А. П. Осколков, М. М. Ахматов, Сходящиеся разностные схемы для уравнений фильтрации жидкости с запаздыванием, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1986, том 152, 86–93

А.П.Осколков, М.М.Ахматов

СХОДЯЩИЕСЯ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ ЖИДКОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

I. Фильтрацией вязкой жидкости с запаздыванием называется такое движение вязкой жидкости в пористой среде, при котором скорость $v(x,t)$ и давление $p(x,t)$ подчиняются реологическому закону Ларси с запаздыванием [I]-[3]:

$$\sum_{\ell=0}^{L} \alpha_\ell \frac{\partial^\ell \vec{v}}{\partial t^\ell} = \sum_{m=0}^{M} \varkappa_m \frac{\partial^m \nabla p}{\partial t^m} ; \qquad (I)$$

при этом, как и в теории линейных вязкоупругих жидкостей [3]-[5], числа L и M связаны одним из трех условий:

либо $M=L-1$, $L=1,2,\ldots$ - это фильтрация типа Максвелла порядка L ;
либо $M=L=1,2,\ldots$ - это фильтрация типа Олдройта порядка L ;
либо $M=L+1$, $L=0,1,2,\ldots$ - это фильтрация типа Кельвина-Фойгта порядка L .

Коэффициенты λ_ℓ , $\lambda_\ell>0$, $\ell=1,\ldots,L$, называются временами релаксации скорости, а коэффициенты $\varkappa_m$, $\varkappa_m>0$, $m=0,1,\ldots,M$ - проведенными временами запаздывания давления.

2. В работе авторов [I] показано, что нестационарная фильтрация вязкой слабосжимаемой жидкости в упругодеформируемой однородной пористой среде с запаздыванием типа Максвелла порядка $L=1,2,\ldots$, типа Олдройта $L=1,2,\ldots$ и типа Кельвина-Фойгта порядка $L=0,1,2,\ldots$ описывается соответственно следующими интегродифференциальными уравнениями:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \varkappa \int_0^t K_1(t-\tau)\Delta p\, d\tau = 0, \quad \varkappa>0 ; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \varkappa\Big(\mu_0^{(2)}\Delta p + \int_0^t K_2(t-\tau)\Delta p\, d\tau\Big) = 0, \ \varkappa>0, \quad \mu_0^{(2)} = \varkappa_L \cdot \lambda_L^{-1} ; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \varkappa\Big(\mu_1 \frac{\partial \Delta p}{\partial t} + \mu_0^{(3)}\Delta p + \int_0^t K_3(t-\tau)\Delta p\, d\tau\Big) = 0, \varkappa>0, \mu_1 = \varkappa_{L+1}\cdot\lambda_L^{-1}, \mu_0^{(3)} = (\varkappa_L - \mu_1\lambda_{L-1})\lambda_L^{-1} \qquad (4)$$

В уравнениях (2)-(4) ядра $K_i(t)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\sum_{\ell=0}^{L}\lambda_\ell\frac{\partial^\ell K_i}{\partial t^\ell}=0,\quad t>0,\quad L=1,2,\ldots,\quad i=1,2,3\ , \tag{5}$$

и начальным условием Коши

$$\sum_{\ell=0}^{n}\lambda_{L-n+\ell}\frac{\partial^\ell K_i}{\partial t^\ell}(0)=\varkappa_{L-n-1}-\mu_1\lambda_{L-n-2}\delta_{3i}-\mu_0^{(i)}\lambda_{L-n-1}(1-\delta_{1i})\ ,$$
$$n=0,1,\ldots,L-1\ ;\qquad i=1,2,3\ , \tag{6}$$

в которых $\lambda_{-1}=0$, δ_{ij} – символ Кронекера, а μ_1 и $\mu_0^{(i)}$, $i=2,3$, определены в (3) и (4). По поводу коэффициента $\varkappa$ см. [2], [3].

3. В [I] показано, далее, что если в уравнениях (2)-(4) ввести новые неизвестные функции $q_i(x,t)$ при помощи уравнений

$$\sum_{s=0}^{L-1}\alpha_s^{(i)}\frac{\partial^s q_i}{\partial t^s}=\int_0^t K_i(t-\tau)\,p\,d\tau,\quad \alpha_0^{(i)}=1;\quad \sum_{s=0}^{L}\gamma_s^{(i)}\frac{\partial^s q_i}{\partial t^s}=p\,;\ i=1,2,3\ , \tag{7}$$

в которых коэффициенты $\{\alpha_s^{(i)}\}$, $s=1,2,\ldots,L-1$ и $\{\gamma_s^{(i)}\}$, $s=0,1,\ldots,L$, находятся из алгебраической системы уравнений

$$\alpha_0^{(i)}=1;\ \sum_{p-j+s-1=\ell}\lambda_p\frac{\partial^j K_i(0)}{\partial t^j}\gamma_s^{(i)}=\sum_{p+j=\ell}\lambda_p\alpha_j^{(i)},\ \ell=0,1,\ldots,2L-1;\ i=1,2,3\ , \tag{8}$$

то уравнения (2)-(4) сводятся соответственно к следующим трем системам дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial p}{\partial t}-\varkappa\Delta\sum_{\ell=0}^{L-1}\alpha_\ell^{(1)}\frac{\partial^s q_1}{\partial t^s}=0,\qquad p=\sum_{\ell=0}^{L}\gamma_\ell^{(1)}\frac{\partial^\ell q_1}{\partial t^\ell}\ ; \tag{9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}-\varkappa(\mu_0^{(2)}\Delta p+\Delta\sum_{\ell=0}^{L-1}\alpha_\ell^{(2)}\frac{\partial^\ell q_2}{\partial t^\ell})=0,\ \ p=\sum_{\ell=0}^{L}\gamma_\ell^{(2)}\frac{\partial^\ell q_2}{\partial t^\ell}\ ; \tag{10}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}-\varkappa(\mu_1\frac{\partial\Delta p}{\partial t}+\mu_0^{(3)}\Delta p+\Delta\sum_{\ell=0}^{L-1}\alpha_\ell^{(3)}\frac{\partial^\ell q_3}{\partial t^\ell})=0,\ p=\sum_{\ell=0}^{L}\gamma_\ell^{(3)}\frac{\partial^\ell q_3}{\partial t^\ell}\ . \tag{11}$$

4. Исключая в системах (9)-(II) давление $p(x,t)$, мы получим, что нестационарная фильтрация с запаздыванием вязкой слабо-

сжимаемой жидкости в упругодеформируемой однородной пористой среде описывается уравнением

$$\sum_{\ell=0}^{L} \alpha_\ell \frac{\partial^{\ell+1} q}{\partial t^{\ell+1}} - \sum_{m=0}^{M} \beta_m \frac{\partial^m \Delta q}{\partial t^m} = f(x,t), \qquad \alpha_\ell, \beta_m > 0 , \tag{I2}$$

в котором либо $M=L-1$, $L=1,2,\ldots$ (фильтрация типа Максвелла), либо $M=L=1,2,\ldots$ (фильтрация типа Олдройта), либо $M=L+1$, $L=0,1,2,\ldots$ (фильтрация типа Кельвина - Фойгта). Уравнение (I2) решается в $Q_T=\Omega\times(0,T$, $\Omega\subset E^n$, $n=1,2,3$, $0<T<\infty$, при начальных условиях Коши

$$\left.\frac{\partial^s q}{\partial t^s}\right|_{t=0} = 0, \quad s=0,1,\ldots,L-1; \quad \left.\frac{\partial^L q}{\partial t^L}\right|_{t=0} = q_0(x), \quad x\in\Omega , \tag{I3}$$

и одном из краевых условий [I]-[3] :

$$\left.\sum_{\ell=0}^{L} \alpha \frac{\partial^\ell q}{\partial t^\ell}\right|_{\partial Q_T} = 0, \qquad q_0\Big|_{\partial\Omega} = 0 , \tag{I4}$$

либо

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\sum_{m=0}^{M} \beta_m \frac{\partial^m q}{\partial t^m}\right|_{\partial Q_T} = 0, \qquad \left.\frac{\partial q_0}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0 . \tag{I5}$$

5. Теория разрешимости начально-краевых задач (I2)-(I4) и (I2), (I4), (I5) при $M=L-1$ аналогична теории разрешимости смешанных задач для гиперболических уравнений [6], при $M=L$ - теории разрешимости смешанных задач для эволюционных уравнений с сильной диссипацией [7], при $M=L+1$ - теории разрешимости начально-краевых задач для псевдопараболических уравнений [4], [5], [8], [9]. Для начально-краевой задачи (I2)-(I4) эти результаты содержатся в следующих теоремах [I], [5], [9].

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия: $M=L-1$, $L=1,2,\ldots$; $\partial\Omega\in C^2$; $q_0(x)\in \mathring{W}_2^1(\Omega)$; f, $f_t\in L_{2,1}(Q_T)$. Тогда смешанная задача (I2)-(I4) имеет единственное решение $q(x,t)$, у которого $\frac{\partial^{L+1} q}{\partial t^{L+1}}$, $\frac{\partial^{L+1} q}{\partial t^L \partial x}\in L_2(Q_T)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия: $M=L=1,2,\ldots$; $\partial\Omega\in C^2$; $q_0(x)\in W_{2,0}^2(\Omega)$; $f, f_t\in L_{2,1}(Q_T)$. Тогда смешанная задача (I2)-(I4) имеет единственное решение $q(x,t)$, у которого $\frac{\partial^{L+2} q}{\partial t^{L+1}\partial x}\in L_2(Q_T)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия: $M=L+1$, $L=0,1,2,\ldots$; $\partial\Omega\in C^{2+\alpha}$; $0<\alpha<1$; $q_0(x)\in C^{2+\alpha}(\bar\Omega)$; $f\in L_\infty(0,T;C^\alpha(\bar\Omega))$, $f_t\in L_{2,1}(Q_T)$. Тогда начально-краевая задача (I2)-(I4) имеет единственное решение $q(x,t)\in W_\infty^{L+1}(0,T;C^{2+\alpha}(\bar\Omega))$.

6. Наибольший интерес для практики в настоящее время имеют фильтрация типа Максвелла и типа Олдройта порядка $L=1$ и фильтрация типа Кельвина-Фойгта порядка $L=0$ [2],[3].

7. Фильтрация типа Максвелла порядка $L=1$ описывается начально-краевыми задачами (I2)-(I4) и (I2),(I3),(I5) для волнового уравнения с диссипацией. Конечно-разностные схемы для таких задач хорошо известны [6],[I0].

8. Фильтрация типа Олдройта порядка $L=1$ описывается начально-краевыми задачами (I2)-(I4) и (I2), (I3), (I5) для эволюционного уравнения с сильной диссипацией [7]. Для таких задач могут быть построены неявные конечноразностные схемы, близкие известным неявным схемам для волнового уравнения [6],[I0], решения которых сходятся к точным решениям изучаемых начально-краевых задач (I2)-(I4) и (I2), (I3), I5) при любом соотношении между шагами Δt и Δx_i. Например, для задачи (I2)-(I4) при $M=L=1$ эта схема в обозначениях 6, гл.УI, § I0 имеет вид

$$\alpha_1 q^{\ell}_{h t\bar t}+\alpha q^{\ell+1}_{h\bar t}-\beta_1 q^{\ell+1}_{h x_k \bar x_k \bar t}-\beta_0 q^{\ell+1}_{h x_k \bar x_k}=f^{\ell+1}_h,\quad x\in\Omega_h,\ \ell=1,\dots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right], \qquad (I6)$$

$$q^0_h=0,\ q^1_h=\Delta t\, q_{0h},\ x\in\Omega_h;\quad \left(\alpha_0 q^{\ell}_h+\alpha_1 q^{\ell}_{h\bar t}\right)\Big|_{\partial\Omega_h}=0,\quad \ell=1,\dots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right] \qquad (I7)$$

Устойчивость разностной схемы (5)-(6) и сходимость ее решений к точному решению задачи (I2)-(I4) в пространстве $V(Q_T)$ с нормой $\|q\|^2_V=\max\limits_{0\le t\le T}\|q_t\|^2_{2,\Omega}+\iint\limits_{Q_T}\left|\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial t}\right|^2 dx\,dt$ следует из энергетической оценки

$$\|q^m_{h\bar t}\|^2_{2,\Omega_h}+\|q^m_{hx}\|^2_{2,\Omega_h}+\Delta t\sum_{\ell=1}^{m}\left(\|q^{\ell}_{h\bar t}\|^{(1)}_{2,\Omega_h}\right)^2\le c\left[\|q_{0h}\|^2_{2,\Omega_h}+\left(\Delta t\sum_{\ell=1}^{m}\|f^{\ell}_h\|^2_{2,\Omega_h}\right)^2\right], \qquad (I8)$$

$$m=1,\dots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right].$$

9. В [I] показано (см.также п.3), что фильтрация типа Олдройта порядка $L=1$ может быть также описана системой дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial t}-\mu\Delta p-\varkappa\Delta q=g(x),\qquad p=\alpha\frac{\partial q}{\partial t}+\beta q,\quad \varkappa,\mu,\alpha,\beta>0; \qquad (I9)$$

которая решается в Q_T при начальных условиях Коши

$$p\big|_{t=0}=p_0(x),\qquad q\big|_{t=0}=0,\quad x\in\Omega, \qquad (20)$$

и одном из краевых условий: либо

$$p\big|_{\partial Q_T}=q\big|_{\partial Q_T}=0,\qquad p_0\big|_{\partial\Omega}=0. \qquad (2I)$$

либо

$$\frac{\partial}{\partial n}(\mu p + \varkappa q)\Big|_{\partial Q_T} = 0\,, \qquad \frac{\partial P_0}{\partial n}\Big|_{\partial \Omega} = 0\,. \tag{22}$$

Для начально-краевых задач (19)-(21) и (19), (20), (22) могут быть построены неявные конечно-разностные схемы и схемы переменных направлений, близкие известным схемам для уравнения теплопроводности [6],[10], решения которых сходятся к решениям задач (19)-(21) и (19), (20), (22) при любом соотношении между Δt и Δx_i. Например, для задачи (19)-(21) неявная разностная схема в обозначениях [6], гл.VI, § 9 имеет вид

$$P^{\ell}_{h\bar t} - \mu P^{\ell}_{h x_k \bar x_k} - \varkappa q^{\ell}_{h x_k \bar x_k} = f^{\ell}_h\,, \quad P^{\ell}_h = \alpha q^{\ell}_{h\bar t} + \beta q_h\,, \quad x \in \Omega_h\,, \ \ell = 1,\dots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right], \tag{23}$$

$$P^{0}_h = P_{0h}\,, \quad q^{0}_h = 0\,, \quad x \in \Omega_h\,; \quad P^{\ell}_h\Big|_{\partial\Omega_h} = q^{\ell}_h\Big|_{\partial\Omega_h} = 0\,, \tag{24}$$

а схема переменных направлений имеет следующий вид:

$$P^{\ell+\frac{s}{n}}_{h\bar t} - \mu P^{\ell+\frac{s}{n}}_{h x_s \bar x_s} - \varkappa q^{\ell+\frac{s}{n}}_{h x_s \bar x_s} - 2\sum_{r=1}^{s-1}\Big(\mu P^{\ell+\frac{r}{n}}_h + \varkappa q^{\ell+\frac{r}{n}}_h\Big)_{x_r \bar x_s} = \frac{1}{n} f^{\ell+\frac{s}{n}}_h\,, \quad P^{\ell+\frac{s}{n}}_h = \alpha q^{\ell+\frac{s}{n}}_{h\bar t} + \beta q^{\ell+\frac{s}{n}}_h\,, \tag{25}$$

$$x \in \Omega_h\,, \quad s = 1,\dots,n\,; \qquad \ell = 0,1,\dots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right] - 1\,,$$

$$P^{0}_h = P_{0h}\,, \quad q^{0}_h = 0\,, \quad x \in \Omega_h\,; \quad P^{\ell+\frac{s}{n}}_h\Big|_{\partial\Omega_h} = q^{\ell+\frac{s}{n}}_h\Big|_{\partial\Omega_h} = 0\,, \quad s = 1,\dots,n\,. \tag{26}$$

Для решений задачи (23), (24) сираведлива энергетическая оценка

$$\left\| P^m_h \right\|^2_{2,\Omega_h} + \varkappa\alpha \left\| q^m_{hx} \right\|^2_{2,\Omega_h} + 2\mu\Delta t \sum_{\ell=1}^{m} \left\| P^{\ell}_{hx} \right\|^2_{2,\Omega_h} + 2\varkappa\beta\Delta t \sum_{\ell=1}^{m} \left\| q^{\ell}_{hx} \right\|^2_{2,\Omega_h} +$$

$$+ (\Delta t)^2 \sum_{\ell=1}^{m} \Big(\left\| P^{\ell}_{h\bar t} \right\|^2_{2,\Omega_h} + \varkappa\alpha \left\| q^{\ell}_{hx\bar t} \right\|^2_{2,\Omega_h} \Big) \le 2 \left\| P_{0h} \right\|^2_{2,\Omega_h} +$$

$$+ 5\Big(\Delta t \sum_{\ell=1}^{m} \left\| f^{\ell}_h \right\|_{2,\Omega_h} \Big)^2, \qquad m = 1,\dots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right], \tag{27}$$

из которой следует устойчивость разностной схемы (23), (24) и сходимость ее решений (P_h, q_h) к решению (p, q) задачи (19)-(21)

в пространстве $W_2^{1,0}(Q_T)\times Y(Q_T)$, $\|q\|_V^2 = \max_{0\le t\le T}\|q_t\|^2_{2,\Omega} + \iint_{Q_T} q_{xt}^2\,dx\,dt$.

Для решений задачи (25), (26) справедлива оценка

$$\|P_h^{m+1}\|^2_{2,\Omega_h} + \varkappa\sum_{s=1}^{n}\|q^{m+1}_{hx_s}\|^2_{2,\Omega_h} + \Delta t\sum_{k=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{n}\Big(\mu\|P^{k+\frac{\tau}{n}}_{hx_\tau}\|^2_{2,\Omega_h} +$$

$$+\varkappa\|q^{k+\frac{\tau}{n}}_{hx_\tau}\|^2_{2,\Omega_h}\Big) + \sum_{k=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{n}\Big(\mu\|P_h^{k+\frac{\tau}{n}} - P_h^{k+\frac{\tau-1}{n}}\|^2_{2,\Omega_h} + \varkappa\|q^{k+\frac{\tau}{n}}_{hx_\tau} - q^{k+\frac{\tau-1}{n}}_{hx_\tau}\|^2_{2,\Omega_h}\Big) \le$$

$$\le c(\mu^{-1},\alpha^{-1})\Big[\|P_{0h}\|^2_{2,\Omega_h} + \Delta t\sum_{k=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{n}\|f_h^{k+\frac{\tau}{n}}\|^2_{2,\Omega_h}\Big],\quad m=0,1,\ldots,\Big[\frac{T}{\Delta t}\Big]-1, \tag{28}$$

с помощью которой доказывается сходимость решений (P_h, q_h) к гладкому решению задачи (19)-(21) в норме, определяемой левой частью (28). [6].

10. В [1] показано (см.также п.3), что фильтрация типа Кельвина-Фойгта порядка $L=0$ и $L=1$ описывается также начально-краевыми задачами

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial t} - \mu\Delta p - \mu_1\frac{\partial\Delta p}{\partial t} = f(x,t),\quad \mu,\mu_1>0,\ (x,t)\in Q_T,\quad p|_{t=0} = p_0(x),\ x\in\Omega,\\ &\qquad p|_{\partial Q_T} = 0\quad \Big(\text{или}\ \frac{\partial p}{\partial n}\Big|_{\partial Q_T} = 0\Big)\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

и

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial t} - \mu\Delta p - \mu_1\frac{\partial\Delta p}{\partial t} - \varkappa\Delta q = f(x,t),\quad p = \alpha\frac{\partial q}{\partial t} + \beta q,\quad \varkappa,\mu,\mu_1,\alpha,\beta>0;\ (x,t)\in Q_T,\\ &p|_{t=0} = p_0(x),\ q|_{t=0} = 0,\ x\in\Omega;\ p|_{\partial Q_T} = q|_{\partial Q_T} = 0\Big(\text{или}\ \frac{\partial}{\partial n}\Big(\mu_1\frac{\partial p}{\partial t} + \mu p + \varkappa q\Big)\Big|_{\partial Q_T} = 0\Big).\end{aligned}\right\}\tag{30}$$

Для задачи (29) построены устойчивые сходящиеся при любом соотношении между Δt и Δx_i неявная конечно-разностная схема и схема переменных направлений; в случае краевого условия $p|_{\partial Q_T} = 0$ они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}&P^{\ell+1}_{h\bar t} - \mu_1 P^{\ell+1}_{h\bar t x_k\bar x_k} - \mu P^{\ell+1-\gamma}_{hx_k\bar x_k} = f_h^{\ell+1},\quad \gamma=0,1;\ x\in\Omega_h,\ \ell=0,1,\ldots,\Big[\frac{T}{\Delta t}\Big]-1,\\ &P_h^0 = P_{0h},\quad x\in\Omega_h;\qquad P_h^{\ell+1}\big|_{\partial\Omega_h} = 0;\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}&P_{h\bar t}^{l+\frac{s}{n}} - \mu_1 P_{h\bar t x_s \bar x_s}^{l+\frac{s}{n}} - \mu P_{h x_s \bar x_s}^{l+\frac{s}{n}-\gamma} - 2\sum_{r=1}^{s-1}\left(\mu_1 P_{h x_r \bar x_s \bar t}^{l+\frac{r}{n}} + \mu P_{h x_r \bar x_s}^{l-\frac{r}{n}-\gamma}\right) = \\ &= \frac{1}{h} f^{l+\frac{s}{n}}, \quad \gamma = 0,1; \quad s = 1,\dots,n; \\ &P_h^0 = P_{0h}, \; x \in \Omega_h; \; P_h^{l+\frac{s}{n}}\Big|_{\partial\Omega_h} = 0; \; l = 0,1,\dots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right]-1\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Для задачи (30) также построены устойчивые сходящиеся при любом соотношении между Δt и Δx_i неявная конечно-разностная схема и схема переменных направлений:

$$\left.\begin{aligned}&P_{h\bar t}^{l+1} - \mu_1 P_{h\bar t x_k \bar x_k}^{l+1} - \mu P_{h x_k \bar x_k}^{l+1-\gamma} - \varkappa q_{h x_k \bar x_k}^{l+1} = f_h^{l+1}, \; P_h^{l+1} = \alpha q_{h\bar t}^{l+1} + \beta q_h^{l+1}, \; \gamma = 0,1; \; x \in \Omega_h, \\ &P_h^0 = P_{0h}, \; q_h^0 = 0, \; x \in \Omega_h; \; P_h^{l+1}\Big|_{\partial\Omega_h} = q_h^{l+1}\Big|_{\partial\Omega_h} = 0, \; l = 0,1,\dots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right]-1\end{aligned}\right\} (33)$$

$$\left.\begin{aligned}&P_{h\bar t}^{l+\frac{s}{n}} - \mu_1 P_{h\bar t x_s \bar x_s}^{l+\frac{s}{n}} - \mu P_{h x_s \bar x_s}^{l+\frac{s}{n}-\gamma} - \varkappa q_{h x_s \bar x_s}^{l+\frac{s}{n}} - 2\sum_{r=1}^{s-1}\left(\mu_1 P_{h\bar t x_r \bar x_s}^{l+\frac{r}{n}} + \mu P_{h x_r \bar x_s}^{l+\frac{r}{n}-\gamma} - \varkappa q_{h x_r \bar x_s}^{l+\frac{r}{n}}\right) = \\ &= \frac{1}{h} f_h^{l+\frac{s}{n}}, \; P_h^0 = P_{0h}, q_h^0 = 0, x \in \Omega_h; \; P_h^{l+\frac{s}{n}}\Big|_{\partial\Omega_h} = 0, \; \gamma = 0,1; \; s = 1,\dots,n; \; l = 0,1,\dots \\ &\dots, \left[\frac{T}{\Delta t}\right]-1.\end{aligned}\right\} (34)$$

Сходимость решений разностных задач (31), (32) и (33), (34) к решениям начально-краевых задач (29) и (30) следует из соответствующих энергетических оценок. Например, для решения разностной задачи (31) справедлива оценка

$$\left(\|P_h^m\|_{2,\Omega_h}^{(1)}\right)^2 + \Delta t \sum_{l=1}^{m} \|P_{hx}^l\|_{2,\Omega_h}^2 \leqslant C\left[\left(\|P_{0h}\|_{2,\Omega_h}^{(1)}\right)^2 + \left(\Delta t \sum_{l=1}^{m} \|f_h^l\|_{2,\Omega_h}\right)^2\right], m = 1,\dots,\left[\frac{T}{\Delta t}\right], \quad (35)$$

а для решений разностной задачи (34) верна оценка

$$\left(\|P_h^{m+1}\|_{2,\Omega_h}^{(1)}\right)^2 + \sum_{s=1}^{n} \|q_{hx_s}^{m+1}\|_{2,\Omega_h}^2 + \Delta t \sum_{k=0}^{m} \sum_{r=1}^{n} \left(\|P_{hx_r}^{k+\frac{r}{n}-\gamma}\|_{2,\Omega_h}^2 + \|q_{hx}^{k+\frac{r}{n}}\|_{2,\Omega_h}^2\right) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} \sum_{r=1}^{n} \left[\left(\|P_h^{k+\frac{r}{n}} - P_h^{k+\frac{r-1}{n}}\|_{2,\Omega_h}^{(1)}\right)^2 + \|q_{hx_r}^{k+\frac{r}{n}} - q_{hx_r}^{k+\frac{r-1}{n}}\|_{2,\Omega_h}^2\right] \leqslant$$

$$\leqslant C(\varkappa^{-1},\mu_1^{-1})\Big[\big(\|p_{oh}\|^{(1)}_{2,\Omega_h}\big)^2+\Delta t\sum_{k=0}^{m}\sum_{\tau=1}^{N}\|f_h^{k+\frac{\tau}{N}}\|^2_{2,\Omega_h}\Big],\ m=0,1,\dots,\Big[\frac{T}{\Delta t}\Big]-1. \quad (25)$$

Литература

1. О с к о л к о в А.П., А х м а т о в М. Корректные постановки начально-краевых задач для уравнений фильтрации жидкости с запаздыванием. – В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. УП. Зап.науч.семин.ЛОМИ, 1986, т.150, с.130–141.
2. О г и б а л о в М.П., М и р з а д ж а н з а д е А.Х. Механика процессов. М., Изд-во МГУ, 1976.
3. А к и л о в Ж.А. Нестационарные течения вязкоупругих жидкостей. Ташк., 1982.
4. О с к о л к о в А.П. О нестационарных течениях вязкоупругих жидкостей. – Тр.Мат.-ин-та АН СССР, 1983, т.159, с.101–131.
5. О с к о л к о в А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения вязко-упругих жидкостей. Автореф.докт.дисс., Л., 1983, 32 с.
6. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Краевые задачи математической физики. М., 1973.
7. К о ж а н о в А.И. Смешанная задача для некоторых нелинейных уравнений третьего порядка. – Матем.сб., 1982, т.118, № 4, с.504–522.
8. S h o w a l t e r R.E., T i n g T.W. Pseudo-parabolic partial differential equations. SIAM J.Math.Anal., 1970, v.1, p.45–67.
9. О с к о л к о в А.П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей. – В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 9. Зап. научн.семин.ЛОМИ, 1976, т.59, с.133–177.
10. С а м а р с к и й А.А. Введение в теорию разностных схем. М., 1982.

Oskolkov A.P., Akhmatov M.M. Convergent finite-difference schemes for the equations of filtration of fluids with delay.

Congergent finite-difference schemes for the equations of the filtration of different viscoelastic fluids are given.