

ОТОБРАЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР*П. Я. Грушко***Введение**

Геометрические структуры, определенные Чжэнем в [18], представляют редукции расслоения реперов дифференцируемого многообразия к линейной группе $G \subset GL(n)$. В его обзорной статье [19] приведено много задач из различных областей дифференциальной геометрии, которые могут быть сформулированы в рамках теории G -структур. В 60-е годы интенсивно изучался вопрос о том, когда структура локально изоморфна плоской G -структуре (проблема интегрируемости). Основные результаты принадлежат Стернбергу и Гиемину [29], [21]. Это составляет наиболее легкую часть общей проблемы эквивалентности Картана о локальном изоморфизме геометрических структур. Более широкий класс h -плоских структур, введенный в рассмотрение Молино, важный для теории контактных многообразий, был исследован Монна [20], [23]. Моримото в 1981 году рассмотрел эту проблему в «общей точке» [24].

Наиболее известными отображениями геометрических структур являются автоморфизмы и локальные автоморфизмы. При их рассмотрении характерен контраст между структурами конечного и бесконечного типа.

Аморес [13] изучал возможность продолжения инфинитезимальных автоморфизмов с открытых подмножеств на базу структуры конечного типа. Стернберг [12] показал, что группа автоморфизмов структуры конечного типа является группой Ли. В результате, изучение транзитивных структур конечного типа сводится к задачам из геометрии однородных пространств групп Ли. Особенно интересные исследования относятся к различного рода обобщениям римановых и аффинных симметрических пространств [9]. Локальные проблемы приводят к изучению пар алгебр Ли и их автоморфизмов конечного порядка [7], [2]. Если же структура имеет бесконечный тип, то резуль-

таты получаются в основном локальные и приводят к рассмотрению бесконечномерных фильтрованных алгебр Ли. Эти вопросы интенсивно исследовались в серии работ Кобаяси и Игано [22]. В частности, было показано, что алгебра Ли инфинитезимальных автоморфизмов локально транзитивной структуры в инволютивном случае содержит полную информацию о локальных свойствах структуры. В 1983 году Воляк определил понятие почти инфинитезимально транзитивной G -структуры и применил к исследованию структуры почти произведения многообразиях [30].

Понятие симметрии можно обобщить на произвольные метрические структуры. В работе автора [5] перечисляются все симметричные G -структуры ранга один в случае, когда первое продолжение группы G равно нулю. Другой класс так называемых изотропных структур описан в [4], где выясняется, что он близок классу двухточечно однородных римановых пространств.

Простейшим отображением, не имеющим обратного, является вложение, определяющее пару структур. В различных работах строились G -структуры на подмногообразиях пространства заданными фундаментальными группами. Особенно здесь следует отметить связь между контактными и симплектическими многообразиями [23]. Во многих случаях приемы построения канонического и полуканонических реперов [10], [12], можно истолковать на языке пар структур, имеющих общую базу. Таким образом, в этом случае подструктура V_0 является редукцией G -структуры V к подгруппе $H \subset G$. Группа преобразований Σ называется несущественной, если существует редукция V_0 к $H \subset G$ такая, что $\Sigma \subset \text{Aut } V_0$. Такие группы изучались Амолсом в [14]. Для пар общего вида можно определить структурную функцию и рассмотреть вопрос о наличии погружения данной структурной функцией. Соответствующий результат автора [3] обобщает классическую теорему Бонне. В последние годы появились новые работы о симметрических парах пространств. Так, в статье Санчеса [28] классифицируются перидические подмногообразия в евклидовых пространствах, а в работе [25] описываются симметрические подмногообразия компактных римановых симметрических пространств.

Другой класс отображений представляют всевозможные продолжения, из которых важнейшими являются голономное и голономное [12]. Они наследуют группу автоморфизмов, позволяющую перейти к рассмотрению инволютивного случая конечного числа шагов [29]. Редукция структурной группы продолжения представляет собой структуру второго порядка. Такие объекты весьма интересны, так как они включают связные конформные и проективные геометрии. Недавно структуры подобного вида привлекли внимание с точки зрения возможных приложений в теоретической физике [15]. В работах японс-

математиков форма смещения определялась посредством введения картановской связности [7].

Отметим также исследования Радзишевского [27] об отображениях пространства расслоения в структурную группу и Циммера [31] о гомоморфизмах алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов в алгебру Ли структурной группы.

Важнейшим инвариантом геометрической структуры является структурная функция, определенная Бернардом в [16], принимающая значения в пространстве когомологий Спенсера. Ее обращение в нуль является необходимым, а в инволютивном случае и достаточным условием интегрируемости. Если G — унитарная группа, то равенство нулю структурной функции выделяет келеровы многообразия. Как правило, структурная функция играет эффективную роль лишь в случае, когда она является константой. Но класс таких структур слишком узок и недостаточно гибок, так как, например, не допускает неголономного продолжения. Более инвариантным и удобным для изучения является класс сопряженно транзитивных структур, полученный в результате обобщения понятия автоморфизма. Для этого класса строится новый инвариант, называемый тонким веером, и приводится критерий однородности геометрической структуры. Одним из применений является дальнейшее обобщение теории симметрических и периодических пространств [5]. Соответствующие структуры оказываются сопряженно транзитивными, причем признак симметричности может быть сформулирован в терминах компонент тонкого веера. Разумеется, для римановой геометрии этот признак сводится к классическому ковариантному постоянству тензора кривизны.

Обозначения.

TM — касательное расслоение многообразия M , f^* — дифференциал отображения f , R_g — правое действие элемента g некоторой группы, \hat{G} — алгебра Ли группы G , \exp — экспоненциальное отображение в группе Ли, Ad — присоединенное представление группы в ее алгебре Ли, $\theta(x, dx) = x^{-1}dx$ — форма Маурера—Картана, $\text{Aut } V$ — группа всех автоморфизмов векторного пространства V .

§ 1. Геометрические структуры, близкие к однородным

Определение 1. Геометрической структурой называется набор $\mathcal{B} = \{G, \rho, V, B, \pi, M, \omega\}$, состоящий из представления ρ группы Ли G в векторном пространстве V , главного расслоения $B \rightarrow M$ со структурной группой G и V -значной формы ω на B такой, что $\omega R_g^* = \rho(g^{-1})\omega$ и точна последовательность векторных G -расслоений

$$0 \rightarrow \hat{G} \times B \xrightarrow{j} TE \xrightarrow{\omega} V \times B \rightarrow 0, \quad (1)$$

где \widehat{G} — алгебра Ли группы Ли, а j определяется равенством

$$j(\lambda, b) = j_b \lambda = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_{\exp t \lambda} b, \quad \lambda \in \widehat{G}, \quad b \in B. \quad (2)$$

Обычно представление ρ предполагается точным, и тогда G является подгруппой в полной линейной группе $\text{Aut } V$, а B является редукцией расслоения реперов $\mathcal{F}(M)$ базы M [12], причем ω будет ограничением на B формы смещения

$$\omega t_b = b^{-1} \pi^* t_b, \quad b \in \mathcal{F}(M), \quad t_b \in T_b. \quad (3)$$

Определение 2. Морфизм $\{k, l, f\}$ геометрической структуры \mathcal{B}_1 в геометрическую структуру \mathcal{B}_2 задается гомоморфизмом $k: G_1 \rightarrow G_2$ структурных групп, линейным отображением $f: V_1 \rightarrow V_2$ и гладким отображением $f: B_1 \rightarrow B_2$, причем $l(\rho_1(g)v) = = \rho_2(kg)lv$, $fR_g b = R_{kg} f b$, $\omega_2 f^* = l\omega_1$.

Определение 3. Пусть $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$, а $N \subset \text{Aut } V$ — некоторая подгруппа. Морфизм структуры \mathcal{B} в себя называется N -автоморфизмом, если он обратим и $l \in N$. Если $N = N(G)$ — нормализатор G , то $N(G)$ -автоморфизмы называются сопряженными автоморфизмами, а e -автоморфизмы называются автоморфизмами.

Пример 1. Пусть $G = \{e\}$, а \mathcal{B} — абсолютный параллелизм аффинного пространства $M = A^n$. Тогда автоморфизмами являются трансляции, сопряженными автоморфизмами — аффинные преобразования, $O(n)$ -автоморфизмами — движения соответствующего евклидова пространства и т. д.

Пример 2. Пусть \mathcal{B} — абсолютный параллелизм группы Ли. Тогда автоморфизмами являются левые сдвиги, а сопряженные автоморфизмы образуют голоморф данной группы.

Предложение 1. Группа G -автоморфизмов произвольной структуры $\{G, V, B, \pi, M, \omega\}$ является прямым произведением подгруппы всех автоморфизмов и нормального делителя G .

Действительно, если $\omega f^* = l\omega$ и $l \in G$, то $\omega(R_g f)^* = \omega$ так, что $R_g f$ является автоморфизмом. Кроме того, $fR_g f^{-1} = R_{kg}$, поэтому структурная группа G вкладывается в группу сопряженных автоморфизмов в качестве нормального делителя. Сопряженные автоморфизмы вида $f = R_g$, где $g \in G$, характеризуются тем, что на базе они индуцируют тождественное отображение.

Пример 3. Если $G = O(n)$, а \mathcal{B} — риманова структура, то сопряженный автоморфизм, для которого l — скалярная матрица, является гомотетией.

Определение 4. Структура называется транзитивной (N -транзитивной, сопряженно транзитивной), если группа автоморфизмов (соответственно, группа N -автоморфизмов, сопряженных автоморфизмов) транзитивна на пространстве этой структуры B .

Определение 5. Пусть L_0 — замкнутая подгруппа в группе Ли L , не содержащая нормальных делителей группы L . Пусть

$V = L/L_0$, $\chi: \hat{L} \rightarrow V$ — естественная проекция. Тогда имеется представление изотропии $\varepsilon: L_0 \rightarrow \text{Aut } V$ такое, что $\varepsilon(x)\chi y = \chi \text{Ad}_x y$, $x \in L_0$, $y \in \hat{L}$. Полагаем $L_1 = \text{Ker } \varepsilon$, $G = L_0/L_1$, $B = L/L_1$, $M = L/L_0$. Тогда B является главным расслоением с базой M и структурной группой G . Полагая $\omega = \chi\vartheta$, где ϑ — форма Маурера—Картана группы Ли L , получаем геометрическую структуру \mathcal{B} , называемую квазиоднородной структурой, ассоциированной с парой (L, L_2) , [2]. Если $L_1 = \{e\}$, то структура называется однородной [26].

Левые сдвиги группы L индуцируют автоморфизмы структуры так, что квазиоднородная структура транзитивна. Всякая транзитивная структура квазиоднородна, если ее группа автоморфизмов конечномерна.

Класс сопряженно транзитивных структур устойчив относительно операции расширения структурной группы в отличие от класса транзитивных структур, что видно на примере редукций римановых однородных многообразий к подгруппе голономии. Класс сопряженно транзитивных структур устойчив также относительно операции неголономного продолжения [2], [6]. Для алгебраического описания сопряженно транзитивных структур имеется следующая конструкция.

Определение 6. Агрегатом называется набор $\{D, D_0, D_1, G, \mu, V, \Lambda\}$, состоящий из представления Λ группы Ли D в пространстве V , нормального делителя G в D , подгрупп D_0, D_1 в D таких, что $D_0 = G \cdot D_1$, $G \cap D_1 = e$, точной последовательности $0 \rightarrow \hat{D}_0 \rightarrow \hat{D} \xrightarrow{\mu} V \rightarrow 0$, причем $\Lambda|_{D_1} = \varepsilon|_{D_1}$, где ε — представление D_0 в пространстве V , индуцированное присоединенным представлением так, что $\varepsilon(x)\mu y = \mu \text{Ad}_x y$.

Каждому агрегату можно сопоставить геометрическую структуру, для которой $B = D/D_1$, $M = D/D_0$, группа G действует справа на B по формуле $R_g q x = q(g^{-1}x)$, где $q: D \rightarrow D/D_1$ — естественная проекция, а форма смещения определяется из условия $\omega q^* t_x = \Lambda(x)\mu \theta t_x$, $x \in \hat{D}$. Левый сдвиг L_x группы D индуцирует сопряженный автоморфизм $\{k, l, f\}$ структуры \mathcal{B} такой, что $l = \Lambda(x)$, $k = \text{Int}_l$. Таким образом, получается сопряженно транзитивная структура, называемая приблизительно однородной. Обратно, сопряженно транзитивная структура, имеющая конечномерную группу сопряженных автоморфизмов, транзитивную на B , может быть получена из агрегата указанным способом, причем D — группа сопряженных автоморфизмов \mathcal{B} , [2].

Если структура \mathcal{B} получается из квазиоднородной структуры, ассоциированной с парой (L, L_0) , расширением структурной группы до $\hat{G} \subset \text{Aut } V$, то она ассоциирована с агрегатом таким, что $D = L \times G$, $D_0 = L_0 \times G$, Λ — проектирование D на G и $\mu(x, g) = \chi x$, $x \in \hat{D}$, $g \in \hat{G}$, $D_1 = \{(x, g) \mid x \in L_0, g \in G, \varepsilon(x) = g\}$.

Пример 4. Пусть $G = \{e\}$, $D = \text{Spin } 7 \subset \text{GL}(8)$. Выберем ненулевой вектор $v_0 \in \mathbb{R}^8$ и пусть V — его ортогональное дополнение. Так как $D \cdot v_0 = S^7$, то $\dot{D}v_0 = V$, и мы полагаем $\mu x = xv_0$, $x \in \dot{D}$. Стационарная подгруппа элемента v_0 равна $D_0 = G_2$. Приняв за Λ композицию проекции $\text{Spin } 7$ на $\text{So}(7)$ и стандартного представления $\text{So}(7)$ на V , получаем агрегат. Соответствующая сопряженно транзитивная e -структура представляет абсолютный параллелизм семимерной сферы. Это простейший пример сопряженно транзитивной структуры, не являющейся транзитивной даже на базе. Единственным нетождественным автоморфизмом является центральная симметрия.

Пример 5. Пусть $D \subset \text{Aut } V$ — линейная группа, имеющая открытую орбиту в V , $v_0 \in V$ — некоторый элемент этой орбиты. Полагая $\mu x = xv_0$, $x \in \dot{D}$, $G = \{e\}$, получаем агрегат, для которого Λ — тождественное представление. Легко проверить, что форма ω совпадает с естественным абсолютным параллелизмом аффинного пространства V . Таким образом, ограничение абсолютного параллелизма аффинного пространства на орбиту является сопряженно транзитивной e -структурой. Если бы она была транзитивной, то эта орбита должна быть подгруппой в V , а потому совпадать с V , но она никогда не содержит нуля.

§ 2. Симметричные структуры без первого продолжения

Напомним, что первое продолжение структурной группы G определяется равенством $G^{(1)} = \{\gamma \in V^* \otimes G \mid \gamma xy = \gamma yx\}$, [12]. В этом параграфе будут рассматриваться структуры с $G^{(1)} = 0$.

Определение 7. Симметрией относительно точки $b_0 \in B$ называется сопряженный автоморфизм $\{k, l, f\}$ структуры \mathcal{B} , для которого $l = -1$, $f b_0 = b_0$.

Предложение 2. Симметрия инволютивна, то есть $f^2 = \text{id}$.

Доказательство. Квадрат симметрии является автоморфизмом, имеющим неподвижную точку. Так как $G^{(1)} = 0$, этот автоморфизм тождественный, [5], так что симметрия инволютивна.

Предложение 3. Точка $m_0 = \pi b_0 \in M$ является изолированной неподвижной точкой диффеоморфизма базы M , индуцированного симметрией относительно b_0 .

Доказательство. Пусть ψ — диффеоморфизм, индуцированный f так, что $\pi f = \psi \pi$. Пусть γ — кривая, проходящая через m_0 , состоящая из неподвижных точек ψ , так что $\gamma(0) = m_0$, $\psi \gamma(t) = \gamma(t)$. Тогда существует кривая Γ в пространстве B такая, что $f \Gamma(t) = R_{\delta(t)} \Gamma(t)$, где δ — кривая в G , причем $\Gamma(0) = b_0$, $\delta(0) = 1$. Поэтому $(1 + \delta(t)^{-1}) \omega \Gamma(t) = 0$. Так как $\delta(0) = 1$, выражение $1 + \delta(t)^{-1}$ при малых значениях t определяет автоморфизм V . Поэтому $\omega \Gamma(t) = 0$ при малых значениях t , а потому и при всех t . Значит Γ — кривая в слое и $\gamma(t) \equiv m_0$.

Предложение 4. Две симметрии относительно заданной точки совпадают.

Доказательство. Если $\{id, -1, f_i\}$ — симметрии относительно точки b_0 , $i=1, 2$, то $f_2 \cdot f_1$ является автоморфизмом с неподвижной точкой b_0 , поэтому $f_2 f_1 = id$. Так как $f_i^{-1} = f_i$, то $f_1 = f_2$.

Определение 8. Структура называется симметричной, если существует симметрия относительно каждой точки.

Предложение 5. Расширение структурной группы сохраняет свойство симметричности.

Доказательство следует из того, что любой сопряженный автоморфизм вида $\{id, -1, f\}$ продолжается на расширение.

Предложение 6. Структурная функция симметричной структуры равна нулю.

Доказательство. Напомним, что горизонтальной площадкой в точке $b \in B$ называется линейное отображение $s_b: V \rightarrow T_b$ такое, что $\omega s_b = id$. Элемент $Q = -d\omega \cdot s_b \in \Lambda^2 V^* \otimes V$ является представителем значения структурной функции c в точке b . Структурная функция принимает значения в пространстве гомологий Спенсера $H^{2,-1}(V, \widehat{G}) = (\Lambda^2 V^* \otimes V) / \partial(V^* \otimes \widehat{G})$, где $\partial \gamma(x, y) = \gamma x y - \gamma y x$. Ясно, что для всякого сопряженного автоморфизма $\{k, l, f\}$ будем иметь $c(fx) = c(x)^l$. Здесь символ c^l означает действие $l \in N(\widehat{G})$

на $H^{2,-1}(V, \widehat{G})$, индуцированное представлением $\text{Aut } V$ в пространстве $\Lambda^2 V^* \otimes V$. В частности, для симметрии относительно точки b_0 мы получаем, что $c(b_0) = -c(b_0)$. Значит $c(b_0) = 0$. Поскольку точка b_0 может быть выбрана произвольно, то $c \equiv 0$.

Следствие. Симметричная односвязная e -структура представляет абсолютный параллелизм аффинного пространства.

Предложение 7. Симметричная структура G -транзитивна.

Доказательство. Поскольку структурная функция равна нулю, существует поле горизонтальных площадок s на B такое, что $\omega \cdot s_x \equiv 0$, $x \in B$. Поскольку $G^{(1)} = 0$, эти площадки определены единственным образом. Если f — симметрия, положим $\Sigma_{fx} v = -f^* s_x v$. Тогда $\omega \Sigma_{fx} v = v$, поэтому Σ_{fx} — горизонтальная площадка в точке fx . Далее, $d\omega(\Sigma_{fx} v_1, \Sigma_{fx} v_2) = d\omega(f^* s_x v_1, f^* s_x v_2) = -d\omega(s_x v_1, s_x v_2) = 0$. Поэтому $\Sigma_{fx} = s_{fx}$. Итак, морфизм f сохраняет поле s . Пусть $v_0 \in V$, а γ — интегральная кривая поля $s v_0$. Тогда $f \gamma(1-t)$ — интегральная кривая поля $s v_0$, так как $\frac{d}{dt} f \gamma(1-t) = -f^* \dot{\gamma}(1-t) = -f^* s_{\gamma(1-t)} v_0 = s_{f \gamma(1-t)} v_0$. Пусть $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = b_0$, $\gamma(0) = b_1$, $\gamma(1) = b_2$. Тогда кривые $\gamma(t)$ и $f \gamma(1-t)$ будут интегральными кривыми поля $s v_0$, причем $\gamma\left(\frac{1}{2}\right) = f \gamma\left(1 - \frac{1}{2}\right) = b_0$. Значит, $\gamma(t) = f \gamma(1-t)$ при всех t .

В частности, $b_1 = \gamma(0) = f\gamma(1) = fb_2$, $b_2 = \gamma(1) = f\gamma(0) = fb_1$. Так как для любой точки b_1 проекция подмножества $\exp_{b_1}(V) \subset B$ на базу M является окрестностью точки pb_1 , то орбиты группы, порожденной всеми симметриями, открыты на M . В силу связности базы, отсюда вытекает, что группа H -автоморфизмов транзитивна на базе, если $H = G \times Z_2 = G \times \{\pm 1\}$. Поскольку $G \subset H$, а структурная группа транзитивна на слое, то группа H -автоморфизмов транзитивна и на пространстве структуры \mathcal{B} . Далее, имеем гомоморфизм Λ группы H -автоморфизмов в группу H , сопоставляющий $\{k, l, f\}$ его компоненту l . Прообраз $\Lambda^{-1}(G)$ подгруппы $G \subset H$ является открытой подгруппой. Поскольку связная компонента единицы уже транзитивна на B , то, тем более, группа G -автоморфизмов, равная $\Lambda^{-1}(G)$, транзитивна на B .

Предложение 8. Структура \mathcal{B} симметрична тогда и только тогда, когда симметрична любая орбита \bar{B} группы всех автоморфизмов \mathcal{B} .

Доказательство. Если $\bar{\mathcal{B}}$ симметрична, то \mathcal{B} симметрична в силу предложения 5. Обратно, пусть \mathcal{B} симметрична и пусть $b_0 \in \bar{B} \subset B$ — произвольная точка орбиты группы $\text{Aut } \mathcal{B}$. Симметрия $\{\text{id}, -1, f\}$ относительно b_0 сохраняет подмножество \bar{B} , поскольку $\text{Int}_f \text{Aut } \mathcal{B} = \text{Aut } \mathcal{B}$. Значит симметриями $\bar{\mathcal{B}}$ будут ограничения симметрий \mathcal{B} .

Теперь ясно, что изучение симметричных структур сводится к изучению транзитивных симметричных структур.

Предложение 9. Пусть структура \mathcal{B} транзитивна, имеет односвязную базу и $G^{(1)} = 0$, а потому однородна и ассоциирована с парой групп Ли $L \supset L_0$, где $L = \text{Aut } \mathcal{B}$, $L_0 = G$. Тогда следующие утверждения равносильны:

- а) структура \mathcal{B} симметрична,
- б) ее структурная функция равна нулю,

в) существует инволютивный автоморфизм F алгебры Ли \hat{L} такой, что подалгебра \hat{L}_0 совпадает с множеством неподвижных точек автоморфизма F .

Доказательство. Импликация а) \Rightarrow б) уже доказана в предложении 6.

Выбрав дополнение \tilde{V} в \hat{L} к \hat{L}_0 , мы можем считать, что $\hat{L} = \hat{G} \oplus \tilde{V}$, причем умножение задается так

$$[(g_1, v_1), (g_2, v_2)] = \\ = ([g_1, g_2] + R(v_1, v_2) + S_{g_1}v_2 - S_{g_2}v_1, g_1v_2 - g_2v_1 + Q(v_1, v_2)), \quad (4)$$

где $Q \in \Lambda^2 V^* \otimes V$, $R \in \Lambda^2 V^* \otimes \hat{G}$, $S \in \hat{G}^* \otimes (V^* \otimes \hat{G})$, $g \in \hat{G}$, $v \in V$. Допустим, что структурная функция \mathcal{B} равна нулю. Дополнение \tilde{V} можно выбрать так, что $Q = 0$. Из тождеств Якоби следует, что

$0 = Q^g = \partial(S_g)$, $g \in \hat{G}$. Поэтому $S = 0$. Полагая $F(g, v) = (g, -v)$, доказываем импликацию б) \Rightarrow в).

Пусть $\tilde{L} \xrightarrow{\varphi} L$ — универсальное накрытие группы Ли L , а $\tilde{L}_0 = \varphi^{-1}(L_0)$. Тогда структура, ассоциированная с парой (\tilde{L}, \tilde{L}_0) , изоморфна \mathcal{B} . Инволютивный автоморфизм F , продолжаясь на \tilde{L} , дает симметрию относительно отмеченной точки структуры \mathcal{B} . Это доказывает импликацию в) \Rightarrow а).

Следствие. Для описания всех симметричных структур без первого продолжения, имеющих заданную односвязную базу M , нужно перечислить все транзитивные структуры без первого продолжения на M , имеющие нулевую структурную функцию, а затем расширить структурные группы.

Предложение 10. Если \mathcal{B} — симметричная структура без первого продолжения, то существует единственная связность без кручения. Кривизна этой связности ковариантно постоянна, а множество значений кривизны является орбитой группы G в пространстве $\Lambda^2 V^* \otimes \hat{G}$.

Доказательство. Первое утверждение доказано в предложении 7. Далее, ограничение этой связности на орбиту группы $\text{Aut } \mathcal{B}$ является связностью без кручения с постоянной кривизной на транзитивной симметричной структуре $\bar{\mathcal{B}}$. Отсюда следуют остальные утверждения.

Теперь рассмотрим некоторые примеры.

Предложение 11. Расслоение ортонормированных реперов $\mathcal{O}(M)$ риманова многообразия M является симметричной структурой тогда и только тогда, когда M — риманово глобально симметрическое пространство.

Доказательство. Если ψ — инволютивная изометрия, имеющая неподвижную точку m_0 , то ей соответствует инволютивный автоморфизм $O(n)$ -структуры $\mathcal{O}(M)$, переводящий всякий репер b_0 в этой точке в репер $-b_0$. Композиция с $\{k = \text{id}, l = -1, f = R_{-1}\}$ дает симметрию относительно точки b_0 . Обратно, опуская симметрию на базу, получаем изометрию, инволютивную в силу предложения 2, причем неподвижная точка изолирована в силу предложения 3. Подструктура \mathcal{B} в этом случае представляет собой редукцию к подгруппе голономии при условии, что отсутствуют компоненты евклидова типа.

Предложение 12. Симметричные $U(n)$ -структуры эквивалентны эрмитовым симметрическим пространствам.

Доказательство. Если $U(n)$ -структура симметрична, то структурная функция равна нулю, поэтому многообразие является келеровым, а автоморфизмы голоморфными.

Напомним, что для плоской структуры $\tilde{B} = G \times M$,

$$R_g(h, m) = (hg, m), \quad \omega(g, m; dg, dm) = g^{-1}dm. \quad (5)$$

Предложение 13. Пусть G — группа линейных преобразований векторного пространства W . Положим $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$, $V_i = W$, $g(v_1, \dots, v_r) = (gv_1, \dots, gv_r)$. Мы предполагаем, что $r > 1$, так что первое продолжение равно нулю. Если $r > 2$, то все симметричные структуры локально плоские. Если $r = 2$, то односвязные симметричные структуры находятся во взаимно однозначном соответствии с парами вида (Δ, γ) , где Δ — подалгебра Ли в \widehat{G} , $\gamma \in \Delta^{(2)}$, причем Δ является линейной оболочкой $\gamma V \cdot V \subset \widehat{G}$, а $\gamma^\Delta = 0$. В частности, они все плоские, если не существует подалгебры Ли $\Delta \subset \widehat{G}$ такой, что

$$H^0(\Delta, \Delta^{(2)}) \neq 0. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $r > 2$. Если $R \in \Lambda^2 V^* \otimes \widehat{G}$, $\partial R = 0$, то, полагая $R_{ij} = R|_{V_i \otimes V_j}$, $i \neq j$, $R_i = R|_{\Lambda^2 V_i}$, получаем $R_{ij}(x, y)z + R_{jk}(y, z)x + R_{ki}(z, x)y = 0$ при условии, что все индексы различны. Отсюда следует, что $R_{ij} = 0$. Далее, $R_{ij}(x, y)z + R_j(y, z)x + R_{ij}(x, z)y = 0$. Значит $R_j = 0$. Пусть $r = 2$. Обозначим через Δ алгебру Ли структурной группы $\overline{\mathcal{B}}$. Тогда $\overline{\mathcal{B}}$, а потому и \mathcal{B} , определяется элементом $R \in \Lambda^2 V^* \otimes \Delta$ таким, что $\partial R = 0$ и $R^\Delta = 0$. Как и выше, доказываем, что $R|_{\Lambda^2 V_i} = 0$. Полагая $R(u, v) = \gamma_u v$ для $u \in V_1$, $v \in V_2$, получаем, что $\gamma_u \in \Delta^{(1)}$, $\gamma \in \Delta^{(2)}$ и, кроме того, $\gamma^g = 0$, $g \in \Delta$.

З а м е ч а н и е. Условие (6) выполняется для всех подгрупп ортогональной, а также конформной группы. Если \widehat{G} -модуль W неприводим, то оно выполняется всегда за исключением инволютивных случаев, перечисленных в списке Картана [29].

Предложение 14. Всякая симметричная $SO^*(2n)$ -структура локально плоская.

Доказательство. Напомним, что в этом случае $V = K^n = C^{2n} = R^{4n}$, а \widehat{G} состоит из матриц с вещественными коэффициентами вида

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & -z_1 & -z_2 \\ -x_2 & x_1 & -z_2 & z_1 \\ z_1 & z_2 & x_1 & x_2 \\ z_2 & -z_1 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

где матрицы x_1 , z_1 , z_2 кососимметричны, а x_2 симметрична. Пусть $\Delta \subset \widehat{G}$ — подалгебра, $R \in \Lambda^2 V^* \otimes \Delta$, $\partial R = 0$, $R^\Delta = 0$. Переходя к комплексификации, получаем \widehat{G}^c -модуль V^c и элемент $R^c \in \Lambda^2(V^c)^* \otimes \Delta^c$ такой, что $\partial R^c = 0$ и $(R^c)^{\Delta^c} = 0$. Но $\widehat{G}^c = \mathfrak{so}(2n, C)$, а V^c распадается в прямую сумму двух экземпляров стандартного представления $\mathfrak{so}(2n, C)$. В силу замечания к предложению 13, $R^c = 0$, поэтому и $R = 0$ и структура локально плоская.

§ 3. Периодические структуры

В дальнейшем мы будем рассматривать геометрические структуры общего вида, не налагая никаких ограничений на структурную группу. Так как группа автоморфизмов структуры в общем случае не является группой Ли, то результаты здесь получаются преимущественно локальные.

Определение 9. Сопряженный автоморфизм $\{k, l, f\}$ структуры \mathcal{B} называется обобщенной симметрией относительно точки b_0 , если $fb_0 = b_0$, а собственные значения l отличны от 1. Аналогично определяется локальная обобщенная симметрия. Если $f^r = \text{id}$, то r называется периодом симметрии.

Предложение 15. Отображение ψ , индуцированное на базе M обобщенной симметрией f , имеет $m_0 = \pi b_0$ изолированной неподвижной точкой.

Доказательство проводится как в предложении 3.

Определение 10. Множество аналитических векторных полей ξ , определенных в окрестности точки $x \in B$ таких, что

$$\mathcal{L}_\xi \omega + l\omega = 0, \quad l \in N(G),$$

где \mathcal{L} — производная Ли, называется алгеброй Ли инфинитезимальных сопряженных автоморфизмов (АЛИСА) и обозначается через \mathcal{A}_x .

Рассмотрим распределение \mathfrak{M} на B такое, что

$$\mathfrak{M}_x = \{t_x \in T_x \mid t_x = \xi(x), \xi \in \mathcal{A}_x\}.$$

Лемма. Если структура допускает обобщенную симметрию относительно каждой точки, а распределение \mathfrak{M} регулярно, то структура локально сопряженно транзитивна.

Доказательство. Распределение инволютивно и содержит все вертикальные векторы, поскольку $G \subset N(G)$. Кроме того, \mathfrak{M} инвариантно относительно действия структурной группы. Значит проекция на базу M задает регулярное распределение \mathfrak{M}' на M , которое также инволютивно. Выберем окрестность $U \subset M$ такую, что уравнения максимальных интегральных многообразий имеют вид $u_{p+1} = \dots = u_n = 0$, где $u_1, \dots, u_p, \dots, u_n$ — координаты на U . Обозначим через π' естественную проекцию U на множество этих интегральных многообразий M' . Выберем обобщенные симметрии $\varphi_x = \{k_x, l_x, f_x\}$ относительно каждой точки $x \in \pi^{-1}(U)$. Поскольку f_x сохраняет распределение \mathfrak{M} , то f_x индуцирует локальный диффеоморфизм $\psi_{\pi, x}^\#$ на M' . Существует счетное число локальных сопряженных автоморфизмов $\{\varphi_i\}$ такое, что всякий локальный сопряженный автоморфизм Φ имеет вид $\Phi = \bar{\Phi}\varphi_i$, где $\bar{\Phi}$ включается в локальную однопараметрическую группу локальных сопряженных автоморфизмов. Ясно, что $\psi^\# = \psi_i^\#$, поскольку $\bar{\psi}^\# = \text{id}$. Значит среди $\{\psi_{\pi, x}^\#\}$ только счетное число различных.

Учитывая теорему Бэра, получаем, что существует подмножество $M_0 \subset M$ такое, что $\text{Int}(\bar{M}_0) \neq \emptyset$ и все $\psi_y^\#, y \in M_0$, эквивалентны (в пересечении областей определения принимают одинаковые значения). Значит $\psi_y^\# z$ не зависит от y при $y \in M_0$. Полагаем $\alpha(z) = \psi_y^\# z$. Разумеется, отображение α аналитично. Полагая $z = y$, получаем, что $\alpha(y) = \psi_y^\# y = y$. Итак, $\alpha(y) = y$ на множестве M_0 , а потому и всюду, так как α аналитично. Значит $\psi_y^\# z = z$. Отсюда выводится, что $\psi(u_1, \dots, u_n) = (\psi_1(u), \dots, \psi_p(u), u_{p+1}, \dots, u_n)$, где ψ_j — скалярные функции. Поэтому $d\psi = (d\psi_1, \dots, d\psi_p, du_{p+1}, \dots, du_n)$ и матрица $\psi^* = \begin{pmatrix} \dots & 0 \\ \dots & 1 \end{pmatrix}$

имеет единичные собственные значения, если только $p \neq n$. Итак, $\mathfrak{M} = TB$, что доказывает лемму.

Предложение 16. Если структура допускает обобщенную симметрию в каждой точке, то существует открытая плотная локально сопряженная подструктура, допускающая локальную обобщенную симметрию в каждой точке.

Доказательство. Пусть

$$r = \max_{x \in B} \dim \mathfrak{M}_x, \quad \bar{B} = \{x \in B \mid \dim \mathfrak{M}_x = r\}.$$

Тогда \bar{B} — открытое множество. В самом деле, если $x \in \bar{B}$, то выберем $\xi_1, \dots, \xi_r \in \mathcal{A}_x$ такие, что $\{\xi_i(x)\}$ — базис \mathfrak{M}_x . Тогда поля ξ_i будут определены и линейно независимы в окрестности U_x , причем $\xi_i(y) \in \mathfrak{M}_y$, $y \in U_x$. В силу того, что $\dim \mathfrak{M}_y \leq \dim \mathfrak{M}_x$, получаем, что $\xi_i(y)$ образуют базис \mathfrak{M}_y . Значит $\dim \mathfrak{M}_y = \dim \mathfrak{M}_x$. Все локальные сопряженные автоморфизмы сохраняют \bar{B} , поэтому они сохраняют внешность множества \bar{B} . Применяя эти рассуждения к внешности, получаем, что имеется семейство $\{B_i\}$ непересекающихся открытых подмножеств в B такое, что их объединение B_i плотно в \bar{B} , $\mathfrak{M}|_{B_i}$ регулярно и имеет размерность r_i , B_i инвариантно относительно всех локальных сопряженных автоморфизмов и, в частности, относительно обобщенных симметрий, а числа r_i различны. Применяя лемму, получаем, что все r_i равны размерности B . Это означает, что \bar{B} плотно в B .

Замечание. Вопрос о том, всегда ли $\bar{B} = B$, остается открытым. Борель в [17] рассматривал симметричные $GL(n, C)$ -структуры в категории комплексных пространств. Там имеются примеры, когда множество $B - \bar{B}$ непустое. Предложение 16 оправдывает рассмотрение сопряженно транзитивных структур с симметриями.

Определение 11. Локально N -транзитивная структура \mathfrak{F} называется N -симметричной периода r , если существует обобщенная локальная симметрия порядка r относительно некоторой (а, значит, и любой) точки B . Если f^r не является тождественным ни при каком r , то за период принимаем ∞ .

Предложение 17. Если структура \mathcal{B} N -симметрична периода r и $G \subset \tilde{G} \subset N \subset N(\tilde{G}) \subset \text{Aut } V$, то расширение структурной группы до \tilde{G} будет N -симметрично периода r .

Предложение 18. Если структуры \mathcal{B}_i N_i -симметричны периода r_i , то их прямое произведение $\prod_i N_i$ -симметрично периода $\prod_i r_i$.

Предложение 19. Локально плоская G -структура N -симметрична периода r , если существует элемент $l \in N$, не имеющий единичных собственных значений такой, что $l^r = \text{id}$.

Доказательства этих утверждений очевидны.

Пример. Пусть \mathcal{B}_0 — риманова структура на многообразии M_0 , $M = TM_0$, $\chi: M \rightarrow M_0$ — естественная проекция. Пусть B — множество всех реперов $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$ на M таких, что e_1, \dots, e_n касаются слоя, то есть фактически являются касательными векторами на M_0 , а e_{n+1}, \dots, e_{2n} при проектировании на M_0 дают ортонормированный репер, совпадающий с $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда B является пространством некоторой G -структуры \mathcal{B} при условии, что G состоит из матриц вида $\begin{pmatrix} A & \dots \\ 0 & A \end{pmatrix}$, где $A \in O(n)$. Имеется естественный эпиморфизм структур $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0$, индуцированный проектированием χ . Поскольку все элементы нормализатора G , имеющие конечный порядок, принадлежат G , то симметричность равносильна наличию локального автоморфизма данного периода r , дифференциал которого в заданной точке не имеет неподвижных ненулевых векторов. Очевидно, что автоморфизмы \mathcal{B} индуцируют изометрии на \mathcal{B}_0 . Поэтому из симметричности \mathcal{B} следует симметричность \mathcal{B}_0 . Далее, если $m_0 \in M_0$ — изолированная неподвижная точка изометрии ψ_0 , то нулевой касательный вектор $o \in T_{m_0}$ является изолированной неподвижной точкой для ψ_0^* . Для произвольного касательного вектора $z_0 \in T_{m_0}$ выберем векторное поле ξ в окрестности m_0 такое, что $\xi(m_0) = z_0$. Тогда отображение $\psi(z) = \xi_{xz} + \psi_0^*(z - \xi_{xz})$ является локальным автоморфизмом с тем же периодом, причем z_0 будет изолированной неподвижной точкой. Итак, локальная симметричность \mathcal{B} и \mathcal{B}_0 имеет место одновременно.

Отметим, что вместо TM можно рассматривать кокасательное или тензорные расслоения.

§ 4. Локальная теория сопряженно транзитивных структур

Результаты предыдущего параграфа указывают, что для нахождения критерия симметричности необходимо изучить инварианты сопряженно транзитивных структур. Настоящий па-

параграф посвящен этой задаче. Сначала мы введем абстрактное понятие веера.

Определение 12. Пусть V — векторное пространство, а N — группа его автоморфизмов, $H \subset N \subset \text{Aut } V$. Пусть G — нормальный делитель в N . Положим $W = H \cdot G$, $Z = H \cap G$. Тогда набор $\Phi = \{V, N, H, G, W, Z\}$ называется футляром, а группы N, G, H, W, Z называются соответственно базисной, структурной фундаментальной, вспомогательной и основной группой. Аналогичные названия используются для соответствующих алгебр Ли. Автоморфизм l векторного пространства V называется автоморфизмом футляра, если автоморфизм k группы $\text{Aut } V$, определяемый равенством $kg = lgl^{-1}$, сохраняет группы N, G, H . Если $l \in N$, то автоморфизм называется внутренним.

Очевидно, элемент $l \in N$ определяет внутренний автоморфизм тогда и только тогда, когда он содержится в нормализаторе H .

Обозначим через $\tau: V^* \otimes \hat{N} \rightarrow V^* \otimes (\hat{N}/\hat{W})$, $\tau: H^{2,-1}(V, \hat{Z}) \rightarrow H^{2,-1}(V, \hat{G})$, $\pi: \Lambda^2 V^* \otimes V \rightarrow H^{2,-1}(V, \hat{Z})$ естественные проекции. Выберем линейное отображение $\rho: \hat{W} \rightarrow \hat{G}$ так, чтобы $\rho|_{\hat{G}} = \text{id}$, $\rho \hat{H} \subset \hat{Z}$. Тогда коммутативная группа Ли $V^* \otimes \hat{W}$ действует на $(V^* \otimes \hat{N}) \times H^{2,-1}(V, \hat{Z})$ по формуле

$$\gamma \circ (\Gamma, \pi Q) = (\gamma + \Gamma, \pi(Q - \delta \rho \gamma)), \quad (7)$$

где $\gamma \in V^* \otimes \hat{W}$, $\Gamma \in V^* \otimes \hat{N}$, $Q \in \Lambda^2 V^* \otimes V$, $(\rho \gamma) v = \rho(\gamma v)$. Выражение не зависит от выбора ρ .

Определение 13. Веером называется орбита группы $V^* \otimes \hat{W}$ в пространстве $(V^* \otimes \hat{N}) \times H^{2,-1}(V, \hat{Z})$. Всякий элемент (Γ, Q) орбиты называется представителем веера.

Если $H \supset G$, то $Z = G$. В этом случае веер распадается на Γ и Q .

Определение 14. Автоморфизмом веера называется автоморфизм футляра, сохраняющий орбиту.

Таким образом, для любого представителя (Γ, Q) пара (Γ^l, Q^l) , определяемая равенством $Q^l(v_1, v_2) = lQ(l^{-1}v_1, l^{-1}v_2)$, $\Gamma^l(v) = \text{Ad}_l \Gamma l^{-1}v$, также является представителем того же веера.

Таким образом, существует $\delta \in V^* \otimes \hat{Z}$, зависящее от l , такое, что

$$lQ(l^{-1}v_1, l^{-1}v_2) - Q(v_1, v_2) = -\rho(\text{Ad}_l \Gamma l^{-1}v_1 - \Gamma v_1) \cdot v_2 + \\ + \rho(\text{Ad}_l \Gamma l^{-1}v_2 - \Gamma v_2) \cdot v_1 + \delta v_1 \cdot v_2 - \delta v_2 \cdot v_1. \quad (8)$$

Более общим образом, группа N действует на множестве вееров так, что при действии l на веер с представителем (Γ, Q) и футляром $\{V, N, H, G, W, Z\}$ получается веер с представителем (Γ^l, Q^l) и футляром $\{V, N, lHl^{-1}, lGl^{-1}, lWl^{-1}, lZl^{-1}\}$.

Пусть теперь \mathcal{R} — геометрическая структура, причем ее структурная группа G содержится в некоторой подгруппе $N \subset$

$\subset \text{Aut } V$ в качестве нормального делителя. Предположим, что значения структурной функции c содержатся в орбите группы N , действующей на $H^{2,-1}(V, \widehat{G})$. Тогда, зафиксировав точку $b_0 \in B$, мы можем выбрать отображение a окрестности этой точки в N такое, что

$$a(b_0) = 1, \quad a(R_g b) = g^{-1}a(b), \quad c(b) = c(b_0)^{a(b)}. \quad (9)$$

Если H — стационарная подгруппа в N значения структурной функции в точке b_0 , то пара (Γ, Q) такая, что

$$\Gamma v = a^* s v, \quad Q(v_1, v_2) = -d\omega(sv_1, sv_2), \quad v, v_1, v_2 \in V, \quad (10)$$

где s — горизонтальная площадка в точке b_0 , является представителем некоторого веера, не зависящего от выбора горизонтальной площадки s и отображения a . Этот веер обозначается через $\Phi(b_0)$ и называется веером первого приближения геометрической структуры \mathcal{R} в точке b_0 .

Если структурная функция постоянна, то веер сводится к ее значению. Если структура локально N -транзитивна, то значения структурной функции содержатся в орбите группы N , и веер первого приближения существует в любой точке.

Определение 15. Определим веер k приближения по индукции. Пусть значения веера k приближения Φ_k содержатся в орбите N так, что существует отображение a_k окрестности заданной точки $b_0 \in B$ в группу N такое, что $a_k(b_0) = 1, a_k(R_g b) = g^{-1}a_k(b), \Phi_k(b) = \Phi_k(b_0)^{a_k(b)}$. Пусть $H_{k+1}(b_0)$ — стационарная подгруппа $\Phi_k(b_0)$. Тогда

$$\Gamma_{k+1}(v) = a_k^* s v, \quad Q_{k+1}(v_1, v_2) = -d\omega(sv_1, sv_2)$$

является представителем веера $k+1$ приближения $\Phi_{k+1}(b_0)$ в точке b_0 . Результат стабилизации $\Phi_\infty(b_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k(b_0)$ называется тонким веером.

Если структура локально N -транзитивна, то значения веера любого приближения содержатся в орбите N , поэтому тонкий веер существует. В инволютивном случае справедливо обратное утверждение.

Предложение 20. Если структура имеет тонкий веер и его основная группа инволютивна, то структура локально N -транзитивна.

Более общим является

Предложение 21. [1]. Если две структуры \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 имеют тонкий веер с инволютивной основной группой, а точки $b_1 \in B_1$ таковы, что $\Phi_\infty(b_1)^l = \Phi_\infty(b_2)$ для некоторого изоморфизма $l: V_1 \rightarrow V_2$, то существует локальный N -изоморфизм $\{k, \tilde{l}, f\}: B_1 \rightarrow B_2$ такой, что $\tilde{l} = l, f b_1 = b_2$.

Пример 1. Покажем, как с помощью предложения 21 получить теорему Дарбу о каноническом виде контактной формы.

Пусть θ — линейная дифференциальная форма максимального ранга на M , т. е. $\dim M = 2n + 1$, $\theta \cdot (d\theta)^n \neq 0$. Форма задана с точностью до функционального множителя. Пусть $\{E_0, \dots, E_{2n}\}$ — базис V , W — линейная оболочка E_1, \dots, E_{2n} , $G = \{A \in GL(2n+1) \mid AW \subset W\}$. Тогда $B = \{b \in F(M) \mid bW \subset \text{Ker } \theta\}$ является пространством G -структуры. Пространство когомологий Спенсера $H^{2, -1}(V, \hat{G})$ изоморфно $\Lambda^2 W^*$. Пусть $\theta_0 \in V^*$ таково, что $\theta_0 E_0 = 1$, $\theta_0 W = 0$. Мы имеем для всякого репера $b \in B$ равенство $\theta b v = \alpha \theta_0 v$, $v \in V$, где α зависит от b . Выберем поле реперов $b(m)$ такое, что $\theta b = \theta_0$. Горизонтальные площадки выбираем в точках соответствующего сечения $\bar{B} \subset B$, причем SV касаются \bar{B} . Тогда

$$c_b(v_1, v_2) = \theta_0 Q(v_1, v_2) = d\theta(bv_1, bv_2), \quad v_i \in W.$$

Поэтому значения структурной функции содержатся в орбите группы $GL(2n)$, действующей на $\Lambda^2 W^*$. Пусть $\Omega = \sum_{i=1}^n E_i^* \wedge \wedge E_{n+i}^*$ — стандартная симплектическая форма. Стационарной группой в G элемента $\Omega \in \Lambda^2 W^*$ является контактная группа G_0 , состоящая из матриц вида $\begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ d & \lambda \cdot A \end{pmatrix}$, где $A \in \text{Sp}(n, R)$, d — столбец длины $2n$, $\lambda \neq 0$. Стационарная подгруппа $H(b)$ значения структурной функции в точке b равна $\text{Int}_D G_0$, где $\Omega^D = c(b)$, $D \in GL(2n)$. Уравнение $c(x) = \Omega$ задает редукцию B_0 расслоения B к подгруппе G_0 .

На $\text{Ker } \theta \subset TM$ можно определить внешнюю форму $\bar{\Omega}$ такую, что $\bar{\Omega}(X, Y) = \Omega(b^{-1}X, b^{-1}Y)$, $b \in B_0$, с точностью до функционального множителя, так как $G_0|_W = C \text{Sp}(n, R)$. Она пропорциональна $d\theta|_{\text{Ker } \theta}$. Структурная функция \mathcal{B} имеет две компоненты, принимающие значения в $\Lambda^2 W^*$ и $\Lambda^3 W^*$. Первая компонента постоянна и равна Ω . Вторая компонента представляется внешним дифференциалом формы второй степени Ω' такой, что $\Omega'(bv_1, bv_2) = \Omega(v_1, v_2)$, $b \in B_0$. Поэтому форма Ω' пропорциональна $d\theta|_{\text{Ker } \theta}$. Так как $d\theta$ замкнута, то и $d\Omega'|_{\text{Ker } \theta} = 0$. Итак, вторая компонента равна нулю.

Для вычисления веера первого приближения структуры \mathcal{B} в точке подмногообразия B_0 выбираем горизонтальную площадку s , касающуюся B_0 . Здесь $Z = H = G_0$ и Q совпадает с $c(b) = \Omega$. Так как вдоль B_0 структурная функция постоянна, то $\Gamma = 0$. Стационарная подгруппа веера совпадает с G_0 , поэтому тонкий веер сводится к вееру первого приближения. Так как группа $z_\infty = G_0$ инволютивна, то структура \mathcal{B} локально изоморфна стандартной G -структуре, ассоциированной с формой $dz + \sum_{i=1}^n x_i dy_i$. Это доказывает теорему Дарбу.

Пример 2. Пусть \mathcal{B} — структура, для которой $\widehat{G}^{(1)} = 0$ и структурная функция равна нулю. Тогда на B существует единственная связность Φ без кручения. Форма $\omega^1 = \omega \oplus \Phi$ задает абсолютный параллелизм на B , т. е. e -структуру $\mathcal{B}^1 = \{e, V_0 + \widehat{G}, B, \omega \oplus \Phi\}$. Структурные уравнения связности имеют вид

$$d\Phi + \frac{1}{2} [\Phi, \Phi] = \frac{1}{2} R \cdot (\omega \wedge \omega), \quad d\omega + \Phi\omega = 0.$$

В каждой точке $b \in B$ существует единственная горизонтальная площадка $s = s_b$ такая, что $\omega s = \text{id}$, $\Phi s = 0$. Полагая

$$\Sigma_b(\lambda, v) = j_b \lambda + s_b v, \quad \lambda \in \widehat{G}, \quad v \in V,$$

получаем, что $\omega^1 \Sigma = \text{id}$. Поэтому структурная функция структуры \mathcal{B}^1 равна $c^1 = Q$, причем

$$Q_b((\lambda_1, v_1), (\lambda_2, v_2)) = ([\lambda_1, \lambda_2] - R_b(v_1, v_2), \lambda_1 v_2 - \lambda_2 v_1). \quad (11)$$

Пусть $N = G$, причем $A(\lambda, v) = (\text{Ad}_A \lambda, Av)$, $A \in G$. Условием существования веера первого приближения является наличие отображения $l: B \times B \rightarrow G$ такого, что

$$l(x, R_g y) = g^{-1} l(x, y), \quad l(x, x) = 1, \quad R(x)^{l(x, y)} = R(y), \quad (12)$$

$$x, y \in B, \quad g \in G.$$

Фундаментальной группой $H(b)$ в точке $b \in B$ является стационарная группа $R(b)$. Так как $G^1 = \{e\}$, то $W = H$, $Z = \{e\}$, а ρ постоянно. Представителем веера первого приближения в точке

$x \in B$ является (Q, Γ) , где $\Gamma(\lambda, v) = -\lambda + \frac{\partial l}{\partial y}(x, x) \cdot s_x v$. Теперь ясно, что стационарная группа $H_2(x)$ нашего веера равна

$$H_2(x) = \{h \in G \mid R(x)^h = R(x), \quad \Gamma^h(v) = \Gamma(v) \in \widehat{H}_1(x)\}.$$

Это условие равносильно тому, что h сохраняет значения кривизны и ее ковариантной производной в данной точке. Веер второго приближения существует, если значения $(R, \nabla R)$ содержатся в орбите G . Тонкий веер существует, если значения функции, являющейся последовательностью всех ковариантных производных кривизны, содержатся в орбите G . Таким образом, из предложения 20 получается, в частности, известный критерий однородности риманова многообразия, сводящийся к наличию изометрий касательных пространств, сохраняющих ковариантные производные тензора кривизны, [8].

§ 5. Критерий симметричности

Теорема. Пусть структура \mathcal{B} имеет тонкий веер Φ . Тогда необходимым условием N -симметричности периода r является наличие автоморфизма веера $l \in N$ такого, что $l^r = 1$, и единица

не является собственным значением l . Если основная группа веера инволютивна, то это условие является и достаточным.

При $r = \infty$ доказательство вытекает из предложения 21. При $r < \infty$ доказательство использует сложный алгебраический аппарат и здесь не приводится.

Пример 1. Покажем, как получить классический признак симметричности периода 2 риманова многообразия. Наличие для каждой точки $m \in M$ изометрии ψ базы M периода r с изолированной неподвижной точкой m эквивалентно существованию для каждой точки $b_0 \in B$ N -автоморфизма $\{k, l, f\}$ периода r такого, что $f b_0 = b_0$ и l не имеет единичных собственных значений. Тогда $\omega f^* = l \omega$ и $\varphi f^* = \text{Ad}_l \varphi$. Пусть структура симметрична периода два. Тогда $l = -1$ должно быть автоморфизмом веера первого приближения. Поэтому для отображения $l: B \times B \rightarrow G$, определенного равенством (12), значения $\frac{\partial l}{\partial y}(x, x) \cdot s_x v$ содержатся в стационарной подалгебре $R(x)$, что равносильно ковариантному постоянству кривизны. Обратно, если кривизна ковариантно постоянна, то компонента Γ для веера любого приближения равна $\Gamma(\lambda, v) = -\lambda$ и элемент $l = -1$ задает автоморфизм тонкого веера, индуцирующий локальную симметрию риманова многообразия.

Пример 2. Покажем, что абсолютный параллелизм семимерной сферы, описанный в примере 4 § 1, не является N -симметричным периода r ни при каких N, r . Действительно, пусть $\sigma: V \rightarrow \hat{D}$ — расщепление, т. е. $\mu \sigma = 1$. Тогда $s = q^* \sigma$ является горизонтальной площадкой в отмеченной точке $b_0 = qe$. Поэтому

$$Q(v_1, v_2) = -d\omega(sv_1, sv_2) = \left\{ \frac{1}{2} \mu [\theta, \theta] - \hat{\Lambda} \wedge \mu \theta \right\} (sv_1, sv_2) = \\ = \mu [\sigma v_1, \sigma v_2] - (\hat{\Lambda} \sigma v_1 \cdot v_2 - \hat{\Lambda} \sigma v_2 \cdot v_1).$$

В силу сопряженной транзитивности структуры, $c(qx) = c(qe)^{\Lambda x}$. Поэтому можно взять $a(x) = \Lambda(x)$. Тогда $\Gamma v = \hat{\Lambda} \sigma v$. Выберем $N = \text{GL}(7)$. Тогда $G = Z = e$, $H = W = G_2$. Поскольку среди весов \hat{D}_2 -модуля R^7 есть нулевой вес, то невозможно найти элемент $l \in G_2$ без единичных собственных значений.

Определение 16. Пусть $\mathcal{D} = \{D, D_0, D_1, G, \Lambda, \mu, V\}$ — агрегат. Автоморфизмом агрегата называется пара (F, l) такая, что F — автоморфизм D , сохраняющий D_1 и G и индуцирующий на V автоморфизм l , причем $\Lambda(Fx) = l \cdot \Lambda(x) \cdot l^{-1}$, $x \in D$.

Предложение 22. Пусть \mathcal{B} — структура, ассоциированная с агрегатом \mathcal{D} . Автоморфизму (F, l) агрегата соответствует N -симметрия периода r относительно отмеченной точки qe , если $F^r = \text{id}$, $l \in N$, а единица не является собственным значением l . Обратно, если D — группа всех N -автоморфизмов структуры \mathcal{B} , то N -симметрии f периода r , определенной глобально, соответствует автоморфизм агрегата (F, l) такой, что $Fx = fx f^{-1}$, $x \in D$.

З а м е ч а н и е. Расширение структурной группы может существенно влиять на степень симметричности. Например e -структура двумерного аффинного пространства $O(2)$ -симметрична любого периода, тогда как все симметрии расширения структурной группы до $\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{12}$ имеют четный период или ∞ .

С другой стороны, e -структура группы Ли, состоящей из треугольных матриц порядка n со следом нуль, не является симметричной ни при каких N, r , тогда как расширение структурной группы до $G = SO(n)$ дает симметрическое пространство периода два, ассоциированное с парой $L = SL(n)$, $L_0 = SO(n)$.

§ 6. Продолжения

Если основная группа не является инволютивной, то для решения вопроса об N -транзитивности и симметричности необходимо переходить к рассмотрению продолжений исходной структуры. Конструкция неголономного продолжения со структурной группой $G^1 = V^* \otimes \widehat{G}$ несколько громоздка, однако она отличается универсальностью применения. Напомним, что пространство B^1 состоит из всех горизонтальных площадок s , а форма смещения ω^1 , принимающая значения в $V^1 = \widehat{G} \oplus V$, определяется равенством

$$\omega^1 t_s = (\omega p^* t_s, p^* t_s - s \omega p^* t_s), \quad p: B^1 \rightarrow B, \quad p s_b = b.$$

Если $\{f, l\}$ является N -автоморфизмом структуры \mathcal{B} , то полагая $f^1 s_b = f^* s_b l^{-1}$, получаем N^1 -автоморфизм структуры \mathcal{B}^1 при условии, что $N^1 = G^1 \times N$, а $(\gamma, l) \cdot (\lambda, v) = (\text{Ad}_l \lambda + \gamma l v, l v)$, $v \in V$, $\lambda \in \widehat{G}$, $l \in N$, $\gamma \in G^1$. Таким образом, неголономное продолжение N -транзитивной структуры N^1 -транзитивно.

Предложение 23. Необходимым и достаточным условием N -симметричности периода r N -транзитивной структуры \mathcal{B} является наличие N^1 -автоморфизма $\{f^1, l^1\}$ порядка r структуры \mathcal{B}^1 , имеющего неподвижную точку, причем $l^1: V^1 \rightarrow V^1$ сохраняет $\widehat{G} \subset V^1$ и индуцирует автоморфизм $V = V^1 / \widehat{G}$ без единичных собственных значений.

Если основная группа тонкого веера \mathcal{B}^1 инволютивна, это равносильно наличию автоморфизма $l^1 \in N^1$ тонкого веера такого, что $(l^1)^r = \text{id}$ и автоморфизм V , индуцированный l^1 , не имеет единичных собственных значений.

Поскольку неголономное продолжение достаточно высокого порядка N -транзитивной структуры имеет инволютивную основную группу [6], то этот признак всегда позволяет выяснить вопрос о симметричности структуры.

Пример. Пусть $V = R^n$, $G = CO(n)$, а \mathcal{B} — конформная структура. Поскольку ее структурная функция равна нулю, то все G -автоморфизмы и, в частности, симметрии, поднимаются на голономное продолжение $\mathcal{B}^{(1)}$ со структурной группой $G^{(1)}$,

изоморфной V^* [12]. Пространство B^1 состоит из горизонтальных площадок s , для которых $d\omega \cdot s = 0$. Часто $\mathcal{B}^{(1)}$ также называется конформной структурой (второго порядка). Так как \mathcal{B} получается из некоторой римановой структуры \mathcal{B}_0 расширением структурной группы, то риманова связность на \mathcal{B}_0 определяет некоторое подмногообразие \bar{B}_0 в $B^{(1)}$ такое, что значения структурной функции $\mathcal{B}^{(1)}$ вполне определяются значениями на \bar{B}_0 . Структурная функция $\mathcal{B}^{(1)}$ определяется значением кривизны, как в формуле (11) примера § 4. Переход к классу эквивалентности в $(\Lambda^2 V^* \otimes \hat{G}) / \partial(V^* \otimes \hat{G}^{(1)})$ дает конформный тензор Вейля [7]. Получаемое на этом шаге необходимое условие симметричности периода два сводится к ковариантному постоянству тензора Вейля, а условие существования тонкого веера заключается в том, что последовательность всех ковариантных производных тензора Вейля принимает значения в орбите группы G . Основной группой веера любого приближения здесь является $G^{(1)}$. Так как она не является инволютивной, то необходимо рассмотреть второе продолжение. В силу того, что $\hat{G}^{(2)} = 0$, основная группа веера второго продолжения будет единичная. Однако при этом новых инвариантов не получается, так что указанные условия являются и достаточными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Грушко П. Я., О проблеме сопряженной эквивалентности Картана. Сиб. мат. ж., 1981, 22, № 1, 68—80 (РЖМат, 1981, 6A662)
2. —, Сопряженно транзитивные структуры конечного типа. Изв. вузов. Мат., 1981, 2, 24—29 (РЖМат, 1981, 8A706)
3. —, Теорема Бонне для геометрических структур. Мат. заметки, 1981, 29, № 2, 253—264 (РЖМат, 1981, 6A663)
4. —, Сопряженно изотропные пространства. Изв. вузов. Мат., 1982, № 12, 23—27 (РЖМат, 1983, 5A594)
5. —, Симметричные геометрические структуры. Успехи мат. наук, 1984, 39, № 2, 147—148 (РЖМат, 1984, 9A629)
6. —, Сопряженно транзитивные структуры. Сиб. мат. ж., 1983, 24, № 1, 68—78 (РЖМат, 1984, 12A754)
7. Кобаяси Ш., Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986, 224 с. (РЖМат, 1986, 7A786K)
8. —, Номидзу К., Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981, 344 с. (РЖМат, 1981, 11A686K)
9. Ковальский О., Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1984, 240 с. (РЖМат, 1984, 6A672K)
10. Ланге Г. Ф., Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
11. —, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. Тр. Геометр. семинара. Ин-т науч. информ. АН СССР, 1966, 1, 139—189 (РЖМат, 1967, 6A382)
12. Стернберг С., Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970, 412 с. (РЖМат, 1971, 7A754K)
13. Amores A. M., Vector fields of a finite type G -structure. J. Different. Geom., 1979, 14, № 1, 1—6 (РЖМат, 1981, 2A682)

14. —, Group of transformations of a G -structure which leave invariant a substructure. Collect. mat., 1982, 33, № 3, 215—220
 15. *Atanasiu Gh., Sofonea L.*, Propriétés systemiques des G -structures et quelques interpretations physiques. Proc. Int. Symp. Appl. Math. Syst. Theory, Braşov, 1978. Vol. 2. Braşov, 1979, 303—313 (PЖMar, 1980, 10A484)
 16. *Bernard D.*, Sur la géométrie différentielle des G -structures. Ann. Inst. Fourier, 1960, 10, 151—270 (PЖMar, 1963, 7A372)
 17. *Borel A.*, Symmetric compact complex spaces. Arch. Math., 1979, 33, № 1, 49—56 (PЖMar, 1980, 6A674)
 18. *Chern Shiing-Shen*, Pseudo-groupes continus infinis. Colloq. internat. Centre nat. rech. scient. 52, Strasbourg, 1953, Paris, 1953, 119—136 (PЖMar, 1957, 6649)
 19. —, The geometry of G -structures. Bull. Amer. Math. Soc., 1966, 72, № 2, 167—219 (PЖMar, 1967, 1A380)
 20. *Cornu P., Monna G.*, Structures de contact généralisées et structures $\mathfrak{h}(p, r)$ -plates. C. r. Acad. sci., 1982, sér. I, 295, № 6, 431—434 (PЖMar, 1983, 5A598)
 21. *Guillemin V.*, The integrability problem for G -structures. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 116, № 4, 544—560 (PЖMar, 1966, 8A539)
 22. *Kobayashi Shoshichi, Nagano Tadashi*, On filtered Lie algebras and geometric structures. I. J. Math. and Mech., 1964, 13, № 5, 875—907 (PЖMar, 1965, 8A225); II. J. Math. and Mech., 1965, 14, № 3, 513—521 (PЖMar, 1966, 5A178)
 23. *Monna G.*, Intégrabilité des structures de presque contact. C. r. Acad. sci., 1980, AB291, № 3, A215—A217 (PЖMar, 1981, 5A632)
 24. *Morimoto Tohru*, Sur le problème d'équivalence des structures géométriques. C. r. Acad. sci., 1981, sér. I, 292, № 1, 63—66 (PЖMar, 1981, 9A517)
 25. *Naitoh Hiroo*, Symmetric submanifolds of compact symmetric spaces. Lect. Notes Math., 1984, № 1090, 116—128 (PЖMar, 1985, 6A592)
 26. *Nomizu Katsumi*, Invariant affine connections on homogeneous spaces. Amer. J. Math., 1954, 76, № 1, 33—65 (PЖMar, 1956, 7605)
 27. *Radziszewski K.*, On some mappings of a principal bundle into its structural group. Demonstr. math., 1984, 17, № 2, 259—269 (PЖMar, 1985, 7A797)
 28. *Sánchez C. U.*, k -symmetric submanifolds of R^N . Math. Ann., 1985, 270, № 2, 297—316 (PЖMar, 1985, 7A839)
 29. *Singer I. M., Sternberg S.*, On the infinite groups of Lie and Cartan. Part I. The transitive groups. J. anal. math., 1965, 15, 1—114 (PЖMar, 1966, 10A167)
 30. *Wolak R.*, Infinitesimal automorphisms of some G -structures. Ann. pol. mat., 1983, 43, № 3, 283—291 (PЖMar, 1984, 10A607)
 31. *Zimmer R. J.*, Semisimple automorphism groups of G -structures. J. Differential. Geom., 1984, 19, № 1, 117—123 (PЖMar, 1985, 1A823)
-