, $X_{11}-X_{13}-3X_{12}-3S\partial_S-5(V\widetilde{\beta}+S)\partial_e$
6.3.1	$k\neq -5,-1,0$, $\widetilde{\beta}=M_1(k+1)^{-1}t\|t\|^k$	$M=0: X_{11}-X_{13}+2X_{12}+2S\partial_S$, $X_{13}-(k+3)X_{12}-2S\partial_S$
6.3.2	$k=0, \widetilde{\beta}=M_1t$	добавляется к 6.3.1: $X_{10}+M_1X_{14}$ $\forall M$
6.3.3	$k=-1, \widetilde{\beta}=M_1\ln\|t\|$	$M=0: X_{11}-X_{13}+2S\partial_S-2\widetilde{\beta}X_{14}$, $X_{13}-2X_{12}-2S\partial_S+M_1X_{14}$
6.3.4	$k=-5, \widetilde{\beta}=-\frac{1}{4}M_1t^{-4}$	$M=0: X_{11}-X_{13}+2X_{12}+2S\partial_S$, $X_{13}+2X_{12}-2S\partial_S-4\widetilde{\beta}X_{14}$, $Y+t(V\widetilde{\beta}+2S)\partial_e$ $\forall M$
6.4	$\widetilde{\beta}=e^{kt}$	$M=0: V\partial_V+S\partial_S+(V\widetilde{\beta}+S)\partial_e$, $X_{10}-kX_{12}, X_{11}-X_{13}+2X_{12}+2S\partial_S$ $M\neq 0: X_{11}-X_{13}-3X_{12}-3S\partial_S-$ $5(V\widetilde{\beta}+S)\partial_e$, $X_{10}+kS(\partial_S+X_{15})+\widetilde{\beta}'X_{14}$

Все операторы допускаются уравнением $e = V\frac{1}{k}e^{kt}+S+MV^{-2/3}$.

Проделанные вычисления сведем в табл. 1.

Замечание. Уравнение состояния случая 6 в табл. 1 при $M=0$ удовлетворяет условию $e_{VV}=0$. Нарушается условие, при котором вычисляется алгебра преобразований эквивалентности. Тем самым в этом случае алгебра может быть шире.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Программа «Подмодели». Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.
2. *Головин С. В.* Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа. Препринт № 5–96. Ин-т гидродинамики СО РАН. Новосибирск, 1996. 31 с.
3. *Черевко А. А.* Оптимальная система подалгебр для алгебры операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае уравнения состояния $p=f(S)\rho^{5/3}$. Препринт № 4–96. Ин-т гидродинамики СО РАН. Новосибирск. 1996. 39 с.
4. *Хабиров С. В.* Оптимальные системы подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики. Препринт. Уфа: Ин-т механики УНЦ РАН, 1998. 33 с.
5. *Макаревич Е. В.* Оптимальная система подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае уравнения состояния с разделенной плотностью // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 19–38.
6. *Хабиров С. В.* Неизоморфные алгебры Ли, допускаемые моделями газодинамического типа // Уфим. мат. журн. 2011. Т. 3, № 2. С. 87–90.
7. *Хабиров С. В.* Оптимальные системы суммы двух идеалов, допускаемых уравнениями гидродинамического типа // Уфим. мат. журн. 2014. Т. 6, № 2. С. 99–103.
8. *Мукминов Т. Ф., Хабиров С. В.* Граф вложенных подалгебр 11-мерной алгебры симметрий сплошной среды // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 121–143.
9. *Головин С. В.* Об одном инвариантном решении уравнений газовой динамики // Прикл. механика и техн. физика. 1997. Т. 38, № 1. С. 3–10.
10. *Хабиров С. В.* Стационарная плоская вихревая подмодель идеального газа // Прикл. механика и техн. физика. 2021. Т. 62, № 4. С. 88–104.
11. *Овсянников Л. В.* Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения // Докл. АН. 1995. Т. 343, № 2. С. 156–159.

12. *Овсянников Л. В., Чупахин А. П.* Регулярные частично инвариантные подмодели уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1996. Т. 60, № 6. С. 990–999.

13. *Хабиров С. В.* Нерегулярные частично инвариантные решения ранга 2 дефекта 1 уравнений газовой динамики // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 5. С. 1168–1181.

14. *Хабиров С. В.* Дифференциально-инвариантные решения осесимметричных течений газа // Уфим. мат. журн. 2009. Т. 1, № 3. С. 154–159.

15. *Хабиров С. В.* Простые волны семимерной подалгебры всех переносов в газовой динамике // Прикл. механика и техн. физика. 2014. Т. 55, № 2. С. 199–203.

16. *Овсянников Л. В.* Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.

17. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1968.

18. *Черный Г. Г.* Газовая динамика. М.: Наука, 1988.

19. *Малкин А. Я., Исаев А. И.* Реология: концепции, методы, приложения. С-Пб: Профессия, 2010.

20. *Vladimirov V. A.* Modelling system for relaxing media. Symmetry, restrictions and attractive features of invariant solutions // Proc. Inst. Math. NAS Ukraine. Kyiv. 2000. V. 30, N 1. P. 231–238.

21. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

Поступила в редакцию 23 ноября 2022 г.
После доработки 24 марта 2023 г.
Принята к публикации 16 мая 2023 г.

Хабиров Салават Валеевич
Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
пр. Октября, 71, Уфа 450054
habirov@anrb.ru