Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. И. Плотников, И. М. Старобинец, Об операторных включениях в гладких задачах на экстремум,
*Изв. вузов. Матем.*, 1985, номер 12, 42–48

https://www.mathnet.ru/ivm7453

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
6 декабря 2025 г., 19:06:47

$v_0(\xi) = (Fz_0)(\xi)$ в точке 0. Этот оператор определен на элементах из $D(A_K)$. Положим $D(K) = D(A_K)$. Если $z_0 \in D(A_K)$, то из (14) следует

$$Kz(t) = K(S(t)z_0) = (FS(t)z_0)(0) = (Fz_0)(t) = v_0(t) \tag{15}$$

почти всюду. Ввиду (13) и (15) функция $S(t)z_0$ при $z_0 \in D(A_K)$ удовлетворяет равенству

$$S(t)z_0 = T(t)z_0 + \int_0^t T_{-1}(t-\xi)BK(S(\xi)z_0)\,d\xi. \tag{16}$$

Вычисляя предел $\lim\limits_{t\to+0}(S(t)z_0 - z_0)/t$ в пространстве $Z_{-1}$ с помощью равенства (16), получим при $z_0 \in D(A_K)$ $A_K z_0 = A_{-1}z_0 + BKz_0 = (A_{-1} + BK)z_0$. Так как $A_K z_0 \in Z$, то $(A_{-1} + BK)z_0 \in Z$ и в силу $D(A_K) = D(K)$ имеем $A_K = A_{-1} + BK$.

Известно, что исследованная Д. Л. Расселом система (см. [8], сс. 336, 339) удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Таким образом, вывод об абсолютной стабилизируемости этой системы может быть получен из общей теории.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Curtain R., Pritchard A. J. An abstract theory of unbounded control action for distributed parameter systems.— SIAM J. Control and Optim., 1977, v. 15, № 4, p. 566—611.
2. Curtain R., Pritchard A. J. Infinite dimensional linear systems theory.— Lect. Notes Control and Inform. Sci., 1978, v 8. 297 p.
3. Zabczyk J. A. Semigroup approach to boundary value control. — Proc. 2-nd IFAC Simp. Coventry, 1977. Oxford, 1978, p. 99—107.
4. Fattorini H. O. Boundary control systems.— SIAM J. Control and Optim., 1968, v. 6, № 3, p. 349—385.
5. Russell D. L. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations.— SIAM Rev., 1978, v. 20, № 4, p. 639—739.
6. Нефедов С. А. К теории управляемости систем с распределенными параметрами.— Дифференц. уравнения, 1983, т. XIX, с. 1998—2000.
7. Нефедов С. А. К теории управляемости систем с распределенными параметрами.— ВИНИТИ, № 106—81 Деп., 1981.
8. Russell D. L. Control theory of hyperbolic equations related to certain quations in harmonic analyses and spectral theory.— J. Math. Anal. Appl., 1972, v. 40, № 2, p. 336—368.
9. Хилле Э., Филлипс Р. Функциональный анализ и полугруппы. М., 1962. 832 с.


г. Свердловск


Поступили
первый вариант — 26.10.1982
окончательный вариант — 26.04.1984



*В. И. Плотников, И. М. Старобинец*



УДК 517.972


# ОБ ОПЕРАТОРНЫХ ВКЛЮЧЕНИЯХ В ГЛАДКИХ ЗАДАЧАХ НА ЭКСТРЕМУМ

Гладкие задачи занимают значительное место в общей экстремальной теории. Им посвящено достаточно большое количество работ, в которых обычно доказываются те или иные условия экстремальности функционала на множестве, задаваемом набором неравенств и равенств ([1] — [3] и др.).

В данной работе ограничения типа неравенств заменены гораздо более общими ограничениями в виде операторных включений в топологических пространствах, к которым добавлено ограничение типа операторного равенства и континуума неравенств. В связи с этим здесь используется методика, предложенная в [4], [5] для задач оптимального управления и формализованная в [6] для широкого круга экстремальных задач. Основной результат сформулирован в теореме 1 в виде необходимого условия экстремума для решаемой задачи. Следует отметить, что подобный подход может быть с успехом применен во многих других задачах, содержащих операторные включения.

## § 1. Постановка задачи и предварительные сведения

Пусть $B$, $B_F$ — пространства Банаха, а $X_i$ — топологические векторные пространства над полем вещественных чисел, $i=\overline{1,n}$. Предположим, что заданы набор выпуклых тел $M_i \subset X_i$, $i=\overline{1,n}$, и некоторый метрический компакт $A$. На $B$ определены функционал $f_0(x): B \to R^1$ и операторы

$$f_i(x): B \to X_i,\ i=\overline{1,n};\ F(x): B \to B_F;\ f(\alpha,\ x): B \to C[A],$$

где $C[A]$ — пространство непрерывных функций над $A$. Рассматривается задача минимизации функционала $f_0$ на множестве

$$S=\{x \in B: F(x)=0_{B_F};\ f_i(x) \in M_i,\ i=\overline{1,n};\ f(\alpha,\ x) \leqslant 0,\ \alpha \in A\},$$

где $0_{B_F}$ есть нуль пространства $B_F$. (В дальнейшем аналогично будут обозначаться нули в других линейных пространствах.) Предположим, что элемент $x_0 \in B$. Введем опорные конусы к множествам $\operatorname{int} M_i$ соответственно в точках $f_i(x_0)$:

$$K_i=\{z \in X_i: f_i(x_0)+\gamma z \in \operatorname{int} M_i \text{ при некотором } \gamma>0\},\ i=\overline{1,n},$$

и двойственные к ним конусы

$$K_i^*=\{z^* \in X_i^*: z^*[z] \leqslant 0\ \ \forall z \in K_i\},\ i=\overline{1,n}.$$

Очевидно, $K_i$ — выпуклые, открытые, непустые конусы, т. к. $M_i$ — выпуклые тела [2]. Будем говорить, что оператор $f(\alpha,\ x)$ дифференцируем по Фреше равномерно по $\alpha$ в точке $x_0$, если при каждом $\alpha \in A$ существует его производная Фреше $f'(\alpha,\ x_0)$, т. е. $\forall h \in B$

$$f(\alpha,\ x_0+h)-f(\alpha,\ x_0)=f'(\alpha,\ x_0)[h]+o(\alpha,\ h),$$

причем $|o(\alpha,\ h)|\|h\|^{-1} \xrightarrow[\|h\|\to 0]{} 0$ равномерно по $\alpha \in A$, и оператор $f'(\alpha,\ x_0)$ непрерывен равномерно по $\alpha$. Условимся также под производными Фреше операторов $f_i(x)$ в точке $x_0$ понимать линейные непрерывные операторы $f_i'(x_0)[\cdot]: B \to X_i$ такие, что $f_i(x_0+h)-f_i(x_0)=f_i'(x_0)[h]+o_i(h)$, $h \in B$, где $\|h\|^{-1}\ o_i(h) \to 0_{X_i}$ при $\|h\| \to 0$. В дальнейшем производные Фреше в точке $x_0$ будем обозначать просто $f_0'$, $f_i'$, $F'$, $f'(\alpha)$.

## § 2. Необходимое условие экстремума

Теорема 1. *Пусть $x_0 \in B$ есть решение поставленной задачи. Предположим, что функционал $f_0(x)$ и операторы $f_i(x)$, $i=1,n$, дифференцируемы по Фреше в точке $x_0$, $f(\alpha,\ x)$ дифференцируем по Фреше равномерно по $\alpha \in A$ в этой точке, причем $f'(\alpha)$ непрерывна по $\alpha$ в операторной топологии, а оператор $F(x)$ дифференцируем по Фреше в некоторой окрестности точки $x_0$, причем в самой точке $x_0$ производная $F'$ непрерывна. Пусть, кроме того, образ пространства $B$ при отображении $x \to F'[x]$ замкнут в $B_F$. Тогда существует такой нетривиальный набор из константы $\lambda_0 \geqslant 0$, непрерывных линейных функционалов $x_i^* \in K_i^*$, $y^* \in B_F^*$ и положительной меры Радона $\mu(\alpha)$, что имеет место соотношение*

$$\lambda_0 f_0'+\sum_{i=1}^{n} x_i^* f_i'+y^* F'+\int_A f'(\alpha)\, d\mu(\alpha)=0_{B^*}. \tag{1}$$

Доказательство. Вначале докажем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть $Y$ — топологическое векторное пространство. Заданы отображения $y(t): R^1 \to Y$ и $\beta(t): R^1 \to R^1$. Предположим, что $0 \leqslant \beta(t) \leqslant c$ при $t \in [0,\ t_0]$ $(t_0>0,\ c>0)$, а $y(t) \to 0_Y$ при $t \to +0$. Тогда $\beta(t)\, y(t) \to 0_Y$ при $t \to +0$.*

Доказательство. В пространстве $Y$ существует базис уравновешенных окрестностей нуля [7]. Возьмем произвольную окрестность $V$ из этого базиса и окрестность $V_c = c^{-1}V$. Если при некотором $t \in [0, t_0]$ $y(t) \in V_c$, то $cy(t) \in V$, и т. к. $V$ уравновешена, то $\beta(t)\, y(t) = \frac{\beta(t)}{c}(cy(t)) \in V$. Отсюда и из условия леммы легко следует, что $\beta(t)\, y(t) \to 0_Y$ при $t \to +0$. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1. Зафиксируем $h \in B$ и составим вектор

$$\Lambda(h) = \{f_0'[h];\ f_i'[h],\ i = \overline{1, n};\ F'[h];\ f'(\alpha)[h],\ \alpha \in A\}.$$

Очевидно, $\Lambda(h)$ есть элемент пространства $E = R^1 \times X_1 \times \ldots \times X_n \times B_F \times C[A]$, а множество таких векторов $K = \{\Lambda(h),\ h \in B\}$ образует подпространство пространства $E$.

Случай 1. Пусть образ пространства $B$ при отображении $F'$ не совпадает со всем $B_F$. Тогда согласно условию теоремы он образует замкнутое собственное подпространство в $B_F$. Поэтому найдется ненулевой функционал $y^* \in B_F^*$ такой, что $y^*F' = 0_{B^*}$ (см., напр., [1]). Положив тогда $\lambda_0 = 0$, $x_i^* = 0_{X_i^*}$, $\mu(\alpha) \equiv 0$, мы удовлетворим (1), и теорема в этом случае доказана.

Случай 2. Пусть $F'B = B_F$. Зададим множество

$$K' = R^- \times K_1 \times \ldots \times K_n \times 0_{B_F} \times C^-[A],$$

где $R^- = \{r \in R^1 : r < 0\}$, $C^-[A] = \{\varphi(\alpha) \in C[A] : \varphi(\alpha) < 0,\ \alpha \in A\}$. Ясно, что $K'$ — выпуклый конус.

Лемма 2. *В сделанных предположениях* $K \cap K' = \varnothing$.

Доказательство. Действительно, предположим, что $K \cap K' \neq \varnothing$. Тогда существует такое $\bar{h} \in B$ и число $\delta > 0$, что

$$f_0'[\bar{h}] \leqslant -\delta;\ f_i'[\bar{h}] \in K_i,\ i = \overline{1, n};\ F'[\bar{h}] = 0_{B_F};\ f'(\alpha)[\bar{h}] \leqslant -\delta,\ \alpha \in A. \tag{2}$$

Отсюда следует, что при некоторых $\gamma_i > 0$

$$f_i(x_0) + \gamma_i f_i'[\bar{h}] \in \operatorname{int} M_i,\ i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Обозначим $\gamma_0 = \min\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, $h_0 = \gamma_0 \bar{h}$. Согласно (2) $h_0 \in \ker F'$, а поскольку $F'B = B_F$, то по теореме Люстерника элемент $h_0$ лежит в касательном подпространстве к множеству $\{x \in B : F(x) = 0_{B_F}\}$, т. е. $\forall \varepsilon > 0$ существует $r(\varepsilon) \in B$ такое, что $\varepsilon^{-1}\|r(\varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и $F(x_0 + \varepsilon h_0 + r(\varepsilon)) = 0_{B_F}$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$. Возьмем $h(\varepsilon) = h_0 + \varepsilon^{-1} r(\varepsilon) \in B$. Тогда

$$F(x_0 + \varepsilon h(\varepsilon)) = F(x_0 + \varepsilon h_0 + r(\varepsilon)) = 0_{B_F},\ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]. \tag{4}$$

Далее, для $i = \overline{1, n}$ имеем

$$\left.\begin{aligned} f_i(x_0 + \varepsilon h(\varepsilon)) - f_i(x_0) &= f_i'[\varepsilon h(\varepsilon)] + o_i(\varepsilon h(\varepsilon)) = \\ &= \varepsilon f_i'[h_0] + f_i'[r(\varepsilon)] + o_i(\varepsilon h_0 + r(\varepsilon)) = \varepsilon(f_i'[h_0] + \sigma_i(\varepsilon)) \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

где

$$\sigma_i(\varepsilon) = f_i'\left[\frac{r(\varepsilon)}{\varepsilon}\right] + \frac{o_i(\varepsilon h_0 + r(\varepsilon))}{\varepsilon}.$$

Но $f_i'[\varepsilon^{-1} r(\varepsilon)] \to 0_{X_i}$ при $\varepsilon \to 0$ ввиду непрерывности операторов $f_i'$. Кроме того, согласно лемме 1

$$\varepsilon^{-1} o_i(\varepsilon h_0 + r(\varepsilon)) = \|h_0 + \varepsilon^{-1} r(\varepsilon)\| \frac{o_i(\varepsilon h_0 + r(\varepsilon))}{\|\varepsilon h_0 + r(\varepsilon)\|} \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0_{X_i},$$

поскольку при малых $\varepsilon$ $\|h_0 + \varepsilon^{-1} r(\varepsilon)\| \leqslant c = \|h_0\| + 1$. Следовательно, $\sigma_i(\varepsilon) \to 0_{X_i}$ при $\varepsilon \to 0$.

Из (3) имеем $f_i'[h_0] \in \operatorname{int} M_i - f_i(x_0)$, а т. к. множества $(\operatorname{int} M_i - f_i(x_0))$ открыты, то при малых $\varepsilon$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$, одновременно для всех $i = \overline{1, n}$ будет

$$f_i'[h_0] + \sigma_i(\varepsilon) \in \operatorname{int} M_i - f_i(x_0).$$

Отсюда с учетом (5) получим, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_1, 1\}$

$$f_i(x_0 + \varepsilon h(\varepsilon)) \in \operatorname{int} M_i, \ i = \overline{1, n}. \tag{6}$$

Согласно (2)

$$f(\alpha, x_0 + \varepsilon h(\varepsilon)) - f(\alpha, x_0) = \varepsilon\gamma_0 f'(\alpha)[\bar{h}] + \\ + o(\alpha, \varepsilon h(\varepsilon)) \leqslant -\varepsilon[\gamma_0\delta - \varepsilon^{-1} o(\alpha, \varepsilon h(\varepsilon))],$$

а т. к. оператор $f(\alpha, x)$ дифференцируем равномерно по $\alpha \in A$, то при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_3 \leqslant \varepsilon_2$

$$f(\alpha, x_0 + \varepsilon h(\varepsilon)) \leqslant f(\alpha, x_0) - \frac{\varepsilon\gamma_0\delta}{2} < f(\alpha, x_0) \leqslant 0, \ \alpha \in A. \tag{7}$$

Аналогично можно показать, что при малых $\varepsilon$, $\varepsilon \leqslant \varepsilon_4 \leqslant \varepsilon_3$,

$$f_0(x_0 + \varepsilon h(\varepsilon)) < f_0(x_0). \tag{8}$$

Из соотношений (4), (6), (7) следует, что при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_4$ $x_0 + \varepsilon h(\varepsilon) \in S$, а (8) противоречит оптимальности элемента $x_0$. Лемма доказана.

Построим теперь множество

$$G = \bigcup_{h \in B} \left\{ (r_0, x_1, \ldots, x_n, y, \varphi(\alpha)) \in E: \begin{array}{l} r_0 < f_0'[h], \ x_i \in f_i'[h] + K_i, \\ y = F'[h], \ \varphi(\alpha) < f'(\alpha)[h] \end{array} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $K \cap G = \varnothing$. Действительно, если предположить противное, то существует элемент $(r_0, x_1, \ldots, x_n, y, \varphi(\alpha)) \in K \cap G$. Следовательно, найдутся такие $h_1$, $h_2 \in B$, что выполняются соотношения

$$r_0 = f_0'[h_1], \ x_i = f_i'[h_1], \ y = F'[h_1], \ \varphi(\alpha) = f'(\alpha)[h_1];$$

$$r_0 < f_0'[h_2], \ x_i \in f_i'[h_2] + K_i, \ y = F'[h_2], \ \varphi(\alpha) < f'(\alpha)[h_2].$$

Отсюда, обозначив $h_3 = h_1 - h_2 \in B$, получаем

$$f_0'[h_3] < 0, \ f_i'[h_3] \in K_i, \ F'[h_3] = 0_{B_F}, \ f'(\alpha)[h_3] < 0.$$

Поэтому $\Lambda(h_3) \in K'$, т. е. $K \cap K' \neq \varnothing$, что противоречит утверждению леммы 2. В итоге имеем $K \cap G = \varnothing$. Далее, если элементы

$$(r_0^1, x_1^1, \ldots, x_n^1, y^1, \varphi^1(\alpha)), \ (r_0^2, x_1^2, \ldots, x_n^2, y^2, \varphi^2(\alpha)) \in G,$$

то найдутся такие $h_1$, $h_2 \in B$, что

$$r_0^1 < f_0'[h_1], \ x_i^1 \in f_i'[h_1] + K_i, \ y^1 = F'[h_1], \ \varphi^1(\alpha) < f'(\alpha)[h_1];$$

$$r_0^2 < f_0'[h_2], \ x_i^2 \in f_i'[h_2] + K_i, \ y^2 = F'[h_2], \ \varphi^2(\alpha) < f'(\alpha)[h_2].$$

Взяв тогда $h_3 = \theta h_1 + (1-\theta) h_2$, где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, получим ввиду линейности производных Фреше и выпуклости $K_i$:

$$\theta r_0^1 + (1-\theta) r_0^2 < f_0'[h_3], \ \theta x_i^1 + (1-\theta) x_i^2 \in f_i'[h_3] + K_i,$$

$$\theta y^1 + (1-\theta) y^2 = F'[h_3], \ \theta\varphi^1(\alpha) + (1-\theta)\varphi^2(\alpha) < f'(\alpha)[h_3],$$

т. е.

$$\theta(r_0^1, x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1, y^1, \varphi^1(\alpha)) + (1-\theta)(r_0^2, x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2, y^2, \varphi^2(\alpha)) \in G.$$

Следовательно, множество $G$ выпукло.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 3. *Для каждого $i = \overline{1, n}$ существует окрестность нуля $V_i \subset X_i$ такая, что* $\operatorname{int}[\bigcap_{\xi \in V_i} (\xi + K_i)] \neq \varnothing$.

Доказательство. Зафиксируем $i \in \{1, \ldots, n\}$. Возьмем произвольную точку $x \in K_i$. Так как $K_i$ открыто, то найдется окрестность точки $x$ $U_x \subset K_i$. Тогда $U_0 = U_x - x$ будет окрестностью нуля. Для нее [7] можно найти окрестность нуля $V_0$ такую, что

$$V_0 + V_0 \subset U_0. \tag{9}$$

Обозначим $V_x = V_0 + x$, $V_i = -V_0$. Возьмем произвольные элементы $z \in V_x$ и $\xi \in V_i$. Очевидно, $z \in x + V_0$, а поскольку $-\xi \in V_0$, то согласно (9)

$$z - \xi \in x + U_0 = U_x \subset K_i.$$

Отсюда $z \in \xi + K_i$. Ввиду произвольности $\xi \in V_i$ $z \in \bigcap\limits_{\xi \in V_i} (\xi + K_i)$, а из произвольности $z \in V_x$ получаем $V_x \subset \bigcap\limits_{\xi \in V_i} (\xi + K_i)$, что и требовалось. Лемма доказана.

Построим множества

$$S_0 = \{h \in B : \|h\| < 1\}, \; S_i = (f_i')^{-1}[V_i], \; i = \overline{1, n}.$$

Из непрерывности $f_i'$ все $S_i$, $i = \overline{0, n}$, открыты. Тогда $\overline{S} = \bigcap\limits_{i=0}^{n} S_i$ также открыто. Зададим теперь множество

$$G_0 = \left\{ (r_0, x_1, \ldots, x_n, y, \varphi(\alpha)) \in E : \begin{array}{l} r_0 < -l_0, \; x_i \in \bigcap\limits_{h \in \overline{S}} (f_i'[h] + K_i) \\ y \in F'\overline{S}, \; \varphi(\alpha) < -l(\alpha) \end{array} \right\},$$

где $l_0 = \|f_0'\|$, $l(\alpha) = \|f'(\alpha)\|$. С учетом того факта, что $F'B = B_F$, множество $\{y \in B_F : y \in F'\overline{S}\}$ открыто в $B_F$ согласно теореме об открытом отображении [1]. Очевидно, также открыты множества $\{r_0 \in R^1 : r_0 < -l_0\}$ и $\{\varphi(\alpha) \in C[A] : \varphi(\alpha) < -l(\alpha), \; \alpha \in A\}$. Отсюда и из леммы 3 получаем, что

$$\operatorname{int} G_0 \neq \varnothing. \tag{10}$$

Кроме того, если $(r_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, y, \varphi(\alpha)) \in G_0$, то существует такое $\overline{h} \in \overline{S}$, что

$$y = F'[\overline{h}]; \; x_i \in f_i'[\overline{h}] + K_i, \; i = \overline{1, n}. \tag{11}$$

При этом, поскольку $\|\overline{h}\| < 1$, то $-f_0'[\overline{h}] \leqslant l_0 \|\overline{h}\| \leqslant l_0$, т. е.

$$r_0 < -l_0 \leqslant f_0'[\overline{h}]. \tag{12}$$

Аналогично получаем

$$\varphi(\alpha) < f'(\alpha)[\overline{h}]. \tag{13}$$

Из (11) — (13) следует, что $(r_0, x_1, \ldots, x_n, y, \varphi(\alpha)) \in G$. Отсюда $G_0 \subset G$ и согласно (10) $\operatorname{int} G \neq \varnothing$.

В итоге выполнены все условия теоремы об отделимости для множеств $K$ и $G$, и согласно этой теореме и теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала над $C[A]$ найдется такой ненулевой набор из константы $\lambda_0$, функционалов $x_i^* \in X_i^*$, $y^* \in B_F^*$ и регулярной борелевской меры $\mu(\alpha)$, что

$$\lambda_0 r_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^*[x_i] + y^*[y] + \int_A \varphi(\alpha)\, d\mu(\alpha) \geqslant 0, \; (r_0, x_1, \ldots, x_n, y, \varphi(\alpha)) \in K, \tag{14}$$

$$\lambda_0 r_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i^*[x_i] + y^*[y] + \int_A \varphi(\alpha)\, d\mu(\alpha) \leqslant 0, \; (r_0, x_1, \ldots, x_n, y, \varphi(\alpha)) \in G. \tag{15}$$

Заметим, что $K' \subset G$ (достаточно в определении множества $G$ положить $h = 0_B$). Поэтому из (15) легко следует, что $\lambda_0 \geqslant 0$ и $x_i^* \in K_i^*$. Кроме того, из этого же

соотношения можно получить (см. [8], с. 133), что $\mu(\alpha)$ — положительная мера. Из (14) вытекает, что $\forall h \in B$

$$\lambda_0 f_0'[h] + \sum_{i=1}^{n} x_i^* f_i'[h] + y^* F'[h] + \int_A f'(\alpha)[h]\, d\mu(\alpha) \geqslant 0.$$

Отсюда ввиду произвольности $h$ получаем (1). Теорема полностью доказана.

## § 3. Замечания

Набор $\{\lambda_0, x_1^*, \ldots, x_n^*, y^*, \mu(\alpha)\}$, фигурирующий в условии теоремы 1, вообще говоря, может быть получен неоднозначно. При этом его можно выбрать таким образом, чтобы мера $\mu$ была сосредоточена на множестве

$$A_t = \{\alpha \in A : f(\alpha, x_0) \geqslant -t\}$$

для произвольного $t > 0$. Действительно, все предыдущие рассуждения можно было проводить в пространстве $E_t = R^1 \times X_1 \times \ldots \times X_n \times B_F \times C[A_t]$ (очевидно, $A_t$ — тоже компакт). Тогда останется лишь показать, что соотношение

$$f(\alpha, x_0 + \varepsilon h(\varepsilon)) \leqslant 0 \tag{16}$$

выполняется и для $\alpha \in A \setminus A_t$ (см. (7)). Но поскольку $\|\varepsilon h(\varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то при малых $\varepsilon$ (16) следует из равномерной дифференцируемости оператора $f(\alpha, x)$. Отметим также, что $x_i^* = 0_{X_i^*}$ для каждого номера $i$, при котором

$$f_i(x_0) \in \operatorname{int} M_i, \tag{17}$$

поскольку в этом случае $K_i = X_i$, т. е. $K_i = \{0_{X_i^*}\}$.

Учитывая эти факты, несложно в дополнение к теореме 1 доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 1, *причем оператор $F$ регулярен в точке $x_0$, т. е.*

$$F'B = B_F. \tag{18}$$

*Будем для определенности считать, что* (17) *не выполняется для $i = \overline{1, m}$, $m \leqslant n$. Предположим, что существует $h_0 \in B$ такое, что при некотором $t > 0$*

$$f_i'[h_0] \in K_i,\ i = \overline{1, m};\ f_i'(\alpha)[h_0] < 0,\ \alpha \in A_t;\ F'[h_0] = 0_{B_F}. \tag{19}$$

*Тогда $\lambda_0 > 0$, и следовательно, можно считать $\lambda_0 = 1$.*

Доказательство. Предположим, что $\lambda_0 = 0$. Из (1) получаем

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* f_i' + y^* F' + \int_{A_t} f'(\alpha)\, d\mu(\alpha) = 0_{B^*}. \tag{20}$$

Тогда либо $\mu \neq 0$, либо существует номер $j \in \{1, \ldots, m\}$ такой, что $x_j^* \neq 0_{X_j^*}$. Действительно, если предположить противное, то

$$y^* F' = 0_{B^*}. \tag{21}$$

Но т. к. набор $\{\lambda_0, x_1^*, \ldots, x_n^*, y^*, \mu(\alpha)\}$ ненулевой, то $y^* \neq 0_{B_F^*}$, т. е. при некотором $y \in B_F$ будет $y^*[y] \neq 0$. Согласно (18) найдется $x \in B : F'[x] = y$. Отсюда $y^* F'[x] \neq 0$, что противоречит (21). Поэтому из (19) получаем

$$\sum_{i=1}^{m} x_i^* f_i'[h_0] + y^* F'[h_0] + \int_{A_t} f'(\alpha)[h_0]\, d\mu(\alpha) < 0,$$

что противоречит (20). Следовательно, $\lambda_0 > 0$, что и требовалось доказать.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М., 1974. 479 с.
2. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М., 1969. 151 с.
3. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М., 1979. 429 с.
4. Плотников В. И. Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида.— ДАН СССР, 1971, т. 199, № 2, с. 275—278.
5. Плотников В. И. Необходимые и достаточные условия оптимальности и условия единственности оптимизирующих функций для управляемых систем общего вида.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1972, т. 36, № 3, с. 652—679.
6. Казимиров В. И., Плотников В. И., Старобинец И. М. Метод вариаций для экстремальных задач общего вида.— Препринт ИПФ АН СССР. Горький, 1982, № 44. 22 с.
7. Робертсон А. П., Робертсон В. Дж. Топологические векторные пространства. М., 1967. 257 с.
8. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М., 1977. 622 с.

г. Горький

Поступила
27.09.1983