УДК 514.76+512.54+512.55+512.57

ГЛАДКИЕ КВАЗИГРУППЫ И ГЕОМЕТРИЯ

П. О. Михеев, Л. В. Сабинин

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый вниманию читателей обзор содержит результаты 70-х—80-х годов, полученные в новой области математических исследований на стыке алгебры и геометрии. В то время как методы ассоциативной алгебры (методы теории групп, линейной алгебры и т. д.) давно и прочно вошли в арсенал современной дифференциальной геометрии, место и роль неассоциативной алгебры в ней до последних десятилетий оставались неясными. Самой старой областью дифференциальной геометрии, где эти методы применялись, была теория тканей, восходящая к работам Бляшке, Бола, Черна и других (30-х годов). Последние пятнадцать лет показали однако поразительную эффективность неассоциативной алгебры (см. [42]) в дифференциальной геометрии аффинной связности, более того, сама структура аффинной связности была осмыслена на языке гладких луп (лупускулярные и одулярные структуры). Известные классы пространств (редуктивные, симметрические и т. д.) получили изящное истолкование на языке гладких квазигрупп и луп. Полученные в результате алгебраические системы имеют ценность и сами по себе, вне зависимости от геометрии, создавая возможность говорить, например, о конечных симметрических пространствах и т. д., что вводит нас в круг идей и понятий новой «нелинейной геометрической алгебры». В то же время встречный поток исследований в алгебре, идущий от теории групп Ли через теорию гладких луп Муфанг к гладким лупам Бола и общей теории гладких луп, сомкнулся с дифференциально-геометрическими изысканиями последних лет. В результате мы имеем сегодня своеобразное новое научное направление, синтезирующее методы алгебры и геометрии и весьма перспективное для дальнейших исследований. Изысканиями в этой области занимается уже довольно большое число математиков в разных странах мира, что, в частности, нашло свое отражение в большой коллективной международной монографии «Квазигруппы и их приложения»

(Хельдерман—Верлаг. Западный Берлин. 1988 г.). Круг идей и методов этого нового направления наиболее естественно называть «геометрической алгеброй», включив сюда и классическую геометрическую алгебру (аффинные и проективные плоскости и т. д.) и новую нелинейную геометрическую алгебру, возникшую в последнее время.

Читателю следует помнить, что время может сместить акценты и точки зрения в этой новой науке, так что наш обзор фиксирует лишь сегодняшнее положение вещей в «геометрической алгебре». Однако уже сегодня можно предвидеть, что наряду с гладкими лупами и квазигруппами здесь все более возрастающую роль будут играть гладкие алгебраические системы более сложной природы.

Отметим также, что в силу ограниченности рамок обзора мы оставили в стороне некоторые вопросы теории такие, как дифференциальные уравнения гладких луп, теорию представлений гладких луп и квазигрупп, вопросы приложений геометрической алгебры в физике (теории относительности, теории калибровочных полей, теории дислокаций), гамильтоновой механике и других вопросах естествознания. Надеемся осветить эти вопросы в последующих обзорах.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КОНСТРУКЦИИ

Определение 1.1. Будем говорить, что $(Q, \times, \diagdown, e)$ — левая локальная лупа с двусторонней единицей, если Q является топологическим пространством с фиксированным элементом e и для некоторой окрестности U элемента e определены непрерывные отображения

$$U\times U\to Q$$
$$((a,b)\mapsto a\times b), \ ((a,b)\mapsto a\diagdown b),$$

удовлетворяющие условиям:

1) если $a\in U$, то $e\times a=a\times e=a$,
2) если a, b, $a\times b\in U$, то $a\diagdown(a\times b)=b$,
3) если a, b, $a\diagdown b$, то $a\times(a\diagdown b)=b$.

Если Q — многообразие класса C^k $(0\leqslant k\leqslant\omega)$ и отображения $(a,b)\mapsto a\times b$, $(a,b)\mapsto a\diagdown b$ также суть класса C^k, то $(Q, \times, \diagdown, e)$ называется левой локальной лупой класса C^k. Если в качестве U взять все пространство Q, то $(Q, \times, \diagdown, e)$ называется левой (глобальной) топологической лупой или, соответственно, левой (глобальной) C^k-гладкой лупой.

Пусть $(Q, \times, \diagdown, e)$ — C^k-гладкая $(k\geqslant 1)$ левая локальная лупа с двусторонней единицей. Отображение

$$Q\times Q\to Q\times Q \ ((a,b)\mapsto(a\times b, b))$$

определено в некоторой окрестности точки (e, e) в $Q\times Q$ и является локальным диффеоморфизмом класса C^k $(k\geqslant 1)$, поэтому существует такое C^k-гладкое отображение

$$Q\times Q\to Q\times Q \quad ((c, b)\mapsto (c/b, b)),$$

что $(c/b)\times b=c$, $(c\times b)/b=c$ для любых b, c из Q, достаточно близких к e. Таким образом, структуру C^k-гладкой $(k\geqslant 1)$ левой локальной лупы $(Q, \times, \diagdown, e)$ с двусторонней единицей можно пополнить C^k-гладким правым делением $(/)$.

Аналогичным образом [28] локальные C^k-гладкие операции левого и правого деления можно ввести в произвольном C^k-гладком $(k\geqslant 1)$ группоиде $(Q, \times, e)$ с двусторонней единицей, так что $(Q, \times, \diagdown, /, e)$ будет локальной двусторонней лупой класса C^k. Таким образом, имеет смысл говорить о локальных C^k-гладких $(k\geqslant 1)$ лупах $(Q, \times, e)$, не выделяя их левосторонней или правосторонней специфики.

Замечание 1.2. Следует отметить, что теория гладких локальных луп и теория гладких глобальных луп существенно различны. Можно указать примеры гладких локальных луп, которые не допускают продолжения до глобальных гладких луп (так, геодезическая лупа, связанная с произвольной точкой симметрического пространства SO(3)/SO(2), является локальной аналитической лупой, не допускающей глобального аналитического продолжения; см. также [18]). Отметим также, что с точки зрения приложений в дифференциальной геометрии и теории однородных пространств интерес представляют именно локальные гладкие лупы, они и составляют в настоящем обзоре основной предмет рассмотрений. □

Понятно, что класс гладких локальных луп чрезвычайно широк: фактически задание на Q структуры гладкой локальной лупы сводится к заданию в точке (e, e) из $Q\times Q$ ростка такой гладкой функции

$$f: Q\times Q\to Q,$$

что $f(a, e)=f(e, a)=a$ для любых a из Q, достаточно близких к e. Поэтому интенсивному исследованию до настоящего времени были подвергнуты лишь некоторые специальные классы луп. Активно исследуются классы гладких луп, связанные с тождествами Муфанг и Бола, с условием изотопически инвариантной моноассоциативности и другими условиями, выявленными в ходе развития неассоциативной алгебры (см. [10], [65]).

Предостережем, что заимствование тематики из алгебраической теории квазигрупп и луп должно быть критическим: опыт показывает, что теорию гладких квазигрупп не всегда следует трактовать по формуле «неассоциативная алгебра+ +гладкость», что существенные результаты удается получить в тех случаях, когда рассматриваемые классы луп допускают некоторую содержательную геометрическую интерпретацию.

Именно поэтому мы здесь рассматриваем теорию гладких квазигрупп и луп как теорию геометрическую и перспективы ее развития связываем с приложениями в традиционных разделах геометрии, в первую очередь — в дифференциальной геометрии и теории однородных пространств (см. §§ 3—6 ниже).

1.1. Касательные бинарно-тернарные алгебры. Пусть $(Q, \times, e)$ — гладкая локальная лупа класса C^k $(k \geqslant 3)$. В пространстве $\mathfrak{q} = T_e(Q)$, касательном к многообразию Q в точке e, введем структуру бинарно-тернарной алгебры, положив $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{q}$

$$\xi \cdot \eta = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} [(\beta(t) \times \alpha(t)) \diagdown (\alpha(t) \times \beta(t))] |_{t=0}, \tag{1.1}$$

$$\langle \xi, \eta, \zeta \rangle = \frac{1}{6} \frac{d^3}{dt^3} [\alpha(t) \times (\beta(t) \times \gamma(t))] \diagdown [(\alpha(t) \times \beta(t)) \times \gamma(t)] |_{t=0}, \tag{1.2}$$

где $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ — гладкие кривые в Q, при $t=0$, проходящие через точку e с касательными векторами ξ, η, ζ, соответственно.

Предложение 1.3 (М. А. Акивис [2]). $\forall \xi, \eta, \zeta \in T_e(Q)$ выполняются соотношения

$$\xi \cdot \xi = 0, \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \xi\eta \cdot \zeta + \eta\zeta \cdot \xi + \zeta\xi \cdot \eta = \langle \xi, \eta, \zeta \rangle + \langle \eta, \zeta, \xi \rangle + \\ + \langle \zeta, \xi, \eta \rangle - \langle \eta, \xi, \zeta \rangle - \langle \xi, \zeta, \eta \rangle - \langle \zeta, \eta, \xi \rangle. \ \bigcirc \end{aligned} \tag{1.4}$$

Конструкция бинарно-тернарной касательной алгебры достаточно естественна (операции ее описывают главную линейную часть отклонения от коммутативности и ассоциативности), впервые она была опубликована М. А. Акивисом [2], [3] в связи с теорией многомерных три-тканей. Оказалось, что совокупность бинарно-тернарных алгебр, касательных к координатным лупам три-ткани, однозначно определяет ее строение, подобно тому, как поля тензоров кривизны и кручения однозначно определяют структуру пространства аффинной связности.

С другой стороны, построение инфинитезимального объекта, адекватным образом отражающего строение гладких локальных луп, является одной из основных проблем при изучении специальных классов луп. Отметим, что постановка задачи здесь отлична от случая три-тканей: гладкой локальной лупе ставится в соответствие только одна алгебра, оснащенная некоторым набором полилинейных операций. Естественным ограничением при этом является требование аналитичности рассматриваемых гладких луп. Оказалось, что для некоторых классов гладких луп (локальные аналитические лупы Муфанг и Бола, однородные лупы Ли и т. д.) подходящим инфинитезимальным объектом является описанная выше (или ей эквивалентная) бинарно-тернарная касательная алгебра; такие случаи мы подробно обсуждаем ниже. Отметим также, что в последнее время в рассмотрении оказались классы гладких луп, которые требуют для своего описания три (см., например, [60]) или даже бесконечное число полилинейных операций (см. [51], [52]). Соответствующую инфинитезимальную конструкцию мы рассмотрим в §§ 6, 7.

1.2. Нормальные координаты в лупе. Одули. Пусть $(Q, \times, e)$ — локальная лупа класса C^k $(k\geqslant 2)$ с ассоциативными степенями, т. е. локально

$$a^m\times a^k=a^{m+k} \tag{1.5}$$

для любых таких целых чисел m и k, что левая и правая части соотношения имеют смысл, тогда для произвольного вектора $\xi\in T_e(Q)$ существует в Q такая однопараметрическая подгруппа $\gamma(t)$ с каноническим параметром $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)\subset\mathbf{R}$, что $\gamma(0)=e$ и $\dot\gamma(0)=\xi$ [26], [86], [87], [113]. Следовательно, для произвольной C^k-гладкой $(k\geqslant 2)$ локальной лупы с ассоциативными степенями $(Q, \times, e)$ можно ввести в рассмотрение C^{k-1}-гладкое отображение $\operatorname{Exp}: T_e(Q)\to Q$, $(\xi\mapsto\gamma(1)$, где $\gamma(t)$ — такая однопараметрическая подгруппа в Q, что $\dot\gamma(0)=\xi)$, определенное в некоторой окрестности нуля в векторном пространстве $T_e(Q)$, касательном к многообразию Q в точке e. В частности, в некоторой окрестности нейтрального элемента e в Q можно ввести нормальные координаты, связанные преобразованиями класса C^{k-1} с исходными, и локальное умножение на скаляры t из $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R}\times Q\to Q\quad((t,\ a)\mapsto t_ea=\operatorname{Exp}(t\operatorname{Exp}^{-1}(a))). \tag{1.6}$$

Соответствие (1.6) определено в некоторой окрестности точки $(0, e)$ в $\mathbf{R}\times Q$, описывается C^{k-1}-гладкими функциями и локально удовлетворяет соотношениям одулярности

$$\begin{gathered}(t+u)_ea=(t_ea)\times(u_ea),\\ t_e(u_ea)=(tu)_ea,\\ 1_ea=a.\end{gathered} \tag{1.7}$$

Описанная алгебраическая структура $(Q, \times, e, \{t_e\}_{t\in\mathbf{R}})$ называется C^{k-1}-гладким локальным одулем [41], [42].

Замечание 1.4. Тождество моноассоциативности (1.7) оказывается выполненным для многих классов гладких луп, активно исследуемых в настоящее время. Это объясняется существующими связями с дифференциальной геометрией (см. ниже). □

1.3. Геодезические лупы (одули) пространств аффинной связности. Геоодулярные пространства. Рассмотрим C^k-гладкое $(k\geqslant 1)$ пространство аффинной связности (M, ∇). В нормальной окрестности U произвольной точки e из M введем локальный закон композиции

$$a \underset{e}{\cdot} b = \left(\mathrm{Exp}_a \circ \tau^e_a \circ \mathrm{Exp}_e^{-1}\right)(b), \tag{1.8}$$

где $\underset{\smile}{\tau^e_a}$ — параллельный перенос из e в a вдоль геодезической дуги $\overset{\frown}{ea}$ и $\mathrm{Exp}_x : T_x(M) \to M$ — экспоненциальное отображение в точке x. В этом случае точка e является нейтральным элементом операции $(\underset{e}{\cdot})$, соответственно $(M, \underset{e}{\cdot}, e)$ является локальной лупой класса C^k и называется **геодезической лупой** пространства аффинной связности (M, ∇) в точке e [41], [42], [93].

Удобно дополнить структуру локальной геодезической лупы $(M, \underset{e}{\cdot}, e)$ локальным умножением на скаляры t из $\mathbf{R}$, положив

$$t_e a = \mathrm{Exp}_e\left(t\, \mathrm{Exp}_e^{-1}(a)\right), \tag{1.9}$$

тогда $(M, \underset{e}{\cdot}, e, \{t_e\}_{t \in \mathbf{R}})$ — локальный одуль класса C^k, он называется **геодезическим одулем** пространства аффинной связности (M, ∇) в точке e [41], [42].

Геодезические одули в различных точках пространства аффинной связности (M, ∇) связаны локальными **соотношениями геоодулярности** [41], [42] $\forall a, b \in M$, $\forall u, t \in \mathbf{R}$,

$$L^a_b \circ t_a = t_b \circ L^a_b, \quad L^{u_a b}_{t_a b} \circ L^a_{u_a b} = L^a_{t_a b}, \tag{1.10}$$

где $L^a_b : M \to M$ $(x \mapsto b \underset{a}{\cdot} x)$. Произвольное многообразие M класса C^k $(k \geqslant 0)$, с каждой точкой которого связан C^k-гладкий локальный одуль $(M, \underset{a}{\times}, a, \{t_a\}_{t \in \mathbf{R}})$ так, что соотношения геоодулярности (1.10) выполнены, называется **геоодулярным пространством** класса C^k [41], [42], оно является частичной алгеброй и обозначается $(M, L, (\omega_t)_{t \in \mathbf{R}})$, где $L(x, a, y) = x \underset{a}{\cdot} y$, $\omega_t(a, b) = t_a b$.

Теорема 1.5 (Л. В. Сабинин [41], [42]). *Произвольное геоодулярное пространство $(M, L, (\omega_t)_{t \in \mathbf{R}})$ класса C^k $(k \geqslant 3)$ можно наделить единственной C^{k-2}-гладкой аффинной связностью ∇ такой, что локально в окрестности произвольной точки a из M*

$$L(x, a, y) = x \underset{a}{\cdot} y,$$

где $(\underset{a}{\cdot})$ — закон композиции в геодезическом одуле $(M, \underset{a}{\cdot}, a, \{t_a\}_{t \in \mathbf{R}})$ пространства аффинной связности (M, ∇). ☐

Новый подход к геометрии пространств аффинной связности — теория геоодулярных пространств — сложился в работах Л. В. Сабинина [41], [42] и др., относительно конструкции геодезических луп см. также [93], [96]. В [44] исследован класс гладких одулей, которые могут служить геодезическими одулями пространств аффинной связности. Доказана

Теорема 1.6. Локальный одуль $(M, \times, e, \{t_e\}_{t\in\mathrm{R}})$ класса C^ω может быть реализован как геодезический одуль в точке e относительно некоторой C^ω-гладкой аффинной связности ∇ на M в том и только том случае, если он удовлетворяет условию геометричности, т. е. локально $\forall a,\ b\in M$ и $\forall t\in\mathbf{R}$

$$l_{a,b}(t_e b)=t_e l_{a,b}(b), \qquad (1.11)$$

где

$$l_{a,b}=L^{-1}_{a\times b}\circ L_a\circ L_b, \quad L_a y=a\times y. \ \square$$

Отметим, что удовлетворяющая условиям теоремы 1.6 аффинная связность ∇ в общем случае не единственна. Тем не менее в целом ряде случаев оказывается возможным установить взаимно однозначное соответствие между лупами из некоторых специальных классов и пространствами аффинной связности, удовлетворяющими некоторым дополнительным условиям (см. §§ 3—6).

Замечание 1.7. Введение в геодезической лупе $(M, \cdot_e, e)$, связанной с произвольной точкой e пространства аффинной связности (M, ∇), дополнительной операции внешнего умножения на скаляры $\{t_e\}_{t\in}{}^{\mathrm{R}}$ оправдано рядом обстоятельств. Во-первых, при доказательстве структурных теорем для гладких луп (или групп), как правило, используются нормальные координаты, введение которых по существу эквивалентно заданию дополнительного умножения на скаляры. Далее, наличие операции умножения на скаляры из $\mathbf{R}$ позволяет алгебраически трактовать структуру геодезических пространства аффинной связности (M, ∇), что уже интересно само по себе (см. § 4, а также [29]), а с другой стороны — просто необходимо, например, при формулировке условий геоодулярности (1.10). $\square$

В [1] рассмотрены геоодулярные структуры многообразий с почти-комплексной и комплексной аффинной связностью.

Согласно [3] операции бинарно-тернарной алгебры (1.1)—(1.2) геодезической лупы $(M, \cdot_e, e)$ в произвольной точке e многообразия аффинной связности (M, ∇) имеют вид

$$\forall\xi,\ \eta,\ \zeta\in T_e(M)$$

$$\xi\cdot\eta=-T(\xi, \eta), \qquad (1.12)$$

$$\langle\xi,\ \eta,\ \zeta\rangle= \quad (R(\xi,\ \eta)\zeta-(\nabla T)(\xi;\ \eta,\ \zeta)), \qquad (1.13)$$

где T и R суть соответственно тензоры кручения и кривизны в точке e аффинной связности ∇.

При изучении пространств аффинной связности, богатых симметриями (см. [35]—[37], [42], [58], [59], [96], [110]—[112]), естественным образом возникли понятия лупускулярной структуры и касательной связности лупускулярной структуры, обобщающие конструкцию геоодулярных пространств (см. [43]). Говорят, что на гладком многообразии M задана лупускулярная структура класса C^k, если на некоторой окрестности каждой его точки a определена локальная C^k-гладкая лупа (лупускула) $(M, \underset{a}{\times}, a)$ с нейтральным элементом a. Касательная аффинная связность ∇ вводится по тому же правилу, что и в случае геоодулярного пространства: если X и Y — векторные поля, заданные в некоторой окрестности произвольной точки p из M, и $\gamma(t)$ — интегральная кривая векторного поля X, при $t=0$, проходящая через точку e, то

$$(\nabla_X Y)_p = \left\{\frac{d}{dt}\left[\left(L^p_{\gamma(t)}\right)^{-1}_{*,p} Y_{\gamma(t)}\right]\right\}_{t=0},$$

где $L^b_a c = a \underset{b}{\times} c$ (см. [44], [45]). При этом геодезическая лупа $(M, \underset{p}{\cdot}, p)$, связанная с произвольной точкой p пространства аффинной связности (M, ∇), в общем случае будет отлична от гладкой локальной лупы $(M, \underset{p}{\times}, p)$, тем не менее имеет место определенное наследование свойств. Так, все лупы соответствующего геоодулярного пространства оказываются левоспециальным, если исходная лупускулярная структура обладала этим свойством, при этом пространство (M, ∇) оказывается локально-редуктивным [43].

1.4. Однородные пространства, связанные с лупами. Известно [38], [39], что произвольная (алгебраическая) левая лупа с двусторонней единицей $(Q, \times, \diagdown, e)$ допускает вложение в некоторую группу, т. е. существуют группа (G, Δ, e), подгруппа H в G и вложение $i: Q \to H$ такие, что после отождествления $i(Q)$ и Q имеем: Q является сечением левых классов смежности $G \bmod H$ (т. е. $\forall g \in G$ существуют единственные элементы $q \in Q$ и $x \in H$ такие, что $g = q\Delta x$) и

$$\forall a, b \in Q \quad a \times b = \pi_Q(a \Delta b),$$

где $\pi_Q : G \to Q \cong G/H$ — естественная проекция.

В теории гладких локальных луп значение имеет следующая конструкция. Пусть (G, Δ, e) — локальная группа Ли и H — ее связная подгруппа (замкнутая), обозначим через $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ соответствующую им алгебру Ли и подалгебру. Введем в рассмотрение векторное подпространство $\mathfrak{q}$ в $\mathfrak{g}$, дополнительное к $\mathfrak{h}$, т. е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \dot{+} \mathfrak{h}$ (прямая сумма векторных пространств). Пусть $\pi : G \to G/H$ — естественная проекция, $i : \mathfrak{q} \to \mathfrak{g}$ — вложение и ψ — ограничение на $\mathfrak{q}$ композиции отображений $\pi \circ \exp$, тогда существует такая окрестность U точки 0 в $\mathfrak{q}$, что ψ отображает ее диффеоморфно на некоторую окрестность класса $\pi(e)$ в G/H.

На точках локального сечения $Q = \exp U$ левых классов смежности $G \bmod H$ введем локальный закон композиции

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{q} \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "\psi"] & \mathfrak{g} \arrow[d, "\exp"] \\
G/H & G \arrow[l, "\pi"']
\end{tikzcd}$$

$$a\times b=\pi_Q(a\Delta b), \tag{1.14}$$

где $\pi_Q=\exp\circ\psi^{-1}\circ\pi : G\to Q$ — локальная проекция на Q параллельно H. Тогда $(Q, \times, e)$ — локальная аналитическая лупа со свойством левой моноальтернативности, т. е. локально для любых целых чисел k, m и любых элементов a, b из Q

$$a^k\times(a^l\times b)=a^{k+l}\times b. \tag{1.15}$$

О локальных аналитических лупах $(Q, \times, e)$, допускающих представление вида (1.14), будем говорить, что они допускают вложение в группы Ли или что они являются аналитическими лупами конечного типа (см. §§ 6, 7 об общей теории аналитических луп).

Таким образом, в нашем распоряжении имеется по крайней мере четыре различных подхода для постановки и решения задач о гладких локальных лупах:

1. Исследовать класс гладких локальных луп, удовлетворяющих определенным алгебраическим тождествам или условиям.

2. Изучить пространства аффинной связности, соответствующие лупам указанного класса.

3. Построить инфинитезимальный объект, адекватным образом соответствующий гладким локальным лупам данного вида.

4. Описать однородные пространства, связанные с лупами данного вида.

Связи неассоциативной алгебры с геометрией многообразны, в настоящем обзоре мы опишем лишь некоторые из них. При этом вне рассмотрений мы оставим цикл работ по геометрии тканей. Отметим, что проблематика теории гладких квазигрупп и луп и дифференциальной геометрии тканей связаны друг с другом: развитый геометрический язык и аналитическая техника теории тканей оказались эффективными при исследовании изотопически инвариантных свойств гладких квазигрупп и луп. Укажем достаточно полный обзор по теории тканей [4]*.

Вне рамок настоящего обзора остались также работы по теории топологических луп, а также по теории неассоциативных алгебраических структур, связанных с топологическими проективными плоскостями (см. [11]—

---

*) См. также РЖМат, 1973, 2А602; 1988, 4А670 — *Примечание рецензента.*

[13], [57], [63], [68], [77], [81], [82], [89]—[91], [137], [139], [140] и др.), отметим по этому поводу обзор [83].

В последнее время наметился разрыв между теорией топологических луп и теорией гладких луп: в то время, как в теории гладких квазигрупп и луп в 70-х—80-х годах был получен целый ряд содержательных результатов, теория топологических луп до сих пор пребывает в начальной стадии своего развития. Отчасти это объясняется неудачным выбором объекта исследований: до настоящего времени это были глобальные двусторонние топологические лупы, с дополнительными топологическими условиями технического содержания. При этом исследованные классы топологических луп, как правило, бедны примерами и порой мало отличаются от класса топологических групп. Перспективы развития теории, по нашему мнению, связаны с построением теории локальных топологических левых луп и приложениями к исследованиям C^0-гладких пространств аффинной связности [6], топологических пространств с геодезическими [29], [71], топологических однородных пространств.

В последующем под гладкими локальными лупами мы будем понимать, если не оговорено противное, C^∞-гладкие локальные лупы.

§ 2. ГЛАДКИЕ ЛУПЫ МУФАНГ И АЛГЕБРЫ МАЛЬЦЕВА

Определение 2.1. Гладкая локальная лупа $(Q, \times, e)$ называется диассоциативной, если подлупа в Q, порожденная произвольной парой элементов из Q, является группой. Гладкая локальная лупа $(Q, \times, e)$ называется лупой Муфанг, если для любых a, b, c из Q, достаточно близких к e, выполнено соотношение:

$$(a\times b)\times(c\times a)=(a\times(b\times c))\times a. \tag{2.1}$$

Определение 2.2. Конечномерная антикоммутативная алгебра $\mathfrak{q}(\cdot)$ над полем действительных чисел $\mathbf{R}$ называется бинарно-лиевой, если любая пара ее элементов содержится в некоторой лиевой подалгебре.

Диассоциативные локальные аналитические лупы и соответствующие им бинарные касательные алгебры рассматривались А. И. Мальцевым [28]. Им была доказана

Теорема 2.3. Касательная алгебра аналитической локальной диассоциативной лупы является бинарно-лиевой. Каждая бинарно-лиева алгебра есть касательная алгебра одной и с точностью до локальных изоморфизмов только одной локальной диассоциативной лупы. ☐

А. И. Мальцев рассматривал также подкласс в классе диассоциативных локальных аналитических луп — локальные аналитические лупы Муфанг, он показал, что касательная бинарная алгебра $\mathfrak{q}=T_e(Q)$ произвольной локальной аналитической лупы Муфанг $(Q, \times, e)$ является антикоммутативной и удовлетворяет условию

$$\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{q}$$

$$\xi\eta\cdot\xi\zeta=(\xi\eta\cdot\zeta)\xi+(\eta\zeta\cdot\xi)\xi+(\zeta\xi\cdot\xi)\eta \tag{2.2}$$

или, что эквивалентно,

$$J(\xi, \eta, \zeta)\cdot\xi=J(\xi, \eta, \zeta\cdot\xi), \tag{2.3}$$

где $J(\xi, \eta, \zeta)=\xi\eta\cdot\zeta+\eta\zeta\cdot\xi+\zeta\xi\cdot\eta$. Впоследствии такие алгебры были названы алгебрами Мальцева.

Теорема 2.4 (Е. Н. Кузьмин, [26], [113]). Касательная алгебра локальной аналитической лупы Муфанг является алгеброй Мальцева. Каждая конечномерная алгебра Мальцева над полем действительных чисел есть касательная алгебра одной и с точностью до локальных изоморфизмов только одной локальной аналитической лупы Муфанг. □

А. Т. Гайнову [15] удалось охарактеризовать бинарно-лиевы алгебры $\mathfrak{q}(\cdot)$ как алгебры с антикоммутативной операцией $(\cdot)$, удовлетворяющие тождеству

$$J(\xi\cdot\eta, \xi, \eta)=0 \tag{2.4}$$

(см. также [129], [131]). О современном состоянии теории см. [17].

В [24]—[28], [127]—[129], [149], [150] была развита чрезвычайно полная структурная теория алгебр Мальцева, в деталях повторяющая теорию алгебр Ли. Исследования ориентированы на классы алгебр Мальцева над полями **R** и **C**, но основные результаты сформулированы для алгебр Мальцева над произвольным полем характеристики нуль. Наивысшим достижением теории в настоящее время является аналог теоремы Леви о разложении произвольной алгебры Мальцева над полем характеристики нуль в полупрямую сумму разрешимого радикала и полупростой подалгебры [16], [27]. Отметим один важный вопрос, который до сих пор не разрешен в теории алгебр Мальцева: допускает ли произвольная алгебра Мальцева обертывающую альтернативную алгебру?

В работах Ф. С. Кердмана [20]—[22] были рассмотрены вопросы теории аналитических луп Муфанг в целом: обоснована возможность включения произвольной локальной аналитической лупы Муфанг в глобальную, доказан аналог теоремы Шрайера о продолжении локального гомоморфизма глобальных аналитических луп Муфанг, специально рассмотрены аналитические лупы Муфанг с разрешимыми касательными алгебрами Мальцева.

Теория аналитических луп Муфанг и соответствующих им алгебр Мальцева была построена в рамках алгебры. Параллельно сложились некоторые представления о той чрезвычайно интересной геометрии, которая стоит за этим классом луп. Отметим в этой связи пионерскую работу Лооса [117]. В пространстве произвольной алгебры Мальцева $\mathfrak{q}(\cdot)$ над произвольным полем характеристики нуль автор вводит структуру тройной системы Ли (см. § 3 ниже), положив

$$\forall \xi,\ \eta,\ \zeta \in \mathfrak{q}$$

$$(\xi,\ \eta,\ \zeta) = 2\xi\eta\cdot\zeta - \eta\zeta\cdot\xi - \zeta\xi\cdot\eta, \qquad (2.5)$$

и показывает, что алгебра Мальцева $\mathfrak{q}(\cdot)$ разрешима (полупроста, проста) в том и только том случае, если соответствующая тройная система обладает этим свойством, что радикалы алгебры Мальцева и соответствующей тройной системы совпадают и т. д. В частности, он получает следующий классификационный результат (алгебраическими методами этот результат был получен Сейглом [126], [127], см. также [23]).

Теорема 2.5. Простая нелиева конечномерная алгебра Мальцева над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль изоморфна 7-мерной алгебре Кэли—Диксона. □

Отметим, что предложенный Лоосом способ изложения теории алгебр Мальцева элегантен и чрезвычанйо экономичен (см. также [24], [123], [124]), что объясняется стоящим за ним и выявленным позже геометрическим содержанием.

В [46] рассмотрен аналог конструкции Лооса в терминах операции лупы. Доказана

Теорема 2.6. На многообразии глобальной аналитической лупы Муфанг $(M, \times, e)$ существует структура полного аффинного симметрического пространства, инвариантная относительно действия группы сдвигов, порожденной диффеоморфизмами $\{L_a, R_a \mid a \in M\}$, которая действует на M транзитивно. □

П. О. Михеев [31] охарактеризовал класс симметрических пространств, удовлетворяющих условиям теоремы 2.6. Оказалось, что задача описания указанного класса пространств аффинной связности (пространства аффинной связности без кручения, допускающие совместный абсолютный параллелизм [72]) имеет более чем полувековую историю [61], [72], [73], [143], полученные при этом результаты во многом аналогичны результатам из теории алгебр Мальцева. Так Вольфом [143] была решена задача об определении неприводимых (в смысле действия инфинитезимальной группы голономии) псевдоримановых пространств, допускающих совместный абсолютный параллелизм векторов; он установил, что каждое такое пространство локально изоморфно либо пространству простой группы Ли, оснащенному инвариантной симметрической связностью, либо одному из трех симметрических пространств:

$$S^7 \cong SO(8)/SO(7),$$

$$S^3 \times R^4 \cong SO(4,4)/SO(3,4),$$

$$S^7 \times R^7 \cong SO(8, C)/SO(7, C).$$

Аналогичная задача в теории алгебр Мальцева — классификация нелиевых простых алгебр Мальцева над полем $\mathbf{R}$ — была решена Е. Н. Кузьминым в 1968 г. Список нелиевых простых алгебр Мальцева над полем $\mathbf{R}$ включает в себя две центральные простые алгебры Мальцева размерности 7 и одну нецентральную алгебру Мальцева размерности 14. Используя конструкцию Вольфа, можно предложить для них следующее описание.

Пусть $\mathfrak{g}=\mathrm{so}(8)$, $\mathfrak{h}=\mathrm{so}(7)$ — стандартно вложенная подалгебра в $\mathfrak{g}$, $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ — автоморфизм тройственности и $\mathfrak{m}$ — ортогональное дополнение к $\mathfrak{h}$ в метрике Киллинга. Введем на $\mathfrak{m}$ билинейный закон композиции векторов $(\cdot)$

$$\forall \xi, \eta \in \mathfrak{m} \ \xi \cdot \eta = [\xi, \eta]_m,$$

где $[\xi, \eta]$ обозначает результат коммутирования векторов в $\mathfrak{g}$ и $[\xi, \eta]_m$ — проекцию вектора $[\xi, \eta]$ на $\mathfrak{m}$ параллельно $\sigma(\mathfrak{h})$. Тогда $\mathfrak{m}(\cdot)$ — 7-мерная простая компактная алгебра Мальцева.

Аналогичная конструкция в случае $\mathfrak{g}=\mathrm{so}(4,4)$ и $\mathfrak{h}=\mathrm{so}(3,4)$ приводит к 7-мерной простой некомпактной нелиевой алгебре Мальцева, а в случае $\mathfrak{g}=\mathrm{so}(8, \mathbf{C})$, $\mathfrak{b}=\mathrm{so}(7, \mathbf{C})$ — к 14-мерной простой некомпактной нелиевой алгебре Мальцева (над полем действительных чисел $\mathbf{R}$).

Ямагути [147], [148] исследовал связи между алгебрами Мальцева и тройными алгебрами Ли (см. § 3 ниже). Можно показать, что антикоммутативная алгебра $\mathfrak{q}(\cdot)$ над полем характеристики нуль является алгеброй Мальцева в том и только том случае, если

$$\forall \xi, \eta, \zeta, \varkappa \in \mathfrak{q}$$

$$D(\xi, \eta)(\zeta \cdot \varkappa) = (D(\xi, \eta)\zeta) \cdot \varkappa + \zeta \cdot (D(\xi, \eta)\varkappa),$$

где $D(\xi, \eta)\zeta = \xi \cdot \eta\zeta - \eta \cdot \xi\zeta + \xi\eta \cdot \zeta$, т. е. отображения $D(\xi, \eta) : \mathfrak{q} \to \mathfrak{q}$ являются дифференцированиями билинейной операции $(\cdot)$. При этом векторное пространство $\mathfrak{q}$, оснащенное операциями $\xi \cdot \eta$ и $(\xi, \eta, \zeta) = D(\xi, \eta)\zeta$, является тройной алгеброй Ли.

§ 3. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЛОКАЛЬНО РЕДУКТИВНЫХ И ЛОКАЛЬНО СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Общеизвестно значение локально редуктивных и локально симметрических пространств в современной дифференциальной геометрии. Лоос [118] показал, что произвольное симметрическое пространство можно рассматривать как гладкую квазигруппу с некоторыми тождествами (идемпотентную, леводистрибутивную, с левым свойством обратимости). Завершенную алгебраическую теорию локально редуктивных и локально симметрических пространств разработал, используя работы Киккавы, Л. В. Сабинин, осуществив следующую программу исследований:

1. Описать геодулярные пространства, соответствующие локально редуктивным (локально симметрическим) пространствам аффинной связности, т. е. описать связи между геодезическими лупами в различных точках пространств указанного вида.

2. Получить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы гладкая локальная лупа могла служить геодезической лупой локально редуктивного (локально симметрического) пространства.

3. Построить инфинитезимальный объект, адекватным образом соответствующий гладким лупам указанных классов.

Полученные результаты привносят новую идеологию в геометрию, так как они позволяют, например, корректно определить понятие C^0 и C^1-гладкого редуктивного (симметрического) пространства. Не вовлекая в рассмотрение дифференциальное исчисление и топологию, можно ограничиться изучением чисто алгебраических свойств редуктивных и симметрических пространств, например, с конечным числом элементов (при этом вместо поля скаляров $\mathbf{R}$ следует рассматривать некоторое конечное поле). Подобные конструкции, близкие по духу к Эрлангенской программе Клейна, несомненно привлекут внимание специалистов, интересующихся основаниями геометрии и геометрической алгеброй.

Сформулируем основные результаты [42], [43], [94], [96], [97].

Теорема 3.1 (Л. В. Сабинин [42]). Гладкое многообразие аффинной связности (M, ∇) локально редуктивно (т. е. $\nabla T=0$, $\nabla R=0$) в том и только том случае, если левые сдвиги его естественной геодулярной структуры $(M, L, (\omega_t)_{t\in\mathbf{R}})$ являются ее локальными изоморфизмами, т. е. локально $\forall a, b, c, d\in M$, $\forall t\in\mathbf{R}$

$$L_b^a \circ L_d^c = L_{L_b^a d}^{L_b^a c} \circ L_b^a \tag{3.1}$$

(первое тождество редуктивности) и

$$L_b^a \circ t_c = t_{L_b^a c} \circ L_b^a \tag{3.2}$$

(второе тождество редуктивности). □

Пусть $(Q, \times, e)$ — гладкая локальная лупа, введем обозначение $l_{a,b}=L_{a\times b}^{-1} \circ L_a \circ L_b$, тогда имеет место

Теорема 3.2 (Л. В. Сабинин [42]). Гладкая локальная лупа $(Q, \times, e)$ может служить геодезической лупой некоторой локально редуктивной связности ∇ на Q в том и только том случае, если локально $\forall a, b, c \in Q$, $\forall t \in \mathbf{R}$

$$l_{a,b} \circ L_c = L_{l(a,b)c} \circ l(a, b) \tag{3.3}$$

(левое специальное свойство),

$$L_{t_e a} \circ L_{u_e a} = L_{(t+u)_e a} \tag{3.4}$$

(свойство левой моноальтернативности). □

В условиях теоремы 3.2 локально редуктивная связность ∇ (или, что эквивалентно, соответствующая геоодулярная структура) определяется однозначно. Действительно: из (3.1) имеем, что в этом случае

$$L_b^a = L_a \circ L_{L_a^{-1} b} \circ L_a^{-1}. \tag{3.5}$$

Гладкие локальные лупы $(Q, \times, e)$, удовлетворяющие условиям теоремы 3.2, допускают вложение в локальные группы Ли (в смысле конструкции (1.14)). Локальная аналитическая лупа $(Q, \times, e)$ на локальном сечении $Q = \exp U$ пространства левых классов смежности $G \operatorname{mod} H$ (где (G, Δ, e) — локальная группа Ли, H — ее связная (замкнутая) подгруппа, $\mathfrak{q}$ — векторное подпространство в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, соответствующей группе G, дополнительное к подалгебре $\mathfrak{h}$, соответствующей подгруппе H, и U — окрестность нуля в $\mathfrak{q}$, см. формулу (1.14)) удовлетворяет условиям теоремы 3.2 в том и только том случае, если [39]

$$\forall x \in H \quad x \Delta Q \Delta x^{-1} \subset Q \tag{3.6}$$

(свойство редуктивности).

Отметим, что условия гладкости в теоремах 3.1—3.2 можно существенным образом понизить, так как в условиях $\nabla T = 0$, $\nabla R = 0$ C^k-гладкая $(k \geqslant 4)$ связность ∇ является аналитической в координатах, нормальных относительно произвольной точки e.

Пусть (M, ∇) — многообразие локально редуктивной аффинной связности $(\nabla R = 0, \nabla T = 0)$; в пространстве $T_e(M)$, касательном к многообразию M в точке e, введем структуру бинарно-тернарной алгебры, касательной к геодезической лупе $(M, \underset{e}{\cdot}, e)$, положив $\forall \xi, \eta, \zeta \in T_e(M)$

$$\begin{aligned} \xi \cdot \eta &= -T(\xi, \eta), \\ (\xi, \eta, \zeta) &= -R(\xi, \eta)\zeta, \end{aligned} \tag{3.7}$$

тогда $\forall \xi, \eta, \zeta, \varkappa, \omega \in T_e(M)$

$$\begin{aligned} &\xi \cdot \xi = 0, \\ &(\xi, \xi, \eta) = 0, \\ &\mathfrak{S}\{(\xi, \eta, \zeta) + \xi\eta \cdot \zeta\} = 0, \\ &\mathfrak{S}\{(\xi \cdot \eta, \zeta, \varkappa)\} = 0, \\ &(\xi, \eta, \zeta \cdot \varkappa) = (\xi, \eta, \zeta) \cdot \varkappa + \zeta \cdot (\xi, \eta, \varkappa), \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$(\xi, \eta, (\zeta, \varkappa, \omega)) = ((\xi, \eta, \zeta), \varkappa, \omega) +$$
$$+ (\zeta, (\xi, \eta, \varkappa), \omega) + (\zeta, \varkappa, (\xi, \eta, \omega)),$$

где $\mathfrak{S}$ обозначает циклическую сумму по ξ, η, ζ.

Конечномерное векторное пространство $\mathfrak{q}$ над полем $\mathbf{R}$, наделенное билинейной и трилинейной операциями, удовлетворяющими тождествам (3.8), называется тройной алгеброй Ли. Имеет место взаимно однозначное (с точностью до локальных изоморфизмов) соответствие между тройными алгебрами Ли и геодезическими лупами локально редуктивных пространств. О связи тройных алгебр Ли и геодезических луп локально редуктивных пространств см. [9], [42], [96]—[109]; см. также работы [33], [34], представляющие исторический интерес.

Имеется развитая алгебраическая теория тройных алгебр Ли, начала которой восходят к работам Джекобсона [92] и Ямагути [145], о современном состоянии теории см. [100], [102]—[105], [107], [108]. Причины интереса к теории тройных алгебр Ли понятны: исследование тройных алгебр Ли — один из путей к классификации локально редуктивных пространств. Основополагающей при этом оказывается

Теорема 3.3. Пусть $\mathfrak{q}$ — конечномерная тройная алгебра Ли над полем $\mathbf{R}$, тогда существует конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$, подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ и такое линейное вложение $i : \mathfrak{q} \to \mathfrak{g}$, что после отождествления $i(\mathfrak{q})$ с $\mathfrak{q}$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \dotplus \mathfrak{h} \quad \text{(прямая сумма векторных пространств)},$$
$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q}$$

и $\forall \xi, \eta, \zeta \in \mathfrak{q}$

$$\xi \cdot \eta = [\xi, \eta]_{\mathfrak{q}},$$
$$(\xi, \eta, \zeta) = [[\xi, \eta]_{\mathfrak{q}}, \zeta],$$

где $[\xi, \eta]$ обозначает результат коммутирования векторов ξ и η в $\mathfrak{g}$, $[\xi, \eta]_{\mathfrak{q}}$ — проекцию вектора $[\xi, \eta]$ на $\mathfrak{q}$ параллельно $\mathfrak{h}$ и $[\xi, \eta]_{\mathfrak{h}}$ — проекцию вектора $[\xi, \eta]$ на $\mathfrak{h}$ параллельно $\mathfrak{q}$. При этом элементы подалгебры $\mathfrak{h}$ действует на $\mathfrak{q}$ как дифференцирования тройной алгебры Ли $\mathfrak{q}$. □

Целый ряд замечательных результатов о тройных алгебрах Ли получил Сейгл [128], [131]—[136]. При этом рассмотрение вопросов, связанных с бинарно-тернарными алгебрами $\mathfrak{q}$, соответствующими алгебрами Ли $\mathfrak{g}$ в редуктивном разложении

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \dotplus \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q},$$

автор систематически сводит к исследованию собственно бинарных антикоммутативных алгебр $\mathfrak{q}(\cdot)$

$$\forall \xi, \eta \in \mathfrak{q} \quad \xi \cdot \eta = [\xi, \eta]_{\mathfrak{q}} .$$

Так что рассмотрения автора оказываются, на наш взгляд, неоправдано усложненными дополнительными условиями и ограничениями технического характера.

Сформулируем следующую теорему.

Теорема 3.4 (Сейгл [128], [131]). Пусть $\mathfrak{q}(\cdot)$ — простая конечномерная антикоммутативная алгебра над произвольным полем K характеристики нуль, оснащенная дополнительной трилинейной операцией вида

$$(\xi, \eta, \zeta) = A\xi\eta\cdot\zeta + B\eta\zeta\cdot\xi + C\zeta\xi\cdot\eta, \text{ где } A, B, C \in K,$$

удовлетворяющей определяющим тождествам тройной алгебры Ли (см. (3.8)), тогда имеет место одна из следующих ситуаций:

1. $\mathfrak{q}(\cdot)$ — простая алгебра Ли и $B=C$, $A-B=1$;
2. $\mathfrak{q}(\cdot)$ — простая алгебра Мальцева и $A=-1$, $B=C=1$;
3. $\mathfrak{q}(\cdot)$ — простая алгебра, удовлетворяющая условию

$$J(\xi, \eta, \zeta)\varkappa = J(\varkappa, \xi, \eta\cdot\zeta) + J(\varkappa, \eta, \zeta\xi) + J(\varkappa, \zeta, \xi\cdot\eta)$$

и $A=\frac{1}{2}$, $B=C=\frac{1}{4}$.

Во всех трех случаях алгебра $\mathrm{Der}(\mathfrak{q})$, состоящая из всех дифференцирований операции $(\cdot)$, оказывается порожденной дифференцированиями вида

$$D(\xi, \eta): \mathfrak{q} \to \mathfrak{q} \quad (\zeta \mapsto (\xi, \eta, \zeta)),$$

и алгебра $\mathrm{Der}(\mathfrak{q})$ действует на $\mathfrak{q}$ вполне приводимым образом. □

Представляется интересным также следующий вопрос: определить эффективные условия на антикоммутативную билинейную операцию, необходимые и достаточные для того, чтобы ее можно было представить как билинейную операцию тройной алгебры Ли. Отметим, что тождество Мальцева (2.2) является достаточным условием этого [147], [148].

Обращаясь к случаю локально симметрических пространств аффинной связности и соответствующих геоодулярных пространств, сформулируем следующие теоремы ([42], см. также работу [19], имеющую исторический интерес).

Теорема 3.5 (Л. В. Сабинин, [42]). Гладкое многообразие аффинной связности (M, ∇) локально симметрично (т. е. $T=0$, $\nabla R=0$) в том и только том случае, если локальные диффеоморфизмы $\{s_a\}_{a\in M}$

$$s_a x = (-1)_a x$$

(геодезические симметрии) являются локальными изоморфизмами соответствующей геоодулярной структуры $(M, L, (\omega_t)_{t\in \mathrm{R}})$, т. е. локально $\forall a, b, c \in M$, $\forall t \in \mathrm{R}$

$$s_a \circ L_c^b = L_{s_a c}^{s_a b} \circ s_a,$$

$$s_a \circ t_b = t_{s_a b} \circ s_a,$$

при этом локально $\forall a, b \in M$

$$L_b^a = s_{\left(\frac{1}{2}\right)_a^b} \circ s_a. \ \square$$

Теорема 3.6 (Л. В. Сабинин, [42]). Гладкая локальная лупа $(Q, \times, e)$ может служить геодезической лупой некоторой локально симметрической связности ∇ на Q в том и только том случае, если локально $\forall a, b, c \in Q$

$$a \times (b \times (a \times c)) = (a \times (b \times a)) \times c \tag{3.9}$$

(левое тождество Бола),

$$(a \times b)^{-1} = a^{-1} \times b^{-1} \tag{3.10}$$

(свойство автоморфной обратимости). □

Замечание 3.7. Примечательно, что лупы, удовлетворяющие условиям (3.9) и (3.10), известны в неассоциативной алгебре (вне связи с дифференциальной геометрией) под названием луп Брака (см., например, [78], [124]). □

Конструкция тройной алгебры Ли (см. (3.8)) в случае геодезической лупы $(M, \cdot_e, e)$ в точке e локально симметрического пространства аффинной связности (M, ∇) вырождается в тройную систему Ли, т. е.

$$\forall \xi, \eta, \zeta \in T_e(M)$$

$$\xi \cdot \eta = 0, \ (\xi, \eta, \zeta) = -R(\xi, \eta)\zeta,$$

при этом $\forall \xi, \eta, \zeta, \varkappa, \omega \in T_e(M)$

$$\begin{gathered} (\xi, \xi, \eta) = 0, \\ (\xi, \eta, \zeta) + (\eta, \zeta, \xi) + (\zeta, \xi, \eta) = 0, \\ (\xi, \eta, (\zeta, \varkappa, \omega)) = ((\xi, \eta, \zeta), \varkappa, \omega) + \\ + (\zeta, (\xi, \eta, \varkappa), \omega) + (\zeta, \varkappa, (\xi, \eta, \omega)). \end{gathered} \tag{3.11}$$

Конечномерное векторное пространство $\mathfrak{q}$ над полем $\mathbf{R}$, наделенное трилинейной операцией, удовлетворяющей тождествам (3.11), называется тройной системой Ли. Имеет место взаимно однозначное (с точностью до локальных изоморфизмов) соответствие между тройными системами Ли и геодезическими лупами локально симметрических пространств. О теории тройных систем Ли см. [75], [76], [92], [116], [123], [145]. В [53] получены явные аналитические выражения для законов композиции геодезических луп пространств постоянной кривизны.

§ 4. ГЛАДКИЕ ЛЕВОДИСТРИБУТИВНЫЕ КВАЗИГРУППЫ И ОБОБЩЕННЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Симметрическое пространство, следуя Лоосу [118], можно трактовать как гладкое многообразие M, оснащенное гладким законом композиции $(*) : M \times M \longrightarrow M$ со свойствами $(\forall a \in M)$:

(4.1) $a*a=a$ (свойство идемпотентности);

(4.2) $a*(a*b)=b$ (левое свойство ключей);

(4.3) $a*(b*c)=(a*b)*(a*c)$ (свойство левой дистрибутивности);

(4.4) уравнение $a*y=y$ имеет единственное решение в некоторой окрестности произвольной точки $a \in M$ (см. также [19], [95], [124]). Конструкция оказывается чрезвычайно интересной в плане изучения обобщенных симметрических пространств (пространства с симметриями, s-многообразия, субсимметрические пространства и т. д., см. [14], [35]—[37], [42], [58], [59], [79], [80], [111], [112], [114], [115], [141], [142] и др.): теория квазигрупп и луп в этом случае предоставляет исследователю не только удобный, адекватный рассматриваемым задачам язык, но и эффективные приемы и методы. Центральным при этом является понятие локальной s-структуры.

Определение 4.1. Пусть $(M, *, \diagdown)$ — гладкая локальная (глобальная) левая квазигруппа такая, что

(4.1) $a*a=a$ (свойство идемпотентности);

(4.4) уравнение $a*y=y$ имеет единственное решение в некоторой окрестности произвольной точки $a \in M$. Будем называть такую алгебру локальной (глобальной) s-структурой на многообразии M. Введем обозначения $s_a : M \mapsto M$ $(b \mapsto a*b)$, тогда для обозначения s-структуры на многообразии M естественно использовать запись $(M, \{s_a\}_{a \in M})$.

Определение 4.2. Будем говорить о гладкой правильной регулярной s-структуре $(M, \{s_a\}_{a \in M})$, если

(4.5) уравнение $y*a=b$ имеет решение для любых достаточно близких друг к другу точек a и b, это решение единственно и гладким образом зависит от a и b;

(4.3) $\forall a, b, c \in M$ выполнено тождество левой дистрибутивности:

$$a*(b*c)=(a*b)*(a*c).$$

Имеют место следующие теоремы:

Теорема 4.3 (А. С. Феденко [58], Ковальский [111], Л. В. Сбитнева [54], Л. В. Сабинин [42]). Гладкой локальной правильной регулярной s-структуре $(M, \{s_a\}_{a \in M})$ соответствует единственная (каноническая) аффинная редуктивная связность ∇ $(\nabla T=0, \nabla R=0)$ такая, что тензорное поле $S_a=(s_a)_{*,a}$ ковариантно постоянно $(\nabla S=0)$ и $\{s_a\}_{a \in M}$ являются локальными изоморфизмами связности ∇. При этом симметрии s_a в различных точках многообразия M связаны соотношением

$$L^a_x \circ s_a \circ \left(L^a_x\right)^{-1} = s_x,$$

где $\{L^a_x\}_{a,x} \in M$ — левые сдвиги соответствующей геодулярной структуры. □

Теорема 4.4 (Л. В. Сбитнева [54]). Гладкий локальный модуль $(M, \times, e, \{t_e\}_{t \in \mathrm{R}})$ с выделенным локальным автоморфизмом $s \in \mathrm{Aut}\, M$ тогда и только тогда может быть реализован как геодезический одуль канонической аффинной связности ∇ для некоторой гладкой локальной правильной регулярной s-структуры $(M, \{s_a\}_{a \in M})$, где $s_e = s$, если он удовлетворяет условиям

(4.6) $a \times [sa^{-1} \times \{b \times (sb^{-1} \times c)\}] =$

$= [a \times (sa^{-1} \times b)] \times]\{sa \times (s^2a^{-1} \times sb)\}^{-1} \times \{sa \times (s^2a^{-1} \times c)\}]$

(s-тождество);

(4.7) $s(a \times b) = sa \times sb$ (тождество s-автоморфности);

(4.8) $(t_e a) \times [(u_e a) \times b] = [(t+u)_e a] \times b$ (тождество левой моноальтернативности);

(4.9) $(s_{*,e} - \mathrm{id}_{*,e})$ — обратимо. □

Определение 4.5 (Л. В. Сбитнева [54]). Гладкая локальная правильная регулярная s-структура $(M, \{s_a\}_{a \in M})$ называется совершенной, если ее элементарные трансвекции $s_a \circ s_b^{-1}$ индуцируют параллельный перенос вдоль геодезических линий ее канонической локально редуктивной связности, т. е. $\forall a, b \in M$

$$L^b_{s_a b} = s_a \circ s_b^{-1}.$$

Теорема 4.6 (Л. В. Сбитнева [54]). Гладкий локальный модуль $(M, \times, e, \{t_e\}_{t \in \mathrm{R}})$ с выделенным локальным автоморфизмом $s \in \mathrm{Aut}\, M$ тогда и только тогда может быть реализован как геодезический одуль канонической аффинной связности ∇ для некоторой гладкой совершенной s-структуры $(M, \{s_a\}_{a \in M})$, где $s_e = s$, если он удовлетворяет условиям:

(4.10) $a \times (b \times (sa^{-1} \times c)) = (a \times (b \times sa^{-1})) \times c$ (особое полуболово тождество);

(4.7) $s(a \times b) = sa \times sb$;

(4.8) $(t_e a) \times [(u_e a) \times b] = [(t+u)_e a] \times b$;

(4.9) $(s_{*,e} - \mathrm{id}_{*,e})$ — обратимо. □

Гладкие локальные лупы, удовлетворяющие условиям теоремы (4.6), допускают вложение в локальные группы Ли, а именно (Л. В. Сбитнева [55]): для каждой такой лупы $(M, \times, e)$ существует такая локальная группа Ли (G, Δ, e) и автоморфизм $\bar{s} \in \mathrm{Aut}\, G$, что M можно отождествить с локальным сечением $i:M\to G$ левых классов смежности $G \bmod H$, где $H=\{x\in G\,|\,\tilde{s}(x)=x\}$, причем (мы отождествляем $i(M)$ и M)

$\tilde{s}|_M=s$ не имеет неподвижных точек на M, отличных от e;

$\forall x\in H$ $x\Delta M\Delta x^{-1}\subset M$ (свойство редуктивности);

$\forall a, b\in M$ $a\Delta b\Delta sa^{-1}\in M$;

$\forall a, b\in M$ $a\times b=\pi_M(a\Delta b)$.

Аналогичная конструкция имеет место для соответствующих тройных алгебр Ли (см. [55], [56]).

Замечание 4.7. В условиях теоремы 4.6 одуль $(M, \times, e, \{t_e\}_{t\in R})$ удовлетворяет левому тождеству Бола

$$a\times(b\times(a\times c))=(a\times(b\times a))\times c$$

(см. [55]). Относительно совершенных s-пространств см. также [42], [54], [56]. □

Замечание 4.8. Следует также отметить здесь достаточно близкие по тематике работы [5], [29], [61], в которых конструкция квазигруппы геодезических симметрий $(M,*)$ на произвольном многообразии аффинной связности (M,∇)

$$(*) : M\times M\to M \ \ ((a, b)\mapsto (-1)_a b)$$

используется для описания структуры его геодезических. □

§ 5. ГЛАДКИЕ ЛУПЫ БОЛА

Интерес к теории гладких луп Бола был вызван приложениями в дифференциальной геометрии, в особенности, тем фактом, что геодезические лупы локально симметрических пространств удовлетворяют левому тождеству Бола [19], [42] (то же справедливо и для совершенных s-пространств [55]). Замечательным представляется уже просто наличие такой связи между классом локально симметрических пространств, исследование которых составило эпоху в развитии дифференциальной геометрии, и конструкцией луп Бола, составляющей одну из центральных глав современной теории квазигрупп и луп [10]. Применительно к гладким локальным лупам Бола удается развить теорию, аналогичную теории соответствия групп Ли и алгебр Ли. Конечно, случай гладких луп Бола сложнее: мы должны использовать в данном случае бинарно-тернарные алгебры Бола вместо касательных алгебр Ли. О гладких лупах Бола и алгебрах Бола см. [30], [42], [46]—[49].

Определение 5.1. Гладкой локальной лупой Бола мы называем локальную аналитическую лупу $(B, \times, e)$, удовлетворяющую правому тождеству Бола

$$((c\times a)\times b)\times a=c\times((a\times b)\times a). \tag{5.1}$$

Определение 5.2. Алгеброй Бола называется конечномерная бинарно-тернарная алгебра $\mathfrak{b}$ над полем $\mathbf{R}$, операции которой $\xi\cdot\eta$ и (ξ, η, ζ) удовлетворяют соотношениям:

$$\forall \xi, \eta, \zeta, \varkappa, \omega \in \mathfrak{b}$$

$$\xi \cdot \xi = 0, \tag{5.2}$$

$$(\xi, \xi, \eta) = 0, \tag{5.3}$$

$$(\xi, \eta, \zeta) + (\eta, \zeta, \xi, \eta) = 0, \tag{5.4}$$

$$(\xi, \eta, \zeta) \cdot \varkappa - (\xi, \eta, \varkappa) \cdot \zeta + (\zeta, \varkappa, \xi \cdot \varkappa) - (\xi, \eta, \zeta \cdot \varkappa) + \zeta\eta \cdot \zeta\varkappa = 0, \tag{5.5}$$

$$(\xi, \eta, (\zeta, \varkappa, \omega)) = ((\xi, \eta, \zeta), \varkappa, \omega) + \\ + (\zeta, (\xi, \eta, \varkappa, \omega) + (\zeta, \varkappa, (\xi, \eta, \omega)). \tag{5.6}$$

Замечание 5.3. В силу соотношений (5.3), (5.4), (5.6) алгебра Бола $\mathfrak{b}$ является тройной системой Ли относительно трилинейной операции (см. (3.11)). Так что алгеброй Бола можно называть тройную систему Ли, оснащенную дополнительной кососимметрической билинейной операцией $(\cdot)$, относительно которой $\forall \xi, \eta \in \mathfrak{b}$ отображение

$$D(\xi, \eta) : \mathfrak{b} \to \mathfrak{b} \quad (\zeta \mapsto (\xi, \eta, \zeta))$$

является псевдодифференцированием с компаньоном $\xi \cdot \eta$, т. е.

$$\forall \zeta, \varkappa \in \mathfrak{b}$$

$$D_{\xi,\eta}(\zeta \cdot \varkappa) = (D_{\xi,\eta}\zeta) \cdot \varkappa + \zeta \cdot (D_{\xi,\eta}\varkappa) + (\zeta, \varkappa, \xi \cdot \eta) - \zeta\varkappa \cdot \xi\eta. \ \square \tag{5.7}$$

Касательные бинарно-тернарные алгебры гладких луп Бола см. (1.1), (1.2)), оснащенные законами композиции $\xi \cdot \eta$ и $\langle \xi, \eta, \zeta \rangle$, являются алгебрами Бола относительно операций

$$\xi \cdot \eta \text{ и } (\xi, \eta, \zeta) = -2\langle \zeta, \xi, \eta \rangle + \xi\eta \cdot \zeta. \tag{5.8}$$

Гладкие локальные лупы Бола изоморфны в том и только том случае, если изоморфны касательные алгебры Бола. Произвольная конечномерная алгебра Бола является касательной алгеброй некоторой гладкой локальной лупы Бола. Локальные подлупы гладкой лупы Бола и подалгебры касательной алгебры Бола соответствуют друг другу взаимно однозначным образом [46], [49].

Для гладких локальных луп Бола получена дифференциально-геометрическая характеризация, аналогичная той, которую Э. Картан предложил для групп Ли, в терминах пространств аффинной связности со свойствами: $R=0$, $\nabla T=0$ [74]. Имеют место теоремы:

Теорема 5.4 (Л. В. Сабинин, П. О. Михеев [47]—[49]). Пусть
$(B, \times, e)$ — гладкая локальная лупа Бола. В окрестности нейтрального элемента e в B можно единственным образом ввести структуру аффинной связности ∇ нулевой кривизны ($R=0$) такую, что закон композиции геодезического одуля в точке e совпадает с операцией $(\times)$. При этом кручение T связности ∇ удовлетворяет условию

$$\nabla_r(\nabla_l T^l_{jk} + T^s_{jk} T^l_{sl}) = 0. \ \square$$

Теорема 5.5. (Л. В. Сабинин, П. О. Михеев [47]—[49]). Локальная геодезическая лупа $(M, \underset{e}{\cdot}, e)$, связанная с произвольной точкой e аналитического пространства аффинной связности (M, ∇), всюду удовлетворяющего условиям

$$R^{i}_{l,jk}=0, \quad \nabla_r(\nabla_l T^{i}_{jk}+T^{s}_{jk}T^{i}_{sl})=0. \tag{5.9}$$

обладает правым свойством Бола. □

Замечание 5.6. Аналогичную дифференциально-геометрическую характеризацию для гладких локальных луп Муфанг (частный случай гладких луп Бола) можно получить в терминах пространств аффинной связности, удовлетворяющих условиям (см. [49])

$$R^{i}_{l,jk}=0, \quad \nabla_l T^{i}_{jk}=\frac{1}{3}(T^{i}_{ls}T^{s}_{jk}+T^{i}_{js}T^{s}_{kl}+T^{i}_{ks}T^{s}_{lj}). \ \square$$

Говорят, что лупа $(B, \times, e)$ обладает свойством изотопии-изоморфизма, если произвольная лупа, изотопная $(B, \times, e)$ ей изоморфна (в [10] это называется G-свойством).

Теорема 5.7 (П. О. Михеев [30]). Гладкая локальная лупа Бола $(B, \times, e)$ обладает свойством изотопии-изоморфизма в том и только том случае, если каноническая связность ∇ (см. теорему 5.4) локально однородна. □

Алгебры Бола $\mathfrak{b}=T_e(B)$, соответствующие гладким локальным лупам Бола со свойством изотопии-изоморфизма, мы называем однородными, они выделяются тем свойством, что произвольный элемент $\varkappa$ из $\mathfrak{b}$ является компаньоном некоторого псевдодифференцирования (см. (5.7)). Примерами однородных алгебр Бола могут служить алгебры Мальцева и алгебры Бола, удовлетворяющие условию (см. [30])

$$\mathfrak{b}\cdot\mathfrak{b}=\langle\{\xi\cdot\eta\,|\,\xi, \eta\in\mathfrak{b}\}\rangle=\mathfrak{b}.$$

Теорема 5.8 (П. О. Михеев [30]). Алгебра Бола $\mathfrak{b}$ однородна в том и только том случае, если ее трилинейная операция представима в виде

$$(\xi, \eta, \zeta)=\zeta\square(\xi\cdot\eta)-(\zeta\square\xi)\cdot\eta-\xi\cdot(\zeta\square\eta)+\xi\eta\cdot\zeta,$$

где билинейная операция $(\square):\mathfrak{b}\times\mathfrak{b}\longrightarrow\mathfrak{b}$ удовлетворяет условию

$$\forall\xi, \eta, \zeta, \varkappa\in\mathfrak{b}$$

$$\varkappa\square(\xi, \eta, \zeta)=(\varkappa\square\xi, \eta, \zeta)+(\xi, \varkappa\square\eta, \zeta)+(\xi, \eta, \varkappa\square\zeta). \ \square$$

Замечание 5.9. Задача о классификации однородных алгебр Бола представляется чрезвычайно интересной, поскольку алгебры Мальцева, например, однородны. □

Гладкие локальные лупы Бола допускают вложение в локальные группы Ли (в смысле конструкции (1.14)). Локальная аналитическая лупа $(Q, \times, e)$ на локальном сечении $Q=\exp U$ пространства правых классов смежности $G \bmod H$ (где (G, Δ, e) — локальная группа Ли, H — ее связная подгруппа (замкнутая), $\mathfrak{q}$ — векторное подпространство в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, соответствующей группе G, дополнительное к подалгебре $\mathfrak{h}$, соответствующей подгруппе H, и U — окрестность нуля в $\mathfrak{q}$) удовлетворяет (правому) тождеству Бола в том и только том случае, если локально $\forall a, b\in Q$

$$a\Delta b\Delta a\in Q. \tag{5.10}$$

Сечение $Q=\exp U$ $(0\in U\subset\mathfrak{q})$ удовлетворяет условию (5.10) в том и только том случае, если

$$\forall\xi,\ \eta,\ \zeta\in\mathfrak{q}\quad [\xi[\eta\zeta]]\in\mathfrak{q} \tag{5.11}$$

(квадратные скобки обозначают закон композиции в алгебре Ли $\mathfrak{g}$).

Замечание 5.10. Подмногообразия в группах Ли, удовлетворяющие условию (5.10), рассматривались Ноно [119] — [121] в связи с исследованием вполне геодезических подмногообразий в группах Ли. □

Аналогичное утверждение имеет место и для алгебр Бола.

Теорема 5.11 (Л. В. Сабинин, П. О. Михеев [46], [49]). Пусть $\mathfrak{b}$ — алгебра Бола, основные операции которой суть $\xi\cdot\eta$ и (ξ, η, ζ), тогда существует конечномерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем действительных чисел, подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ и такое линейное вложение $i:\mathfrak{b}\longrightarrow\mathfrak{g}$, что (после отождествления $i(\mathfrak{b})$ с $\mathfrak{b}$)

$\mathfrak{g}=\mathfrak{b}\dotplus\mathfrak{h}$ (прямая сумма векторных пространств),

$[[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}], \mathfrak{b}]\subset\mathfrak{b}$ и

$$\forall\xi, \eta, \zeta\in\mathfrak{b}\quad \xi\cdot\eta=[\xi, \eta]_{\mathfrak{b}},\quad (\xi, \eta, \zeta)=[[\xi, \eta], \zeta], \tag{5.12}$$

где $[\xi, \eta]$ обозначает результат коммутирования векторов в $\mathfrak{g}$ и $[\xi, \eta]_{\mathfrak{b}}$ — проекцию вектора $[\xi, \eta]$ на $\mathfrak{b}$ параллельно $\mathfrak{h}$. □

Теорема 5.11 предлагает не только некоторое описание алгебр Бола в терминах алгебр Ли, но и дает возможность построить большое количество примеров: пусть $(\mathfrak{g}, s)$ — симметрическая алгебра Ли $(s\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g},\ s^2=\mathrm{id})$, тогда

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{b}\dotplus\mathfrak{d},$$

где

$$\mathfrak{b}=\{\xi\in\mathfrak{g}\,|\,s\xi=-\xi\},$$
$$\mathfrak{d}=\{\xi\in\mathfrak{g}\,|\,s\xi=\xi\}$$

и для любого автоморфизма $\sigma\in\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$, достаточно близкого к тождественному, подалгебра $\mathfrak{b}=\sigma(\mathfrak{d})$ не пересекается с векторным подпространством $\mathfrak{b}$, так что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ в фиксированном разложении

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{b}\dotplus\mathfrak{h}$$

определяет некоторую алгебру Бола по правилу (5.12). Для большого класса тройных систем Ли именно таким образом можно получить все билинейные операции, дополняющие их до алгебры Бола, т. е. удовлетворяющие тождеству (5.5) (см. [7], [8]).

§ 6. ГЛАДКИЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ЛУПЫ СО СВОЙСТВОМ ПРАВОЙ МОНОАЛЬТЕРНАТИВНОСТИ И ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРИВИЗНЫ

Гладкие локальные лупы $(Q, \times, e)$ со свойством правой моноальтернативности

$$\forall k, l \in \mathbf{Z}, \quad \forall a, b \in Q$$

$$(a \times b^k) \times b^l = a \times b^{k+l} \tag{6.1}$$

представляют собой наиболее важный класс гладких локальных луп из тех, которые в настоящее время активно изучаются. Мы обсуждаем здесь дифференциально-геометрический подход к теории гладких локальных правомоноальтернативных луп, аналогичный тому, который Э. Картан предложил для групп Ли [72].

Произвольная гладкая локальная правомоноальтернативная лупа $(Q, \times, e)$ обладает свойством ассоциативности степеней (1.5), поэтому структуру лупы $(Q, \times, e)$ можно дополнить C^ω-умножением на скаляры $\{t_e\}_{t \in \mathbf{R}}$, совместным с операцией $(\times)$, т. е. локально

$$(t_e a) \times (u_e a) = (t + u)_e a, \tag{6.2}$$

так что $(Q, \times, e, \{t_e\}_{t \in \mathbf{R}})$ — C^ω-гладкий локальный одуль и соотношение (6.1) эквивалентно следующему (см. § 1):

$$(a \times (t_e b)) \times (u_e b) = a \times ((t + u)_e b). \tag{6.3}$$

Замечание 6.1. Более того, в C^∞-гладкой локальной лупе соотношение

$$(a \times b) \times b = a \times (b \times b)$$

локально эквивалентно (6.1) и (6.3), см. [50]. □

Геометрическая трактовка гладких правомоноальтернативных луп основывается на следующей теореме.

Теорема 6.2 (Л. В. Сабинин, П. О. Михеев [47]—[49]).

А. Локальный геодезический модуль $(Q, \underset{e}{\cdot}, e, \{t_e\}_{t \in \mathbf{R}})$, связанный с произвольной точкой e пространства аффинной связности (Q, ∇) с нулевой кривизной (с абсолютным параллелизмом), удовлетворяет тождеству правой моноальтернативности (6.3).

Б. Пусть $(Q, \times, e, \{t_e\}_{t \in \mathbf{R}})$ — гладкий локальный одуль со свойством правой моноальтернативности (6.3). В окрестности нейтрального элемента e в Q можно единственным образом ввести структуру C^∞-гладкой аффинной связности ∇ с нулевой кривизной, так что локально

$$a \underset{e}{\cdot} b = a \times b,$$

где $(\underset{e}{\cdot})$ обозначает закон композиции геодезического одуля в точке e, соответствующего связности ∇. При этом

$$a \underset{c}{\cdot} b = a \times (c \diagdown b), \tag{6.4}$$

так что геодезические лупы, связанные с различными точками из Q, изотопны. □

Пусть $(Q, \times, e)$ — правомоноальтернативная локальная аналитическая лупа; используя структуру канонической аффинной связности ∇ (теорема 6.2), введем в касательном пространстве $q = T_e(Q)$ полилинейные законы композиции

$$\begin{gathered} \forall m = 0, 1, \ldots, \forall \xi_1, \ldots, \xi_m, \eta, \zeta \in q \\ \langle \xi_1, \ldots, \xi_m; \eta, \zeta \rangle = (\nabla^m T)(\xi_1, \ldots, \xi_m; \eta, \zeta). \end{gathered} \tag{6.5}$$

Операции (6.5) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} \forall m = 0, 1, \ldots, \forall \xi_1, \ldots, \xi_m, \eta, \zeta, \varkappa, \omega \in q \\ \langle \xi_1, \ldots, \xi_r, \varkappa, \omega, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_m; \eta, \zeta \rangle_{m+2} - \\ - \langle \xi_1, \ldots, \xi_r, \omega, \varkappa, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_m, \eta, \zeta \rangle_{m+2} + \\ + \langle \langle \xi_1, \ldots, \xi_r; \varkappa, \omega \rangle_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_m, \eta, \zeta \rangle_{m-r+1} + \\ + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha} \langle \xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_k}, \langle \xi_{\alpha_{k+1}}, \ldots, \xi_{\alpha_r}, \varkappa, \omega \rangle_{r-k}, \\ \xi_{r+1}, \ldots, \xi_m, \eta, \zeta \rangle_{m-r+k+1} = 0, \end{gathered} \tag{6.6}$$

$$\begin{gathered} \forall r = 0, 1, \ldots, \forall \xi_1, \ldots, \xi_r, \eta, \zeta, \varkappa \in q \\ \mathfrak{S}_{\eta\zeta\varkappa} \Big[\langle \xi_1, \ldots, \xi_r, \varkappa; \eta, \zeta \rangle_{r+1} + \langle \langle \xi_1, \ldots, \xi_r; \eta, \zeta \rangle_r, \varkappa \rangle_0 + \\ + \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha} \langle \xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_k}, \langle \xi_{\alpha_{k+1}}, \ldots, \xi_{\alpha_r}; \eta, \zeta \rangle_{r-k}, \varkappa \rangle_k \Big] = 0, \end{gathered} \tag{6.7}$$

где внутреннее суммирование в формулах (6.6) и (6.7) ведется по совокупности всех таких взаимно однозначных отображений (тасующих подстановок) $\alpha : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, r\}$, что

$$\langle \alpha_1 < \ldots < \alpha_k, \alpha_{k+1} < \ldots < \alpha_r \quad (k = 1, \ldots, r)$$

и $\mathfrak{S}_{\eta\zeta\varkappa}$ обозначает циклическое суммирование по $\eta, \zeta, \varkappa$.

Замечание 6.3. Структурные константы $\nabla_{l_1} \ldots \nabla_{l_m} T^i_{jk}(e)$ удовлетворяют также следующему условию сходимости: существуют такие положительные числа A и B, что

$$\begin{gathered} \forall m \geqslant 0, \forall l_1, \ldots, l_m, i, j, k = 1, \ldots, n \\ |\nabla_{l_1} \ldots \nabla_{l_m} T^i_{jk}(e)| \leqslant A \cdot B^m \cdot m! \ \square \end{gathered} \tag{6.8}$$

Определение 6.4 (Л. В. Сабинин, П. О. Михеев [51], [52]). Конечномерное векторное пространство $\mathfrak{q}$ над полем действительных чисел $\mathbf{R}$, оснащенное счетным набором полилинейных операций $\langle \xi_1, \ldots, \xi_m; \eta, \zeta \rangle_m$, $m=0, 1, \ldots$,

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_m; \eta, \zeta \rangle_m = -\langle \xi_1, \ldots, \xi_m; \zeta, \eta \rangle_m, \qquad (6.9)$$

удовлетворяющих (6.6) и (6.7), мы называем гиперлгеброй.

Имеет место взаимно однозначное (с точностью до локальных изоморфизмов) соответствие между гиперлгебрами и гладкими локальными правомоноальтернативными лупами: лупы указанного класса изоморфны в том и только том случае, если изоморфны касательные гиперлгебры; произвольная гиперлгебра, структурные константы которой удовлетворяют условию сходимости (6.8), является касательной гиперлгеброй некоторой локальной аналитической лупы со свойством правой моноальтернативности; при этом локальным подлупам соответствуют подалгебры касательной гиперлгебры, нормальным локальным подлупам — идеалы [51], [52].

Пусть $(Q, \times, e)$ — локальная аналитическая лупа со свойством правой моноальтернативности и $\mathfrak{q}=T_e(Q)$ — касательная к ней гиперлгебра. Введем в окрестности точки e в Q каноническую аффинную связность ∇ и отождествим $\mathfrak{q}$ с множеством ∇-постоянных векторных полей на Q

$$\mathfrak{q} = \{X_\xi \mid X_\xi(e) = \xi\}. \qquad (6.10)$$

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}$ (в общем случае — бесконечномерную), порожденную $\mathfrak{q}$,

$$\mathfrak{g} = \langle \{X_\xi \mid X_\xi \in \mathfrak{q}\} \rangle \qquad (6.11)$$

и подалгебру $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{h} = \{Y \in \mathfrak{g} \mid Y(e) = 0\}, \qquad (6.12)$$

тогда $\mathfrak{h}$ не содержит нетривиальных идеалов алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \dotplus \mathfrak{h}. \qquad (6.13)$$

Алгебру Ли $\mathfrak{g}$ в фиксированном разложении (6.13) также можно рассматривать как инфинитезимальный объект, соответствующий $(Q, \times, e)$. Действительно, введем на $\mathfrak{q}$ полилинейные операции $(\xi_1, \ldots, \xi_r)_r$, $r=2, 3, \ldots$,

$$\begin{gathered} \forall \xi_1, \ldots, \xi_r \in \mathfrak{q} \\ (\xi_1, \ldots, \xi_r)_r = (\pi_{\mathfrak{q}} [X_{\xi_1}, \ldots, [X_{\xi_{r-1}}, X_{\xi_r}] \ldots]) (e), \end{gathered} \qquad (6.14)$$

где $\pi_{\mathfrak{q}}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{q}$ — проекция на $\mathfrak{q}$ параллельно $\mathfrak{h}$. Операции (6.5) гиперлгебры $\mathfrak{q}$ связаны с операциями (6.14) рекуррентными соотношениями:

$$\forall \eta, \zeta \in \mathfrak{q} \quad (\eta, \zeta)_0 + [\eta, \zeta]_2 = 0, \qquad (6.15)$$

$$\forall_r > 0,\ \forall \xi_1, \ldots, \xi_r,\ \eta,\ \xi \in \mathfrak{q}$$

$$\langle \xi_1, \ldots, \xi_r; \eta, \zeta \rangle_r + (\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta, \zeta)_{r+2} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{r} \sum_{\alpha} (\xi_{\alpha_1}, \ldots, \xi_{\alpha_k}, \langle \xi_{\alpha_{k+1}}, \ldots, \xi_{\alpha_r}, \eta, \zeta \rangle_{r-k})_{k+1} = 0, \quad (6.16)$$

где внутреннее суммирование в формуле (6.16) ведется по совокупности тасующих подстановок α $(\alpha_1 < \ldots < \alpha_k,\ \alpha_{k+1} < \ldots \ldots < \alpha_r)$.

Формулы (6.15)—(6.16) имеют смысл для произвольной гиперался гиперalgebры $\mathfrak{q}$ (вне зависимости от условия сходимости (6.8)):

Теорема 6.5 (Л. В. Сабинин, П. О. Михеев [52]). Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли над полем $\mathbf{R}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ конечной коразмерности и $\mathfrak{q}$ — векторное подпространство в $\mathfrak{g}$, дополнительное к $\mathfrak{h}$, т. е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \dotplus \mathfrak{h}$, тогда формулы (6.15)—(6.16) единственным образом определяют на $\mathfrak{q}$ структуру гиперальгебры. □

Теорема 6.6 (Л. В. Сабинин, П. О. Михеев [52]). Пусть $\mathfrak{q}$ — произвольная гиперальгебра над полем $\mathbf{R}$, тогда существует алгебра Ли $\mathfrak{g}$, подалгебра $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ и линейный мономорфизм $i : \mathfrak{q} \to \mathfrak{g}$ такие, что (мы отождествляем $i(\mathfrak{q})$ и $\mathfrak{q}$) $\mathfrak{g} = \mathfrak{q} \dotplus \mathfrak{h}$ и соотношения (6.15)—(6.16) имеют место. □

Замечание 6.7. Таким образом произвольную гиперальгебру можно рассматривать как набор тензоров, из которых можно конструировать алгебры Ли $\mathfrak{g}$ вида (6.13). При этом имеющиеся ограничения на структурные тензоры записываются в виде алгебраических тождеств, т. е. гиперальгебры образуют примитивный класс (в терминологии теории универсальных алгебр). Последнее обстоятельство выгодным образом отличает конструкцию от других подходов к проблеме описания бесконечномерных алгебр Ли векторных полей (см., например, [67], [69], [70], [146]). □

Произвольную пару $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, удовлетворяющую условию теоремы 6.6, мы называем обертывающей парой гиперальгебры $\mathfrak{q}$. Заметим, что произвольная обертывающая пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ допускает естественную фильтрацию:

положим $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{h}$,

$$\forall i = 0, 1, \ldots \quad \mathfrak{g}^{i+1} = \{Y \in \mathfrak{g}^i \mid [Y, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}^i\},$$

тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{-1} \supset \mathfrak{g}^0 \supset \ldots$ и $[\mathfrak{g}^i, \mathfrak{g}^j] \subset \mathfrak{g}^{i+j}$,

см. [74], [138] по поводу терминологии и информации на эту тему.

Определение 6.8. Гиперальгебра $\mathfrak{q}$ называется гиперальгеброй конечного типа, если для нее существует обертывающая пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, в которой алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет конечную размерность.

Замечание 6.9. Имеется несколько другая точка зрения, согласно которой в центре внимания оказываются такие системы тождественных соотношений, что закон композиции произвольной локальной аналитической лупы, удовлетворяющей данной системе соотношений, определяется некоторым фиксированным конечным набором тензоров [87], [89]. □

Замечание 6.10. С точки зрения дифференциальной геометрии по крайней мере два класса гипералгебр представляют специальный интерес: гипералгебры левомоноальтернативных специальных луп и гипералгебры луп Бола. Гипералгебры этих классов имеют конечный тип. Первые сводятся к тройным алгебрам Ли (см. § 3), вторые — к алгебрам Бола (см. § 5). □

Имеет место следующая важная

Теорема 6.11. Структурные константы произвольной гипералгебры конечного типа удовлетворяют условию сходимости (6.8). □

В классе обертывающих пар данной гипералгебры $\mathfrak{q}$ существует и единственна (с точностью до изоморфизма) каноническая обертывающая пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, т. е. такая обертывающая пара, что

1) $\mathfrak{g}$ порождается векторным подпространством $\mathfrak{q}$,

2) $\mathfrak{h}$ не содержит нетривиальных идеалов алгебры Ли $\mathfrak{g}$. В частности, если $(Q, \times, e)$ — правомоноальтернативная гладкая локальная лупа и $\mathfrak{q}=T_e(Q)$ — касательная к ней гипералгебра, то обертывающая пара $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$, порожденная ∇-постоянными векторными полями на Q (см. (6.10)—(6.13)), является канонической.

§ 7. ГЛАДКИЕ ЛОКАЛЬНЫЕ ЛУПЫ ОБЩЕГО ВИДА

Пусть $(Q, \square, e)$ — локальная аналитическая лупа общего вида. В окрестности нейтрального элемента e в Q введем структуру аффинной связности ∇ нулевой кривизны, полагая для $a, b \in Q$, достаточно близких к e,

$$\tau_a^b(\xi)=(L_b)_{*,e}\circ[(L_a)^{-1}]_{*,a}(\xi), \tag{7.1}$$

где $\tau_a^b: T_a(Q)\to T_b(Q)$ — параллельный перенос из a в b и $L_x: Q\to Q$, $(y\mapsto x\square y)$ — левый сдвиг в $(Q, \square, e)$. Пусть $(Q, \times, e)$ — геодезическая лупа в точке e (относительно связности ∇), тогда $(Q, \times, e)$ — локальная аналитическая лупа со свойством правой моноальтернативности и

$$(L_x)_{*,e}=(\wedge_x)_{*,e}, \tag{7.2}$$

где $\wedge_x: Q\to Q$, $(y\mapsto x\times y)$ — левый сдвиг в $(Q, \times, e)$, или

$$a\square b=a\times\Phi_a(b), \tag{7.3}$$

где C^ω-гладкое отображение

$$\Phi: Q\times Q\to Q \ \ ((a, b)\mapsto\Phi_a b)$$

определено в окрестности точки (e, e) в $Q\times Q$ и удовлетворяет условиям

$$\Phi_e = \mathrm{id}, \quad (\Phi_a)_{*,e} = \mathrm{id}, \quad \Phi_a(e) = e. \tag{7.4}$$

В координатах, нормальных относительно точки e,

$$\Phi_a(b) = b + \sum_{\substack{m=1\\k=2}}^{\infty} \Phi(a, \ldots, a \mid b, \ldots, b)_{m,k}, \tag{7.5}$$

где полилинейные отображения (Ф-мультиоператоры)

$$\Phi(\xi_1, \ldots, \xi_m \mid \eta_1, \ldots, \eta_k)_{m,k}, \ m=1,\ 2, \ldots, k=2,\ 3, \ldots, \tag{7.6}$$

определены в $T_e(Q)$, симметричны по каждой группе переменных и удовлетворяют очевидным условиям сходимости.

Определение 7.1. Произвольную гиперaлгебру $\mathfrak{q}$, оснащенную набором Ф-мультиоператоров (7.6), мы называем гиперaлгеброй с Ф-мультиоператорами.

Гиперaлгебры с Ф-мультиоператорами представляют собой инфинитезимальный объект, адекватным образом соответствующий гладким локальным лупам общего вида [51], [52]. О структурной теории луп см. также [84]. О структурных уравнениях гладких луп см. [44], [66], эта часть теории так же, как и теория представлений квазигрупп и луп, в настоящее время находится в начале своего развития. О приложениях в теоретической физике см. [32], [64].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Агазарян С. В., Матвеев О. А.,* О почти комплексных геоодулярных многообразиях. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1987, 4—9 (РЖМат, 1987, 7А759)
2. *Акивис М. А.,* О локальных алгебрах многомерной три-ткани. Сиб. мат. ж., 1976, *17,* № 1, 5—11 (РЖМат, 1977, 7А888)
3. —, О геодезических лупах и локальных тройных системах пространства аффинной связности. Сиб. мат. ж., 1978, *19,* № 2, 243—253 (РЖМат, 1978, 9А684)
4. —, Дифференциальная геометрия тканей. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии, 1983, *15,* 187—213 (РЖМат, 1984, 7А630)
5. —, *Герасименко С. А.,* О некоторых фигурах замыкания на многообразиях с симметрией. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1982, 7—11 (РЖМат, 1982, 12А734)
6. *Александров А. Д., Берестовский В. Н., Николаев И. Г.,* Обобщенные римановы пространства. Успехи мат. наук, 1986, *41,* № 3, 3—44 (РЖМат, 1986, 10А793)
7. *Аль-Хужейри М. Ю.,* Алгебры Бола, порожденные пространствами постоянной кривизны. Проблемы теории тканей и квазигрупп. Калинин, 1985, 20—25 (РЖМат, 1985, 12А249)
8. —, Алгебры Бола инволютивных пар $SU(n+1)/S(U(n)\oplus U(1))$, $\mathrm{Sp}(n+1)/\mathrm{Sp}(n)\oplus\mathrm{Sp}(1)$ и $\mathfrak{f}_4/SO(9)$. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1987, 10—13 (РЖМат, 1987, 7А762)
9. *Афанасьев И. Л.,* Соответствие между локальными подлупами Ли локальных гладких редуктивных луп и идеалами их тройных алгебр Ли. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 15—20 (РЖМат, 1985, 1А316)
10. *Белоусов В. Д.,* Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967, 223 с. (РЖМат, 1967, 11А212К)

11. *Булгаков Д. Н.,* О вложении топологической лупы в ассоциированную группу. Квазигруппы и комбинаторика. Кишинев, 1976, 59—73 (РЖМат, 1977, 7А251)
12. —, Об условиях полной регулярности топологического пространства непрерывной лупы. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1981, 8—12
13. —, О вложении топологической лупы в группу гомеоморфизмов ее носителя. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1982, 25—29 (РЖМат, 1982, 12А226)
14. *Ведерников В. И.,* Об одном специальном классе однородных пространств. Известия вузов. Мат., 1972, № 12, 17—22 (РЖМат, 1973, 6А493)
15. *Гайнов А. Т.,* Тождественные соотношения для бинарно лиевых колец. Успехи мат. наук, 1957, *12,* № 3, 141—146 (РЖМат, 1958, 1879)
16. *Гришков А. Н.,* Аналог теоремы Леви для алгебр Мальцева. Алгебра и логика, 1977, *16,* № 4, 389—396 (РЖМат, 1978, 7А377)
17. —, Строение и представления бинарно-лиевых алгебр. Изв. АН СССР. Сер. мат, 1980, *44,* № 5, 999—1030 (РЖМат, 1981, 2А273)
18. —, О существовании глобальных аналитических альтернативных луп. ВЦ СО АН СССР. Препр., 1984, № 510, 13 с. (РЖМат, 1985, 6А185)
19. *Каранда Х. М.,* О геометрии симметрических луп. Дис. канд. физ.-мат. наук. Университет дружбы народов, 1972, 54 с.
20. *Кердман Ф. С.,* Об аналитических лупах Муфанг в целом. Докл. АН СССР, 1979, *249,* № 3, 533—536 (РЖМат, 1980, 3А169)
21. —, Аналитические лупы Муфанг в целом. Алгебра и логика, 1979, *18,* № 5, 523—555 (РЖМат, 1980, 8А206)
22. —, Теорема Шрайера для аналитических луп Муфанг. Алгебра и логика, 1980, *19,* № 3, 284—299 (РЖМат, 1981, 3А457)
23. *Кузьмин Е. Н.,* Простые алгебры Мальцева над полем характеристики нуль. Докл. АН СССР, 1968, *181,* № 6, 1324—1326 (РЖМат, 1969, 1А282)
24. —, Алгебры Мальцева и их представления. Алгебра и логика, 1968, *7,* № 4, 48—69 (РЖМат, 1969, 7А230)
25. —, Алгебры Мальцева размерности пять над полем характеристики нуль. Алгебра и логика, 1970, *9,* № 6, 691—700 (РЖМат, 1971, 8А240)
26. —, О связи между алгебрами Мальцева и аналитическими лупами Муфанг. Алгебра и логика, 1971, *10,* № 1, 3—22 (РЖМат, 1971, 11А309)
27. —, Теорема Леви для алгебр Мальцева. Алгебра и логика, 1977, *16,* № 4, 424—431 (РЖМат, 1978, 7А376)
28. *Мальцев А. И.,* Аналитические лупы. Мат. сб., 1955, *36,* № 3, 569—573 (РЖМат, 1956, 7204)
29. *Матвеев О. А.,* О многообразиях с геодезическими. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 44—49 (РЖМат, 1986, 8А823)
30. *Михеев П. О.,* О *G*-свойстве локальных аналитических луп Бола. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 54—59 (РЖМат, 1986, 8А205)
31. —, Об одной задаче Э. Картана. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1987, 76—81 (РЖМат, 1987, 7А745)
32. *Нестеров А. И., Степаненко В. А.,* О методах неассоциативной алгебры в геометрии и физике. Ин-т физ. СО АН СССР. Препр., 1986, № 400Ф, 48 с. (РЖМат, 1987, 3А514)
33. *Рашевский П. К.,* О геометрии однородных пространств. Докл. АН СССР, 1951, *80,* 161—171
34. —, Симметрические пространства аффинной связности с кручением. В сб. «Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу (МГУ им. М. В. Ломоносова)», 1950, *8,* 82—92
35. *Сабинин Л. В.,* О геометрии субсимметрических пространств. Научн. докл. высш. школы. Физ.-мат. н., 1958, № 3, 46—49 (РЖМат, 1960, 9493)
36. —, О геометрии трисимметрических римановых пространств. Сиб. мат. ж., 1961, *2,* № 2, 266—278 (РЖМат, 1962, 4А432)

37. —, О классификации трисимметрических пространств. Докл. АН СССР, 1970, *194,* № 3, 518—520 (РЖМат, 1971, 2А646)

38. —, К эквивалентности категорий луп и однородных пространств. Докл. АН СССР, 1972, *205,* № 3, 533—536 (РЖМат, 1972, 11А179)

39. —, О геометрии луп. Мат. заметки, 1972, *12,* № 5, 605—616 (РЖМат, 1973, 4А309)

40. —, О геометрии луп. В сб. «Тез. докл. V Всес. науч. конф. по соврем. пробл. дифференц. геометрии (Самарканд, 20—24 октября 1972)». Самарканд, 1972, с. 192

41. —, Одули как новый подход к геометрии со связностью. Докл. АН СССР, 1977, *233,* № 5, 800—803 (РЖМат, 1977, 8А710)

42. —, Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии. Добавление к кн.: *Кобаяси Ш., Номидзу К.,* Основы дифференциальной геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1981, 293—339 (РЖМат, 1981, 11А686К)

43. —, О касательных связностях лупускулярных структур. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 86—89 (РЖМат, 1986, 8А824)

44. —, Геометрические одули. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1987, 88—98 (РЖМат, 1987, 7А726)

45. —, *Михеев П. О.,* О симметрической связности в пространстве аналитической лупы Муфанг. Докл. АН СССР, 1982, *262,* № 4, 807—809 (РЖМат, 1982, 6А669)

46. —, —, Об аналитических лупах Бола. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1982, 102—109 (РЖМат, 1982, 12А227)

47. —, —, О геометрии гладких луп Бола. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 144—154 (РЖМат, 1985, 1А867)

48. —, —, О дифференциальной геометрии луп Бола. Докл. АН СССР, 1985, *281,* № 5, 1055—1057 (РЖМат, 1985, 9А612)

49. —, —, Теория гладких луп Бола. Тексты лекций. М.: Изд-во Ун-та дружбы народов, 1985. 81 с. (РЖМат, 1986, 7А211К)

50. —, —, О локальных аналитических лупах с тождеством правой альтернативности. Пробл. теории тканей и квазигрупп. Калинин, 1985, 72—75 (РЖМат, 1985, 10А244)

51. —, —, О локальных аналитических лупах и соответствующих им гипералгебрах. В сб. «Матер. 9 Конф. мол. ученых Ун-та дружбы народов, Москва, 15—19 апр. 1986. Ч. 1». М.: Ун-т дружбы народов. М., 1986 34—54, ил. Библиогр. 16 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 25.09.86, № 6848—В) (РЖМат, 1987, 1А508ДЕП)

52. —, —, Об инфинитезимальной теории локальных аналитических луп. Докл. АН СССР, 1987, *297,* № 4, 801—804 (РЖМат, 1988, 4А698)

53. —, *Янтранова С. С.,* О канонических редуктантах пространств постоянной кривизны. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1984, 76—83 (РЖМат, 1985, 1А871)

54. *Сбитнева Л. В.,* Совершенные *s*-структуры. Дифференц. геометрия многообразий фигур. Калининград, 1979, *10,* 97—103 (РЖМат, 1980, 1А854)

55. —, Об алгебрах Ли совершенных *s*-пространств. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1982, 128—133 (РЖМат, 1982, 12А229)

56. —, Об инфинитезимальной теории гладких *М*-луп. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 92—95 (РЖМат, 1986, 8А207)

57. *Скорняков Л. А.,* Топологические проективные плоскости. Тр. Моск. мат. о-ва, 1954, *3,* 347—373 (РЖМат, 1955, 4626)

58. *Феденко А. С.,* Регулярные пространства с симметриями. Мат. заметки, 1974, *14,* № 1, 113—120 (РЖМат, 1973, 11А615)

59. —, Пространства с симметриями. Минск: Наука и техника, 1977. 168 с. (РЖМат, 1977, 11А595К)

60. *Шелехов А. М.,* О вычислении ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани. Ткани и квазигруппы. Калинин, 1986, 96—103 (РЖМат, 1986, 8А796)

61. *d'Atri J. E.,* Connections and symmetry structures. Tensor, 1972, *25,* 448—450 (РЖМат, 1974, 3А538)

62. —, *Nickerson H. K.*, The existence of special orthonormal frames. J. Differ. Geom., 1968, *2*, № 4, 393—409 (РЖМат, 1970, 3А823)
63. *Barlotti A.*, *Strambach K.*, The geometry of binary systems. Adv. Math., 1983, *49*, № 1, 1—105 (РЖМат, 1984, 3А325)
64. *Batalin I. A.*, Quasigroup construction and first class constraints. J. Math. Phys., 1981, *22*, № 9, 1837—1856 (РЖМат, 1982, 4Б665)
65. *Bruck R. H.*, A survey of binary systems. 2 ed. Berlin: Springer, 1971, 186 pp. (РЖМат, 1971, 7А282К)
66. *Burdujan I.*, Sur les boucles de Lie-Banach. Proc. Inst. Math. Iaşi. Bucureşti, Acad. RSR, 1976, 23—30 (РЖМат, 1977, 9А855)
67. —, Sur un theorème de K. Yamaguti. Proc. Inst. Math. Iaşi. Bucureşti, Acad. RSR, 1976, 31—35 (РЖМат, 1977, 8А330)
68. —, Groupes de transformations dans la théorie des quasigroupes. An şti. Univ. Iaşi, 1978, Sec. 1A, № 1, 31—38 (РЖМат, 1979, 6А210)
69. —, Une application des systèmes homogènes de K. Yamaguti dans la géomètrie différentielle. Bull. Inst. politehn. Iaşi, 1979, Sec. 1, *25*, № 1—2, 47—49 (РЖМат, 1980, 8А642)
70. —, Observations on the homogeneous systems of K. Yamaguti. Bull. Inst. politehn. Iaşi, 1985, supl., Sec. 1, 57—60 (РЖМат, 1986, 8А557)
71. *Busemann H.*, The geometry of geodesics. N. Y.: Acad. Press. 1955, VII+422 pp. (РЖМат, 1957, 6668К) (Пер. на рус. яз.: *Буземан Г.*, Геометрия геодезических. М.: Физматгиз, 1962, 503 с. (РЖМат, 1962, 12А319К))
72. *Cartan E.*, La géomètrie des groupes de transformations. J. math. pures et appl., sér. 9, 1927, *6*, 1—119 (Пер. на рус. яз.: в кн. *Картан Э.*, Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: ИЛ, 1949, 7—111)
73. —, *Schouten J. A.*, On Riemannian geometries admitting an absolute parallelism. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1926, *29*, 923—946 (Перепечатка в кн.: *Cartan E.*, Oeuvres completes, pt. 1, v. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1952, 673—692)
74. *Conn J. F.*, On the structure of real transitive Lie algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1984, *286*, № 1, 1—71 (РЖМат, 1985, 8А288)
75. *Faulkner J. R.*, Dynkin diagrams for Lie triple systems. J. Algebra, 1980, *62*, 384—392 (РЖМат, 1980, 10А210)
76. —, Identity classification in triple systems. J. Algebra, 1985, *94*, № 2, 352—363 (РЖМат, 1986, 2А281)
77. *Freudenthal H.*, Kompakte projective Ebenen. III. J. Math., 1957, *1*, № 1, 9—13 (РЖМат, 1959, 8934)
78. *Glauberman G.*, On loops of odd order. 1. J. Algebra, 1964, *1*, № 4, 374—396 (РЖМат, 1966, 1А286)
79. *Graham P. J.*, *Ledger A. J.*, Sur une classe de *s*-*variétés* riemanniennes ou affinnes. C. r. Acad. sci., 1968, *A267*, № 2, 105—107 (РЖМат, 1969, 2А682)
80. —, —, *s*-regular manifolds. Differential geometry — in honour of K. Yano. Tokyo, 1972, 133—144
81. *Hofmann K. H.*, Topologische Loops. Math. Z., 1958, *70*, № 1, 13—37 (РЖМат, 1960, 1417)
82. —, Non-associative topological algebra. Tulane Univ. Lect. Notes, 1961, 132 pp.
83. —, *Strambach K.*, Topological and analytical loops. Prepr. № 869. Technische Hochschule Darmstadt, 1985, 96 pp.
84. —, —, Lie's fundamental theorems for local analytic loops. Pacif. J. Math., 1986, *123*, № 2, 301—327 (РЖМат, 1987, 2А479)
85. *Holmes J. P.*, Differentialbe power-associative groupoids. Pacif. J. Math., 1972, *41*, № 2, 391—394 (РЖМат, 1973, 1Б625)
86. —, Continuous homomorphisms are differentiable. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *65*, № 2, 277—281 (РЖМат, 1978, 8Б870)
87. —, *Sagle A. A.*, Problems in *H*-spaces and non-associative algebras. Kumamoto J. Sci., 1978/1979, *13*, 1—5

88. —, —, Analytic H-spaces, Campbell-Hausdorff formula, and alternative algebras. Pacif. J. Math., 1980, *91,* № 1, 105—134 (РЖМат, 1981, 11А300)
89. *Hudson S. N.,* Topological loops with invariant uniformities. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, *109,* № 1, 181—190 (РЖМат, 1965, 7А275)
90. —, Transformation groups in the theory of topological loops. Proc. Amer. Math. Soc., 1964, *15,* № 6, 872—877 (РЖМат, 1966, 12А378). Errata. Ibid., 1966, *17,* 770
91. —, Lie loops with invariant uniformities. I, II. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, *115,* № 3, 417—432; *118,* № 6, 526—533 (РЖМат, 1967, 2А274, 2А275)
92. *Jacobson N.,* General representation theory of Jordan algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1951, *76,* 509—530
93. *Kikkawa Michihiko,* On local loops in affine manifolds. J. Sci. Hiroshima Univ., 1964, Ser. A, *28,* № 2, 199—207 (РЖМат, 1966, 2А266)
94. —, On locally reductive spaces and tangent algebras. Mem. Fac. Lit. Sci. Shimane Univ. Nat. Sci., 1972, *5,* 1—13 (РЖМат, 1966, 2А266)
95. —, On some quasigroups of algebraic models of symmetric spaces. Mem. Fac. Lit. Sci. Shimane Univ. Nat. Sci., 1974, *7,* 29—35
96. —, Geometry of homogeneous Lie loops. Hiroshima Math. J., 1975, *5,* № 2, 141—179 (РЖМат, 1976, 2А848)
97. —, A note on subloops of a homogeneous Lie loop and subsystems of its Lie triple algebra. Hiroshima Math. J., 1975, *5,* № 3, 439—446 (РЖМат, 1976, 7А909)
98. —, On homogeneous systems. 1. Mem. Fac. Lit. Sci. Shimane Univ. Nat. Sci., 1977, *11,* 9—17
99. —, On homogeneous systems. 2. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 1978, *12,* 5—13
100. —, Remarks on solvability of Lie triple algebras. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 1979, *13,* 17—22
101. —, On homogeneous systems. 3, 4. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 1980, *14,* 41—46; 1981, *15,* 1—7
102. —, On Killing-Ricci forms on Lie triple algebras. Pacif. J. Math., 1981, *96,* № 1, 153—161 (РЖМат, 1982, 6А257)
103. —, On the decomposition of homogeneous systems with nondegenerate Killing-Ricci tensor. Hiroshima Math. J., 1981, *11,* 525—531 (РЖМат, 1982, 7А791)
104. —, On the Killing radical of Lie triple algebras. Proc. Jap. Acad., 1982, *A58,* № 5, 212—215 (РЖМат, 1983, 1А300)
105. —, Remarks on invariant forms of Lie triple algebras. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 1982, *16,* 23—27
106. —, On homogeneous systems. 5. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 1983, *17,* 9—13
107. —, Naturally reductive metrics on homogeneous systems. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1984, *A87,* № 2, 203—208 (РЖМат, 1984, 12А775)
108. —, Totally geodesic embeddings of homogeneous systems into their enveloping Lie groups. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 1984, *18,* 1—9
109. —, Canonical connections of homogeneous Lie loops and 3-webs. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 1985, *19,* 57—59
110. —, Remarks on canonical connections of loops with the left inverse property. Mem. Fac. Sci. Shimane Univ., 1986, *20,* 9—18
111. *Kowalski O.,* Riemannian manifolds with general symmetries. Math. Z., 1974, *136,* № 2, 137—150 (РЖМат, 1975, 1А803)
112. —, Generalized symmetric spaces. Berlin e. a.: Springer-Verlag, 1980, 187 pp. (РЖМат, 1981, 4А653) (Пер. на рус. яз.: *Ковальский О.,* Обобщенные симметрические пространства. М.: Мир, 1984, 240 с. (РЖМат, 1984, 6А672К))
113. *Kuzmine E. N.,* La relation entre les algèbres de Malcev et les boucles de

Moufang analytiques. C. r. Acad. sci., 1970, *A271*, № 23, 1152—1155 (РЖМат, 1971, 7A291)

114. *Ledger A. J.*, Espaces de Riemann symétriques généralisés. C. r. Acad. sci., 1967, *A264*, № 22, 947—948 (РЖМат, 1967, 12A620)

115. —, *Obata M.*, Affine and Riemannian *s*-manifolds. J. Differ. Geom., 1968, *2*, № 4, 451—459 (РЖМат, 1970, 2A637)

116. *Lister W. G.*, A structure theory of Lie triple systems. Trans. Amer. Math. Soc., 1952, *72*, № 2, 217—242

117. *Loos O.*, Über eine Beziehung zwischen Malcev-Algebren und Lie-Tripelsystemen. Pacif. J. Math., 1966, *18*, № 3, 553—562 (РЖМат, 1967, 7A244)

118. —, Symmetric spaces. V. 1, 2. N. Y.—Amsterdam: Benjamin, 1969, 198 pp., 183 pp. (РЖМат, 1970, 11A314K) (Пер. на рус. яз.: *Лоос О.*, Симметрические пространства. М.: Наука, 1985, 208 с. (РЖМат, 1985, 9A367K))

119. *Nôno Takayuki*, On geodesic subspaces of group spaces. J. Sci. Hiroshima Univ., 1958, Ser. A, *21*, 167—176

120. —, Sur les familles triples infinitésimales attachées aux familles triples de Lie. J. Sci. Hiroshicma Univ., 1960, Ser. A, *24*, № 3, 573—578 (РЖМат, 1962, 5A482)

121. —, Sur les familles triples locales de transformations locales de Lie. J. Sci. Hiroshima Univ., 1961, Ser. A, *25*, № 2, 357—366 (РЖМат, 1964, 6A388)

122. *Ravisankar T. S.*, On Malcev algebras. Pacif. J. Math., 1972, *42*, № 1, 227—234 (РЖМат, 1973, 4A371)

123. —, Some remarks on Lie triple systems. Kumamoto J. Sci., 1974, *11*, 1—8

124. *Robinson D. A.*, A loop-theoretic study of right-sided quasigroups. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, 1979, Ser. 1, *93*, № 1, 7—16 (РЖМат, 1980, 2A236)

125. *Sagle A. A.*, Malcev algebras. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, *101*, № 3, 426—458 (РЖМат, 1963, 5A293)

126. —, Simple Malcev algebras over fields of characteristic zero. Pacif. J. Math., 1962, *12*, № 3, 1057—1078 (РЖМат, 1964, 3A230)

127. —, On derivations of semi-simple Malcev algebras. Portug. math., 1962, *21*, № 1—2, 107—109 (РЖМат, 1963, 5A294)

128. —, On anti-commutative algebras and general Lie triple systems. Pacif. J. Math., 1965, *15*, № 1, 281—291 (РЖМат, 1966, 5A240)

129. —, Remarks on simple extended Lie algebras. Pacif. J. Math., 1965, *15*, № 2, 613—620 (РЖМат, 1966, 12A306)

130. —, On simple extended Lie algebras over fields of characteristic zero. Pacif. J. Math., 1965, *15*, № 2, 621—648 (РЖМат, 1966, 12A305)

131. —, On simple algebras obtained from homogeneous general Lie triple systems. Pacif. J. Math., 1965, *15*, № 4, 1397—1399 (РЖМат, 1966, 10A225)

132. —, On anti-commutative algebras and homogeneous spaces. J. Math. and Mech., 1967, *16*, № 12, 1381—1393 (РЖМат, 1968, 2A350)

133. —, A note on simple anti-commutative algebras obtained from reductive homogeneous spaces. Nagoya Math. J., 1968, *31*, 105—124 (РЖМат, 1968, 11A350)

134. —, A note on triple systems and totally geodesic submanifolds in a homogeneous space. Nagoya Math. J., 1968, *32*, 5—20 (РЖМат, 1969, 2A706)

135. —, On homogeneous spaces, holonomy, and non-associative algebras. Nagoya Math. J., 1968, *32*, 373—394 (РЖМат, 1969, 3A377)

136. —, Nonassociative algebras and Lagrangian mechanics on homogeneous spaces. Algebras, Groups and Geom. 1986, *2*, № 4, 478—494 (РЖМат, 1987, 3A525)

137. *Salzmann H.*, Topologische projective Ebenen. Math. Z., 1957, *67*, № 5, 436—466 (РЖМат, 1958, 5157)

138. *Singer I. M.*, *Sternberg S.*, On the infinite groups of Lie and Cartan.

I. The transitive groups. J. anal. math., 1965, *15,* 1—114 (РЖМат, 1966, 10A167)

139. *Strambach K.,* Reguläre idempotente Multiplikationen. Math. Z., 1975, *145,* № 1, 43—62 (РЖМат, 1976, 5A523)
140. —, Mehrfach scharf transitive Liesche-Moufang Loops. Arch. Math., 1977, *29,* Fasc. 1, 1—19 (РЖМат, 1978, 5A444)
141. *Tsagas G.,* *s*-manifolds. Tensor, 1985, *42,* № 1, 15—24 (РЖМат, 1986, 9A718)
142. —, *Ledger A. J.,* Riemannian *s*-manifolds. J. Differ. Geom., 1977, *12,* № 3, 333—343 (РЖМат, 1979, 6A602)
143. *Wolf J. A.,* On the geometry and classification of absolute parallelisms. I, 2. J. Differ. Geom., 1972, *6,* 317—342; 1972/1973, *7,* № 1—2, 19—44 (РЖМат, 1973, 11A598)
144. *Yamaguti Kiyosi,* On algebras of totally geodesic spaces. J. Sci. Hiroshima Univ., 1957/1958, *A21,* № 2, 107—113 (РЖМат, 1960, 4982)
145. —, On the Lie triple system and its generalization. J. Sci. Hiroshima Univ., 1957/1958, *A21,* № 2, 155—160
146. —, A note on a theorem of N. Jacobson. J. Sci. Hiroshima Univ., 1958, *A22,* № 3, 187—190 (РЖМат, 1961, 3A280)
147. —, Note on Malcev algebras. Kumamoto J. Sci., 1962, *A5,* 203—207
148. —, On the theory of Malcev algebras. Kumamoto J. Sci., 1963, *A6,* № 1, 9—45