КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Вып. 14 *Труды семинара по краевым задачам* *1977*

ГУРЕВИЧ И. Л.

ИСТЕЧЕНИЕ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ ИЗ СОСУДА С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ СТЕНКАМИ

Существование решения задачи об истечении тяжелой жидкости из сосуда с прямолинейными стенками доказано в [1] с помощью принципа Шаудера. В настоящей работе рассматривается случай криволинейных стенок (метод, примененный в [1], здесь непригоден). С помощью теоремы Лере — Шаудера устанавливается существование решения вспомогательной задачи (течение по схеме Жуковского — Рошко). Решение исходной задачи получается предельным переходом при удалении дополнительной твердой стенки на бесконечность. Единственность его доказывается с помощью вариационного принципа Лаврентьева.

§ 1. Постановка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим в плоскости $z = x + iy$ безвихревое течение идеальной тяжелой жидкости (рис. 1; сила тяжести направлена противоположно оси y). Здесь ABC, ED, AD — твердые стенки (ED — „вспомогательная"), ED и AD прямолинейны и параллельны оси y; CE — свободная линия тока. Известны форма линии ABC, расстояние r_0 от точки C до прямой AD, разность φ_E значений потенциала скорости в точках E и C (устремляемая впоследствии к ∞), расход $Q\pi/2$, ускорение силы тяжести γ. Заметим, что в [1] неизвестно r_0, вместо которого задается q — значение скорости v в точке C. Пусть ψ — функция тока, $w = \varphi + i\psi$, $w_C = 0$, β — аргумент вектора скорости.

Пусть $\zeta = \xi + i\eta$ — параметрическое переменное, $|\zeta| \leqslant 1$, $\sigma = \arg\zeta \in [0, \pi/2]$ (рис. 2). Переменные w и ζ связаны соотношением $w(\zeta) = -Q2^{-1}\ln[\delta^2 - 4(1-\delta^2)\zeta^2(1-\zeta^2)^{-2}]$, где $\delta \in (0, 1)$, причем $\delta \to 0$ при $\varphi_E \to \infty$. Отсюда легко получается

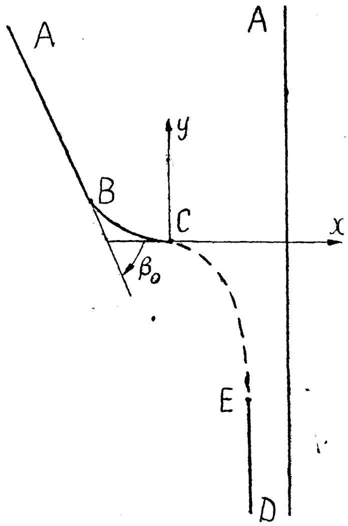

Рис. 1.

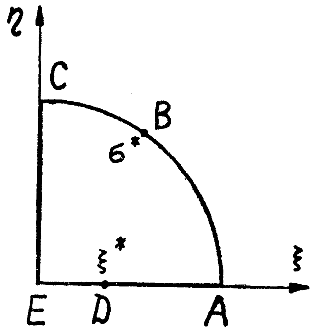

Рис. 2.

$$\xi^* = \frac{\delta}{2+\delta}, \quad \varphi_B = -\frac{Q}{2}\ln\left[\delta^2 + \frac{1-\delta^2}{\sin^2\sigma^*}\right], \quad \varphi_E = -Q\ln\delta, \tag{1.1}$$

$$\varphi(i\eta) = -\frac{Q}{2}\ln\left[\delta^2 + \frac{4(1-\delta^2)\eta^2}{(1+\eta^2)^2}\right], \tag{1.2}$$

$$\varphi(e^{i\sigma}) = -\frac{Q}{2}\ln\left[\delta^2 + \frac{1-\delta^2}{\sin^2\sigma}\right]. \tag{1.3}$$

Кривую ABC будем задавать естественным уравнением,

$$\beta = \Phi(l), \quad \Phi(0) = 0, \quad \Phi(l) = \beta_0 \text{ при } l \geqslant l_B = L, \tag{1.4}$$

где l — дуговая абсцисса, $l_C = 0$. Производную dw/dz будем искать в виде

$$\frac{1}{q}\frac{dw}{dz} \equiv \frac{v}{q}e^{-i\beta} = i\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^{1+2\beta_0/\pi} e^{\Omega(\zeta)}, \quad \Omega(0) = 0, \tag{1.5}$$

где $\Omega = \tau + i\theta$ — непрерывная функция. Из (1.5) следует, что $\theta(\xi) = 0$ при $\xi \in [0, 1]$, а при $\sigma \in [0, \pi/2]$, $\eta \in [0, 1]$ справедливы соотношения

$$v(e^{i\sigma}) = q\left(\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\right)^{1+2\beta_0/\pi}\exp\left[\tau(e^{i\sigma})\right], \quad \beta(e^{i\sigma}) = \Phi[l(\sigma)],$$

$$v(i\eta) = q\exp\left[\tau(i\eta)\right], \quad \beta(i\eta) = -\frac{\pi}{2} + \left(2 + \frac{4\beta_0}{\pi}\right)\operatorname{arctg}\eta - \theta(i\eta). \tag{1.6}$$

На CE выполняется уравнение Бернулли (в двух формах)

$$v^2 + 2\gamma y = q^2, \quad \frac{dv}{d\varphi} = -\gamma \frac{\sin\beta}{v^2}. \tag{1.7}$$

Запишем также очевидное соотношение $r_0 = x_E - x_C + Q\pi 2^{-1} v_D^{-1}$. Учитывая его, а также (1.2), (1.3), (1.4), (1.6) и используя формулы Шварца, Дини, Гильберта [2], можно получить следующую систему уравнений Σ относительно параметра q и функций $g(\eta) = d\tau(i\eta)/d\eta$, $f(\eta) = \beta(i\eta)$, $h(\sigma) = \tau(e^{i\sigma})$:

$$f(\eta) = -\frac{\pi}{2} - \int_0^1 D(\eta', \eta)\, g(\eta')\, d\eta' + \int_0^{\pi/2} \Phi[l(\sigma)]\, H(\sigma, \eta)\, d\sigma, \tag{1.8}$$

$$h(\sigma) = \int_0^{\pi/2} S(\sigma', \sigma)\, [\Phi(l(\sigma')) - \beta_0]\, d\sigma' + \int_0^1 K(\eta, \sigma)\, I[g(\eta)]\, d\eta, \tag{1.9}$$

$$g(\eta) = \frac{3\gamma Q}{q^3} \mu(\eta, \delta) \sin f(\eta) \left[1 + \frac{3\gamma Q}{q^3} \int_1^\eta \mu(\eta', \delta) \sin f(\eta')\, d\eta'\right]^{-1}, \tag{1.10}$$

$$q = \frac{Q}{r_0} \int_0^1 \mu(\eta, \delta) \cos f(\eta)\, e^{-I[g(\eta)]}\, d\eta + \frac{Q\pi}{2} \left(\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}\right)^{1+2\beta_0/\pi} e^{-\tau(\xi^*)}, \tag{1.11}$$

где

$$I[g(\eta)[= \int_0^\eta g(\eta')\, d\eta', \quad l(\sigma) = \frac{Q}{q} \int_\sigma^{\pi/2} \nu(\sigma', \beta_0, \delta)\, e^{-h(\sigma')},$$

$$\tau(\xi^*) = -\int_0^{\pi/2} P(\sigma, \xi^*)\, \Phi[l(\sigma)]\, d\sigma + \int_0^1 R(\eta, \xi^*)\, I[g(\eta)]\, d\eta, \tag{1.12}$$

$$\mu(\eta, \delta) = \frac{4(1-\delta^2)\,\eta\,(1-\eta^2)}{4(1-\delta^2)\,\eta^2 + \delta^2 (1+\eta^2)^2},$$

$$\nu(\sigma, \beta_0, \delta) = \left[\operatorname{ctg}\sigma + \frac{\delta^2 \sin 2\sigma}{2(1-\delta^2\cos^2\sigma)}\right] \left(\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}\right)^{1+2\beta_0/\pi},$$

а ядра интегральных операторов даются формулами

$$D(\eta', \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{(\eta'+\eta)(1-\eta'\eta)}{|\eta'-\eta|(1+\eta'\eta)}, \quad K(\eta, \sigma) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos\sigma\,(1+\eta^2)}{1+\eta^4+2\eta^2\cos 2\sigma},$$

$$H(\sigma, \eta) = \frac{4}{\pi} \frac{\eta(1-\eta^2)}{1+\eta^4+2\eta^2\cos^2\sigma}, \quad S(\sigma', \sigma) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin 2\sigma}{\cos^2\sigma' - \cos^2\sigma},$$

$$P(\sigma, \xi) = \frac{4}{\pi} \frac{\xi \sin 2\sigma}{1+\xi^4+2\xi^2\cos 2\sigma}, \quad R(\eta, \xi) = \frac{1}{\pi} \frac{\xi(1+\xi^2)}{(\eta^2+\xi^2)(1+\xi^2\eta^2)}.$$

Все ядра, кроме $S(\sigma', \sigma)$, неотрицательны.

Введем функции $F(u)$, $m(q)$ условиями: $F(u)=0$ при $u>0$, $F(u)=-1$ при $u<-\pi/2$, $F(u)=\sin u$ при $-\pi/2\leqslant u\leqslant 0$, $m(q)=\max(q, q^*)$, где $q^*>0$ — постоянная, определяемая ниже. Заменим в правых частях уравнений (1.10), (1.12) $\sin f$ на $F(f)$, q на $m(q)$. Полученные уравнения, не выписывая, обозначим (1.10*), (1.12*). Вместе с остальными уравнениями системы Σ они образуют систему Σ^* (аналогичная замена применяется в [3]).

§ 2. Существование решения вспомогательной задачи ($\delta > 0$)

Будем считать, что $\Phi(l)$ гельдерова с показателем $\rho\in(0, 1)$ и $-\pi/2\leqslant\Phi(l)\leqslant 0$. Кроме того, в дальнейшем предполагается, что $\delta\in(0, 1/2)$, откуда вытекает

$$\frac{\eta}{\eta^2+3\delta^2/4}\leqslant\mu(\eta, \delta)\leqslant\frac{\eta}{\eta^2+\delta^2/4}, \quad \nu(\sigma, \beta_0, \delta)\leqslant\frac{\cos\sigma}{\sin^2\sigma/2}. \tag{2.1}$$

Система Σ^* эквивалентна операторному уравнению $u=T(u)$, где $u\{f(\eta), g(\eta), h(\sigma), q\}$. Нетрудно показать, что T — вполне непрерывный оператор в пространстве $M=C_s[0, 1]\times\times C[0, 1]\times C[0, \pi/2]\times E_1$, где $s<\rho$, E_1 — числовая ось.

Лемма 1. *Пусть $u\in M$ — такое решение Σ^*, что $q>0$, $-\pi/2\leqslant f(\eta)\leqslant 0$. Тогда справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\|f(\eta)\|_s<M_1(\delta), \quad -M_2(\delta)\leqslant g(\eta)\leqslant 0,\\ |h(\sigma)|<M_3(\delta), \quad N_1<q<N_2;\end{gathered} \tag{2.2}$$

здесь и ниже положительные постоянные N_i, a_i, b_i, a, b, c не зависят от δ.

Доказательство. 1°. Так как во всем течении $-\pi/2\leqslant\beta\leqslant 0$, то, применяя неравенства Альфорса и Варшавского [4], получим $-a_1<\varphi_B<-a_2$. Отсюда, из (1.1) и (2.1) вытекает:

$$a_3<\sigma^*<\pi/2-a_3, \quad \nu(\sigma, \beta_0, \delta)<a_4 \text{ при } \sigma\geqslant\sigma^*.$$

2°. Из условий леммы и (1.10) следует, что $g(\eta)\leqslant 0$, т. е. $I[g(\eta)]\geqslant 0$. Поскольку $K(\eta, \sigma)\geqslant 0$, то отсюда и из (1.9) будем иметь

$$-h(\sigma)\leqslant\int_0^{\pi/2}S(\sigma', \sigma)\,[\Phi(l(\sigma'))-\beta_0]\,d\sigma'. \tag{2.3}$$

Используем выражение для q, получаемое из (1.12)

$$q=\frac{Q}{L}\int_{\sigma^*}^{\pi/2}\nu(\sigma, \beta_0, \delta)\,e^{-h(\sigma)}\,d\sigma. \tag{2.4}$$

Так как $-\pi/2 \leqslant \Phi(l) \leqslant 0$, то из (2.3), (2.4) и теоремы Зигмунда [5] найдем оценку сверху на q.

3°. На ED $\beta(z)$ равно $-\pi/2$, т. е. абсолютному минимуму.

Из принципа максимума вытекает, что $v(z)$ убывает вдоль ED. Следовательно, на $C\hat{E}D$ выполняется неравенство, вытекающее из (1.7) и последней оценки в (2.2):

$$v(y) < (N_2 + 2\gamma|y|)^{1/2}.$$

Пусть уравнение CED имеет вид $x = r_0 - r(y)$. По условию леммы $r(y)$ не убывает. Оценим $r(y)$ снизу. Пусть z_1, z_2 — точки на CED, причем $\operatorname{Im} z_1 = y$, $\operatorname{Im} z_2 = y - ar(y)$, где $a > 0$. Пусть $\Delta\varphi = \varphi(z_2) - \varphi(z_1)$. Используя оценку сверху на $v(y)$ и неубывание $r(y)$, легко показать, что $\Delta\varphi \leqslant (a+1) r(y) [N_2 + 2\gamma|y| + ar(y)]^{1/2}$. С другой стороны, по неравенству Альфорса [4]

$$\Delta\varphi > a_5 \int\limits_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{r(t)} - a_6 > a_5 a - a_6,$$

где $t_1 = y - ar(y)$, $t_2 = y$. Положим $a = 2a_6/a_5$. Тогда из двух неравенств для $\Delta\varphi$ получим $(a+1) r(y) [N_2 + 2\gamma|y| + ar(y)]^{1/2} > a_6$. Последнее неравенство разрешим относительно $r(y)$: $r(y) > n(y)$, $n(0) < r_0$, $n(-\infty) = 0$. Рассмотрим в плоскости z область R, ограниченную линиями AD, ABC, отрезком $y=0$, $0 \leqslant x \leqslant r_0 - n(0)$, и кривой с уравнением $x = r_0 - n(y)$, $y \leqslant 0$.

Эта область охватывается областью течения. По (2.2) $\beta_C = 0$, т. е. касательная к границе R непрерывна в точке C. Учитывая это и применяя вариационный принцип М. А. Лаврентьева [6], получим нижнюю оценку на q.

4°. Используя эту оценку, (2.3), (2.4), а также то, что $\nu(\sigma, \beta_0, \delta) < a_4$ при $\sigma \geqslant \sigma^*$, и применяя неравенства Гельдера и Зигмунда, найдем $\|l(\sigma)\|_\alpha < a_7$ при $\sigma > a_3$. Отсюда вытекает, что $\|\Phi[l(\sigma)]\|_{\alpha\rho} < a_8$ при $0 \leqslant \sigma \leqslant \pi/2$.

Из неравенств $N_1 < q < N_2$, $-\pi/2 \leqslant f(\eta) \leqslant 0$ и из (1.10) получается оценка $g(\eta) \geqslant -M_2(\delta)$.

Поскольку все используемые интегральные операторы непрерывны в пространствах Гельдера, то из (1.8), (1.9) и полученных оценок вытекает $\|f(\eta)\|_s < M_1(\delta)$, $|h(\sigma)| < M_3(\delta)$, $s = \alpha\rho$.

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (1.4) *и* $-\pi/2 \leqslant \Phi(l) \leqslant 0$. *Тогда существует хотя бы одно решение системы* Σ, *удовлетворяющее неравенствам* (2.2) *и* $-\pi/2 \leqslant f(\eta) \leqslant 0$.

Доказательство. Пусть в определении $m(q)$ положено $q^*=N_1$. Рассмотрим решение системы Σ^*, удовлетворяющее неравенствам (2.2) и $|f(\eta)|\leqslant\pi$. Так как $q>q^*$, то $m(q)=q$. Рассматриваемое решение соответствует решению гидродинамической задачи, в которой условие (1.7) заменено на $dv/d\varphi=-\gamma v^{-2}F(\beta)$. Применяя к последнему равенству принцип максимума, легко заключить, что во внутренних точках CE $\beta(z)$ не может достигать абсолютного отрицательного минимума и абсолютного положительного максимума. Следовательно, $-\pi/2\leqslant f(\eta)\leqslant 0$, т. е. $F[f(\eta)]=\sin f(\eta)$. Поэтому рассматриваемое решение Σ^* является решением Σ, удовлетворяющим условиям леммы 1.

Согласно лемме 1, оно не принадлежит границе области G из M, определяемой неравенствами (2.2) и $|f(\eta)|\leqslant\pi$.

Включим $T(u)$ в семейство $T(u,\ t)$, $t\in[0,1]$, заменяя β_0 на $t\beta_0$, $\Phi(l)$ на $t\Phi(l)$, γ на $t\gamma$. Легко видеть, что полученные оценки можно сделать равномерными по t, т. е. на границе G нет решений уравнения $u=T(u,\ t)$ при $t\in[0,\ 1]$. Уравнение $u=T(u,\ 0)$ имеет единственное решение $u_0=\{f_0(\eta),\ g_0(\eta),\ h_0(\sigma),\ q_0\}$, лежащее внутри G: $f_0(\eta)=-\pi/2+2\operatorname{arctg}\eta$, $h_0(\sigma)=g_0(\eta)=0$,

$$q_0=\frac{Q}{r_0}\int_0^1\mu(\eta,\ \delta)\frac{2\eta}{1+\eta^2}d\eta+\frac{Q\pi}{2}\frac{1+\xi^*}{1-\xi^*}.$$

Полные индексы решений уравнений $u=T(u)\equiv T(u,\ 1)$ и $u=T(u,\ 0)$ совпадают [7]. Оператор $T_0(u)=T(u,0)$ включим в семейство $T_0(u,\ \lambda)$, $\lambda\in[0,\ 1]$, умножая $D(\eta',\ \eta)$, $K(\eta,\ \sigma)$ на λ и заменяя правую часть A в (1.11) на $\lambda A+(1-\lambda)q_0$. Уравнение $u=T_0(u,\ \lambda)$ имеет при любом λ единственное решение u_0. Но $T_0(u,\ 0)$ не зависит от u, поэтому полный индекс всех трех уравнений равен $+1$. Применяя принцип Лере — Шаудера, получаем доказательство теоремы.

§ 3. Существование решения основной задачи ($\delta=0$)

Пусть δ_n — сходящаяся к нулю последовательность значений параметра δ, а u_n — соответствующая последовательность решений системы Σ. Мы покажем, что u_n сходится к некоторой вектор-функции u^0, которая является решением системы Σ при $\delta=0$. Это решение соответствует случаю, когда стенка ED отсутствует, и $v(y)\to\infty$ при $y\to-\infty$.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1, *и в* Σ *положено* $\delta=\delta_n$. *Тогда справедливы оценки* ($c\in(0,\ 1)$)

$$N_3\ln|\ln c\eta|>I[g_n(\eta)]>N_4\ln|\ln c(\eta^2+b\delta_n^2)|,\tag{3.1}$$

$$0\geqslant g_n(\eta)>\frac{N_5}{\eta\ln c\eta}.\tag{3.2}$$

Доказательство. Пусть $y < -r_0$. Тогда, учитывая (1.7) и $q < N_2$, будем иметь на CE: $\varphi(y) < (N_2 + 2\gamma|y|)^{1/2} \times \times (|y| + r_0) < a_9|y|^{3/2}$, откуда $|y| > a_{10}\varphi^{2/3}$. Отсюда, из (1.7) и $q > N_1$ получим на всей CE: $v(\varphi) > \max(N_1, a_{11}\varphi^{1/3})$. Но в силу (1.2) $\varphi(\eta) \geqslant a_{12}\ln[(1 + b\delta_n^2)/(\eta^2 + b\delta_n^2]$, что вместе с предыдущим неравенством дает: $v(\eta) > a_{13}|\ln c(\eta^2 + b\delta_n^2)|^{1/3}$.

Так как $v(\eta) = q\exp I[g_n(\eta)]$, то из последней оценки и $q < N_2$ вытекает второе неравенство в (3.1).

Первое из неравенств (3.2) уже установлено в теореме 1. Второе легко получается из (2.1), оценки снизу на $v(\eta)$ и вытекающего из (1.7), (1.10) соотношения $g(\eta) = = 3\gamma Q\mu(\eta, \delta)\sin f(\eta)v^{-3}(\eta)$. Наконец, первое из неравенств (3.1) следует из (3.2) и определения $I[g(\eta)]$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть выполняются условия леммы 2. Тогда справедливы оценки*

$$\|p_n(\eta)\|_s = \left\|\int_0^{\pi/2} H(\sigma, \eta)\,\Phi[l_n(\sigma)]\,d\sigma\right\|_s < N_6, \quad |p_n(\eta)| < N_7\eta, \tag{3.3}$$

$$\left\|\int_0^{\pi/2} S(\sigma', \sigma)\,[\Phi(l_n(\sigma')) - \beta_0]\,d\sigma'\right\|_s < N_8, \tag{3.4}$$

$$0 \leqslant \int_0^1 K(\eta, \sigma)\,I[g_n(\eta)]\,d\eta < N_9, \tag{3.5}$$

$$\tau(\xi_n^*) > N_{10}\ln|\ln\delta_n|, \tag{3.6}$$

$$0 \geqslant \int_0^1 D(\eta', \eta)\,g_n(\eta')\,d\eta' \geqslant \frac{N_{11}}{\ln c\eta}. \tag{3.7}$$

Доказательство. 1°. Первые неравенства в (3.5), (3.7) вытекают из неотрицательности $K(\eta, \sigma)$, $D(\eta', \eta)$, $I[g_n(\eta)]$, $-g_n(\eta)$. Неравенства (3.4) и первое из (3.3) получались при доказательстве леммы 1. Вторая оценка в (3.3) выводится элементарно.

2°. В (3.5) разобьем интервал интегрирования $[0, 1]$ на $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$. В первом интеграле ядро ограничено, и вследствие первого неравенства в (3.1) он сам ограничен. Во втором — функция $I[g_n(\eta)]$ ограничена, а ядро интегрируемо.

3°. Первый член выражения для $\tau(\xi_n^*)$ в (1.12) не превышает по модулю $a_{14}\xi_n^*$ вследствие (2.8). Пусть $t = \xi_n^*$. Учитывая второе неравенство в (3.1), найдем, что второе слагаемое в выражении для $\tau(\xi_n^*)$ больше величины

$$a_{15}t\int\limits_0^{1/2}\frac{\ln|\ln(\eta^2+t^2)|}{\eta^2+t^2}d\eta>a_{16}\ln|\ln t|$$

(последнее неравенство получается после интегрирования по частям). Отсюда и из (1.1) вытекает (3.6).

4°. Рассмотрим аналитическую функцию $\omega(\zeta)=\ln(-\ln c\zeta)$. Имеем

$$\omega(i\eta)=\ln(\ln^2 c\eta+\pi^2/4)^{1/2}+i\pi/(2\ln c\eta),$$
$$u_1(\eta)\equiv d/d\eta\,\mathrm{Re}\,\omega(i\eta)=\ln c\eta/[\eta(\ln^2 c\eta+\pi^2/4)]<0,$$
$$u_2(\sigma)\equiv\mathrm{Im}\,\omega(e^{i\sigma})=\mathrm{arctg}(\sigma/\ln c)\leqslant 0,\ \ \mathrm{Im}\,\omega(\xi)=0.$$

Из соотношения

$$\mathrm{Im}\,\omega(i\eta)\equiv\frac{\pi}{2\ln c\eta}=\int\limits_0^1 D(\eta',\ \eta)\,u_1(\eta')\,d\eta'+\int\limits_0^{\pi/2}H(\sigma,\ \eta)\,u_2(\sigma)\,d\sigma$$

и неположительности второго слагаемого вытекает

$$\int\limits_0^1 D(\eta',\ \eta)\,u_1(\eta')\,d\eta'>\frac{\pi}{2\ln c\eta}.$$

Сравнивая $u_1(\eta)$ и $g_n(\eta)$ и используя (3.2), получим (3.7). Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия лемм* 2,3. *Тогда из последовательности* u_n *можно выбрать такую подпоследовательность (обозначим ее снова* u_n*), что* $q_n\to q^0$, $f_n(\eta)$ *и* $h_n(\sigma)$ *сходятся равномерно соответственно при* $\eta\in[0,\ 1]$, $\sigma\in[0,\ \pi/2]$ *к непрерывным функциям* $f^0(\eta)$, $h^0(\sigma)$, *а* $g_n(\eta)$ *сходится к непрерывной при* $\eta\in(0,\ 1]$ *функции* $g^0(\eta)$ *равномерно на каждом интервале* $[\varepsilon,\ 1]$, *где* $\varepsilon>0$.

Доказательство. 1°. Докажем равностепенную непрерывность последовательности функций

$$\int\limits_0^1 D(\eta',\ \eta)\,g_n(\eta')\,d\eta'.$$

Пусть $\eta\geqslant\varepsilon>0$. Разобьем $[0,\ 1]$ на $[0,\ \varepsilon/2]$ и $[\varepsilon/2,\ 1]$. Интегралы по $[\varepsilon/2,\ 1]$, в силу (3.2) и известных свойств ядра $D(\eta',\ \eta)$, образуют равностепенно непрерывное семейство. Рассмотрим

$$A(\eta_1,\ \eta_2)=\int\limits_0^{\varepsilon/2}[D(\eta',\eta_2)-D(\eta',\eta_1)]\,g_n(\eta')\,d\eta'.$$

Имеем при $\eta_2>\eta_1\geqslant\varepsilon,\ \eta'<\varepsilon/2$:

$$0 \leqslant \ln \frac{1+\eta'\eta_2}{1+\eta'\eta_1} = \ln\left(1+\eta' \frac{\eta_2-\eta_1}{1+\eta'\eta_1}\right) \leqslant \eta'(\eta_2-\eta_1);$$

$$0 \leqslant \ln \frac{1-\eta'\eta_1}{1-\eta'\eta_2} = \ln\left(1+\eta' \frac{\eta_2-\eta_1}{1-\eta'\eta_2}\right) \leqslant \frac{2\eta'(\eta_2-\eta_1)}{2-\varepsilon};$$

$$0 \leqslant \ln \frac{(\eta+\eta')(\eta_2-\eta')}{(\eta-\eta')(\eta_2+\eta')} = \ln\left[1+2\eta' \frac{\eta_2-\eta_1}{(\eta_1-\eta')(\eta_2+\eta')}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4\eta'(\eta_2-\eta_1)}{\varepsilon^2}.$$

Используя эти неравенства и (3.2), получим $|A(\eta_1, \eta_2)| < < a_{17}(\eta_2-\eta_1)/\varepsilon^2$.

Пусть теперь $\eta < \varepsilon$. Согласно (3.7), колебание исследуемых функций на $[0, \varepsilon]$ не превышает $N_1 |\ln c\varepsilon|^{-1}$. Отсюда и из вышеизложенного вытекает требуемая равностепенная непрерывность на $[0, 1]$.

2°. Докажем равностепенную непрерывность последовательности функций

$$\int_0^1 K(\eta, \sigma) I[g_n(\eta)]\, d\eta.$$

Разобьем $[0, 1]$ на $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$. В силу первого из неравенств (3.1) и второго из (3.2) интегралы по $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$ ограничены по норме $C_s[0, 1]$ равномерно по n, т. к. в первом интеграле ядро имеет ограниченные производные, а во втором $I[g_n(\eta)]$ имеет ограниченную производную (оператор с ядром $K(\eta, \sigma)$ непрерывен в $C_s[0, 1]$). Отсюда и следует равностепенная непрерывность.

3°. Из (3.3), (3.4), (3.5), (3.7), 1°, 2° и уравнений Σ вытекает равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность, а следовательно, и сходимость $f_n(\eta)$ и $h_n(\sigma)$. Из двусторонних оценок на q следует $q_n \to q^0$. Учитывая теперь, что $\mu(\eta, \delta_n) \to \mu(\eta, 0)$ равномерно на каждом $[\varepsilon, 1]$, и используя (1.10), получаем утверждение леммы относительно $g_n(\eta)$. Лемма 4 доказана.

Теорема 2. *Вектор-функция* $u^0 = \{f^0(\eta), g^0(\eta), h^0(\sigma), q^0\}$, *полученная в лемме* 4, *является решением системы* Σ_0, *т. е. системы* Σ *при* $\delta = 0$.

Доказательство. 1°. В силу (3.6) $\tau(\xi_n^*) \to \infty$, т. е. второе слагаемое в (1.11) стремится к нулю. В первом слагаемом разобьем интервал $[0, 1]$ на $[0, \varepsilon]$ и $[\varepsilon, 1]$. Используя (2.1), (1.8), (3.3), (3.7), (3.1), нетрудно показать, что интеграл по $[0, \varepsilon]$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно по n. При фиксированном ε интеграл по $[\varepsilon, 1]$ сходится при $\delta_n \to 0$ к

$$\frac{Q}{r_0} \int_{\varepsilon}^{1} \mu(\eta, 0) \cos f^0(\eta)\, e^{-I[g^0(\eta)]} d\eta.$$

2°. Из (1.12) следует, что производная $dl_n/d\sigma$ равномерно на $[a_3, \pi/2]$ сходится к $dl^0/d\sigma = Q\nu(\sigma, \beta_0, 0) \exp[-h^0(\sigma)]/q^0$.

3°. Аналогично 1°, легко показать, что второе слагаемое в (1.9) равномерно на $[0, \pi/2]$ сходится к

$$\int_0^1 K(\eta, \sigma) I[g^0(\eta)]\, d\eta.$$

4°. В первом интеграле в (1.8) положим $\eta \geqslant \varepsilon$ и разобьем $[0, 1]$ на $[0, \varepsilon_1]$ и $[\varepsilon_1, 1]$, где $\varepsilon_1 < \varepsilon/2$. Имеем в силу (3.2)

$$B(\eta) = \left| \int_0^1 D(\eta', \eta) [g_n(\eta') - g^0(\eta')]\, d\eta' \right| \leqslant$$

$$\leqslant a_{18} \int_0^{\varepsilon_1} \frac{1}{\eta' \,|\ln c\eta'|} \ln \left| \frac{\eta' + \eta}{\eta' - \eta} \right| d\eta' +$$

$$+ \frac{a_{19}}{\varepsilon_1 \,|\ln c\varepsilon_1|} \int_{\varepsilon_1}^{1} D(\eta', \eta) \,|g_n(\eta') - g^0(\eta')|\, d\eta'.$$

Второй интеграл сходится к нулю равномерно при $\eta \geqslant \varepsilon$. Первый же, как легко показать, не превышает $a_{20} |\ln c\varepsilon_1|^{-1}$.

Если $\eta < \varepsilon$, то, согласно (3.7), $B(\eta) < N_{10} |\ln c\varepsilon|^{-1}$. Из вышеизложенного вытекает равномерная при $\eta \in [0, 1]$ сходимость первого интеграла в (1.18) к функции

$$\int_0^1 D(\eta', \eta)\, g^0(\eta')\, d\eta'.$$

5°. Из результатов 1° — 4° следует, что правые части системы Σ сходятся к правым частям Σ_0, причем в (1.8) и (1.9) эта сходимость равномерная на $[0, 1]$ и $[0, \pi/2]$, а в (1.10) — равномерная на каждом $[\varepsilon, 1]$. Так как левые части Σ сходятся к левым частям Σ_0, то теорема 2 доказана.

§ 4. Единственность решения основной задачи

Предположим, что существуют два течения, в которых $-\pi/2 \leqslant \beta \leqslant 0$. Пусть в них свободные границы задаются уравнениями $x = r_k(y)$, $k = 1, 2$, причем $r_k(0) = 0$, $r_k(-\infty) = r_0$.

Пусть $r_1 \not\equiv r_2$, $\max[r_1(y) - r_2(y)] \geqslant 0$ достигается при $y = y'$, $\min[r_1(y) - r_2(y)] \leqslant 0$ — при $y = y''$.

Из вариационного принципа М. А. Лаврентьева легко получить, что $v_1(y') > v_2(y')$, $v_1(y'') < v_2(y'')$. Отсюда и из (1.7) вытекают противоречащие друг другу неравенства:

$$q_1^2 - q_2^2 = v_1^2(y') - v_2^2(y') > 0, \quad q_1^2 - q_2^2 = v_1^2(y'') - v_2^2(y'') < 0.$$

Теорема 3. *Существует не более одного решения основной задачи, в котором* $-\pi/2 \leqslant \beta \leqslant 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carter D. S. Existence of a class of steady plane gravity flows. — Pasif. J. Math., 1961, 11, № 3.
2. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
3. Жербе Р. О точных решениях уравнений движения тяжелой жидкости со свободной поверхностью. — В кн.: Теория поверхностных волн. М., 1959.
4. Евграфов М. А. Аналитические функции. М., „Наука“, 1965.
5. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М., „Мир“, 1965.
6. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
7. Leray J., Shauder J. Topologie et equations fonctionnelles. Ann. Ecole Norm. Sup., 51 (1934).

Доложено на семинаре 5 мая 1976 г.