E. V. Samuilov, Сечение прилипания электронов к сферическим частицам и термическая ионизация частиц, *TVT*, 1966, Volume 4, Issue 2, 143–147

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР

Том 4 *1966* *№ 2*

УДК 533.92.537.537.58

СЕЧЕНИЕ ПРИЛИПАНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ К СФЕРИЧЕСКИМ ЧАСТИЦАМ И ТЕРМИЧЕСКАЯ ИОНИЗАЦИЯ ЧАСТИЦ

Е. В. Самуйлов

Вычислено сечение прилипания электронов к сферическим заряженным и нейтральным частицам с учетом дебаевской экранировки поля кулоновских сил и сил «изображения». Получен закон действующих масс для ионизации частиц в квазистационарном случае при различных температурах газа, частиц и электронов. Расчеты проведены в предположении, что радиус частицы значительно меньше среднего расстояния между электронами.

Проводящие частицы малого радиуса могут присутствовать в виде естественной примеси в продуктах сгорания твердого или газообразного топлива, в высокотемпературных газовых потоках, взаимодействующих с разрушающимися поверхностями; в некоторых случаях частицы искусственно вводятся в газ для увеличения его электропроводности.

1. **Энергия** $\varphi(r)$ электрона, находящегося на расстоянии r от центра частицы радиуса R, имеющей заряд Z^*e (Z^* — положительное или отрицательное целое число; e — заряд электрона), в ряде случаев может быть аппроксимирована выражением:

$$\varphi(r) = -\frac{Z^*\, e^2 e^{-\varkappa(r-R)}}{r(1+R\varkappa)} - \frac{e^2 R^3 e^{-2\varkappa(r-R)}}{2r^2(r^2-R^2)}, \tag{1}$$

где $\varkappa$ — дебаевская экранировочная постоянная

$$\varkappa^2 = 4\pi e^2\left(\frac{n_e}{kT_e} + \sum_{Z_0^*}\frac{N_{Z_0^*}\, Z_0^{*2}}{kT_i} + \sum_{Z^*}\frac{n_{Z^*} Z^{*2}}{kT_p}\right). \tag{2}$$

Здесь n_e — плотность числа электронов; $N_{Z_0^*}$, n_{Z^*} — плотности числа ионов и частиц, имеющих заряды Z_0^*e, Z^*e соответственно; T_e, T_i, T_p — температуры электронов, ионов и частиц; k — постоянная Больцмана.

Первый член в $\varphi(r)$ — энергия электрона в заэкранированном кулоновском поле частицы [1]; второй член — энергия электрона в заэкранированном поле «изображения» [2]. Экранировочный множитель $e^{-2\varkappa(r-R)}$ во втором члене записан для случая плоской стенки [3]. Выражение (1) справедливо лишь для $r > R$, начиная от $r_0 \approx R + \delta$, где $\delta \approx 2\cdot 10^{-8}$ *см*. Как выяснится ниже, для расчетов важны свойства функции (1) вблизи поверхности частицы, где ее можно записать в виде

$$\varphi(r) = -\frac{Ze^2}{r} - \frac{e^2}{4(r-R)}, \tag{3}$$

где $Z = Z^*/1 + R\varkappa$. Поэтому ниже вместо (1) будет использоваться функция (3).

2. При $R \ll r_{\text{ср}}$ ($r_{\text{ср}}$ — среднее расстояние между электронами в газе) можно считать, что электрон, взаимодействующий с частицей, приходит из бесконечности.

Согласно [4], задача о движении электрона в поле $\varphi(r)$ сводится к задаче о движении электрона в эффективном поле

$$\varphi_1(r) = \varphi(r) + M^2 / 2mr^2, \tag{4}$$

где $M = mbU$ — момент количества движения; b — прицельный параметр; U — абсолютное значение скорости электрона на бесконечности; m — масса электрона. Электрон может достигнуть поверхности частицы, если соблюдается условие

$$mU^2 / 2 \geqslant \varphi_1(r_m), \tag{5}$$

где r_m — значение r, при котором $\varphi_1(r)$ приобретает наибольшее из возможных значений в интервале $r_0 \leqslant r \leqslant \infty$.

Полагая, что электрон прилипает к частице, если он достигает ее поверхности, сечение прилипания электрона можно записать в виде

$$\sigma = \pi b_m^2, \tag{6}$$

где b_m — максимальное значение прицельного параметра, при котором еще соблюдается условие (5) при данной скорости электрона U. Значения b_m и r_m при данной скорости электрона определяются из системы уравнений

$$\varphi_1(r_m) = \frac{mU^2}{2}, \qquad \left.\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}\right|_{r=r_m} = 0, \tag{7}$$

которые при переходе к безразмерным величинам преобразуются к виду

$$\varphi_1^*(p) = -\frac{Z}{1+p} - \frac{1}{4p} + \frac{B}{2(1+p)^2} = E, \tag{8}$$

$$\psi(p) = 0, \tag{9}$$

где $E = RmU^2 / 2e^2$; $B = M^2 / Rme^2$; $r / R = 1 + p$; $\psi(p) = 1 + 3p + (4Z - 4B + 3)p^2 + (4Z + 1)p^3$.

Для $p \geqslant \delta / R > 0$ и $Z \geqslant 0$ уравнение (9) может иметь решение при $\alpha = 4Z - 4B + 3 < 0$. При этом $\psi(p)$ имеет два экстремума в точках

$$p_{1,2} = -\frac{\alpha}{3(4Z+1)} \mp \sqrt{\left[\frac{\alpha}{3(4Z+1)}\right]^2 - \frac{1}{4Z+1}}. \tag{10}$$

Поскольку $\psi(0) = 1$ и $\psi(\infty) = \infty$, то при $\psi(p_2) > 0$ уравнение (9) не имеет решений, а при $\psi(p_2) < 0$ имеются два положительных корня, из которых p_{m_1}, находящийся в интервале $p_1 \leqslant p_{m_1} \leqslant p_2$, придает функции φ_1^* максимальное значение, а другой — $p_{m_2} \geqslant p_2$ — придает функции φ_1^* минимальное значение при $p_{m_1} \leqslant p \leqslant \infty$. При $Z \leqslant -1$ уравнение (9) имеет только один корень при $p_{m_1} > p_2$, причем этот корень соответствует максимуму функции φ_1^*.

Минимальное значение энергии $E_{\min}$, при котором электрон может упасть на частицу, равно

$$E_{\min} = 0, \text{ при } Z \geqslant 0, \tag{11}$$

$$E_{\min} = -\frac{Z}{1+p_0} - \frac{1}{4p_0} \text{ при } Z \leqslant -1, \tag{12}$$

где $p_0 = -(1 + \sqrt{-4Z}) / (1 + 4Z)$.

В результате решения уравнения (9) были получены зависимости p_{m_1}, p_{m_2} от B при различных Z. Значения $p_{m_1} \ll 1$. Зависимость B_m от E при различных Z на конечных участках значений E была аппроксимирована линейной функцией вида

$$B_m = \alpha_i(Z)E + \beta_i(Z) \quad (E_i \leqslant E \leqslant E_{i+1};\ i \geqslant 0). \tag{13}$$

Значения α_i, β_i E_i даны в таблице. По ней и соотношению (13) может быть вычислено сечение $\sigma(U, Z)$.

Z	i	E_i	α_i	β_i	Z	i	E_i	α_i	β_i
—10	0	7,09	2,61	—18,5	0	2	1,4	2,9	3,42
—10	1	12	2,38	—15,5	0	3	3	2,73	4,1
— 5	0	3,09	4,3	—13,25	0	4	5	2,38	5,6
— 5	1	3,32	3,43	—10,4	1	0	0	3,46	5,2
— 5	2	3,6	2,82	— 8,2	1	1	1	3,05	5,7
— 5	3	6,4	2,56	— 6,4	1	2	2	2,7	6,33
— 5	4	12	2,35	— 4	1	3	5	2,45	7,8
— 1	0	0,25	5,21	— 1,3	1	4	15	2,38	10
— 1	1	0,6	3,93	— 0,55	5	0	0	2,83	15,55
— 1	2	1,2	3,18	0,35	5	1	2	2,57	16
— 1	3	2	2,83	1,3	5	2	5	2,4	16,8
— 1	4	5	2,63	2,9	5	3	15	2,26	19
0	0	0	4,35	2,18	10	0	0	2,52	27,5
0	1	0,4	3,59	2,65	10	1	7	2,24	29,7

Если в выражении (3) ограничиться лишь энергией кулоновского взаимодействия, то вместо (13) получим

$$B_m = 2E + 2Z, \tag{14}$$

где $E_{\min} = 0$ для $Z \geqslant 0$ и $E_{\min} = -Z$ для $Z < 0$.

3. Сечение прилипания электронов σ, усредненное по максвелловскому распределению, равно

$$\bar{\sigma} = 4\pi \int\limits_{U_{\min}}^{\infty} \left(\frac{m}{2\pi kT_e}\right)^{3/2} e^{-mU^2/2kT_e} \sigma(U)\, U^2 dU, \tag{15}$$

где $U_{\min} = 0$ для $Z \geqslant 0$ и $U_{\min} = E_{\min} 2e^2 / Rm$ для $Z \leqslant -1$. В результате интегрирования (15) получим

$$\frac{\bar{\sigma}}{\pi R^2} = \frac{2x_e}{\sqrt{\pi}} \sum_i \left(\frac{\alpha_i \varphi_\alpha^{(i)}}{x_e} + \beta_i \varphi_\beta^{(i)}\right), \tag{16}$$

где

$$\varphi_\beta^{(i)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [\Phi(\sqrt{2x_e E_{i+1}}) - \Phi(\sqrt{2x_e E_i})];$$

$$\varphi_\alpha^{(i)} = \frac{1}{2} (\varphi^{\beta(i)} + \sqrt{x_e E_i}\, e^{-x_e E_i} - \sqrt{x_e E_{i+1}}\, e^{-x_e E_{i+1}});$$

$$x_e = e^2 / RkT_e.$$

Здесь Φ — интеграл вероятности [5]. Если в выражении (3) ограничиться учетом только энергии кулоновского взаимодействия, то будем иметь

$$\frac{\bar{\sigma}}{\pi R^2} = 1 + 2x_e Z \quad \text{для } Z \geqslant 0 \tag{17}$$

$$\frac{\bar{\sigma}}{\pi R^2} = (1+2x_eZ)\,[1+\Phi(\sqrt{-2x_eZ})] + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{-2x_eZ}\, e^{x_eZ} \text{ для } Z \leqslant -1. \quad (18)$$

4. Число электронов, имитируемых вследствие термической ионизации со всей поверхности частицы в единицу времени со скоростями, заключенными в пределах от $\mathbf{U}$ до $\mathbf{U} + d\mathbf{U}$, равно

$$dN_{эм} = 4\pi r_0^2 \alpha \frac{2m^3}{h^3}\left[1 + e^{\frac{1}{kT_p}\left(\frac{mU^2}{2}+\Phi\right)}\right]^{-1} U_z\, d\mathbf{U}, \quad (19)$$

где $\mathbf{U}$ — скорость электрона на расстоянии δ от поверхности частицы; $U = |\mathbf{U}|$; U_z — компонента скорости $\mathbf{U}$ вдоль оси z (ось z нормальна к поверхности частицы); h — постоянная Планка; Φ — работа выхода электрона на расстояние δ от поверхности частицы; α — коэффициент эффективности поверхности. При $\Phi \geqslant (3 \div 4)kT_p$ в скобках выражения (19) можно пренебречь единицей. Тогда

$$dN_{эм} = 4\pi r_0^2 \alpha \frac{2m^3}{h^3} e^{-\frac{1}{kT_p}\left(\frac{mU^2}{2}+\Phi\right)} U_z\, d\mathbf{U}. \quad (20)$$

Электрон, преодолевший потенциальный барьер Φ, покинет частицу, если соблюдается условие [4]

$$\frac{mU^2}{2} + \varphi(r_0) \geqslant \varphi_1(r_m). \quad (21)$$

Полное число электронов, покидающих частицу в единицу времени, получается интегрированием выражения (20) по всем значениям скоростей $0 \leqslant U_z \leqslant \infty$, $-\infty \leqslant U_x, U_y \leqslant \infty$ (U_x, U_y — компоненты скорости $\mathbf{U}$ вдоль осей x, y) при соблюдении условия (19). Переходя в (20) и (21) к переменным $B = M^2 / Rme^2$ и $E = [mU^2 / 2 + \varphi(r_0)]R / e^2$ и интегрируя, получим

$$N_{эм} = \alpha \frac{8\pi^2 m e^4}{h^3} e^{-[\Phi-\varphi(r_0)]/kT_p} \int\limits_{E_{\min}}^{\infty} B_m(E, x_p, Z)\, e^{-x_pE}, \quad (22)$$

где $x_p = e^2 / RkT_p$; $E_{\min}$ — минимальное значение полной энергии электрона, при которой электрон может покинуть частицу. В рассматриваемом случае $E_{\min}$ совпадает со значениями (11) или (12).

5. Число электронов, имеющих скорости в пределах от $\mathbf{U}$ до $\mathbf{U} + d\mathbf{U}$ и падающих в единицу времени на частицу, согласно [6], равно

$$dN_{пад} = \beta\left(\frac{m}{2\pi kT_e}\right)^{3/2} n_e e^{-mU^2/2kT_e}\, Ub\, db\, d\varphi\, d\mathbf{U}, \quad (23)$$

где φ — полярный угол; β — коэффициент, учитывающий отражение электронов от поверхности; $\mathbf{U}$ — скорость электрона на большом удалении от частицы. Полное число электронов, падающих на поверхность частицы в единицу времени, получается путем интегрирования выражения (23) по всем значениям скоростей и прицельных параметров, удовлетворяющих условию (5).

После перехода в выражениях (5) и (23) к переменным $B = M^2 / Rme^2$ и $E = (mU^2 / 2)(R / e^2)$ и интегрирования получим

$$N_{пад} = \beta \frac{4\pi^2 e^4}{m^2} n_e \left(\frac{m}{2\pi kT_e}\right)^{3/2} \int\limits_{E_{\min}}^{\infty} B_m(E, x_e, Z)\, e^{-x_eE}\, dE, \quad (24)$$

где $E_{\min}$ совпадает с (11) или (12).

6. Если изменение заряда частицы происходит только в результате термической эмиссии и падения электронов на частицу, то в квазистационарном случае при $T_e \neq T_i \neq T_p$ будет соблюдаться следующее балансное соотношение:

$$n_{Z^*} N_{\text{пад}} = n_{Z^*-1} N_{\text{эм}}. \qquad (25)$$

Из (22), (24), (25) получаем выражение для закона действующих масс

$$\frac{n_{z^*} n_e}{n_{Z^*-1}} = \frac{\alpha}{\beta} 2 \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} (kT_e)^{3/2} \frac{x_e S(Z, x_p)}{x_p S(Z, x_e)} e^{-[\Phi - \varphi(r_0)]/kT_p}, \qquad (26)$$

где

$$\frac{S(Z,x)}{x} = \int\limits_{E_{\min}}^{\infty} B_m(E, x, Z) e^{-xE} \, dE.$$

При $x_p = x_e$ из (26) получается известное выражение для закона действующих масс для реакции ионизации.

Пользуясь (13), величину $S(Z, x)$ после интегрирования можно записать в виде

$$S(Z, x) = \sum_i \left(\frac{\alpha_i f_\alpha^{(i)}}{x} + \beta_i f_\beta^{(i)} \right), \qquad (27)$$

где

$$f_\alpha^{(i)} = e^{-xE_i} [xE_i + 1 - e^{-x(E_{i+1} - E_i)} (xE_{i+1} + 1)];$$
$$f_\beta^{(i)} = e^{-xE_i} [1 - e^{-x(E_{i+1} - E_i)}].$$

Если в выражении (3) учитывать только энергию кулоновского взаимодействия, то, пользуясь (14), получим

$$S(Z, x) = \frac{2}{x} (1 + Zx) \quad \text{для } Z \geqslant 0,$$

$$S(Z, x) = \frac{2}{x} e^{xZ} \quad \text{для } Z \leqslant -1.$$

Энергетический институт
им. Г. М. Кржижановского

Поступила в редакцию
26 IV 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Семенченко. Физическая теория растворов. Гостехиздат, 1941.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, 1957.
3. F. P. Buff, F. H. Stillinger. J. Chem. Phys., 25, 312, 1956.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. Физматгиз, 1965.
5. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. Справочник по математике. Физматгиз, 1962.
6. Д. Гиршфельдер, Ч. Кэртисс, Р. Берд. Молекулярная теория газов и жидкостей. ИЛ, 1961.