А. А. Фонарёв, О проекционном аналоге метода Эйлера, *Изв. вузов. Матем.*, 1984, номер 6, 64–66

А. А. Фонарёв УДК 517.988

О ПРОЕКЦИОННОМ АНАЛОГЕ МЕТОДА ЭЙЛЕРА

В п. 1 данной статьи рассматривается проекционный аналог метода ломаных Эйлера в бесконечномерных банаховых пространствах, в п. 2 изучается разностный метод отыскания неявной функции, построенный на основе проекционного аналога метода ломаных Эйлера.

Пусть U — открытое множество банахова пространства X, ∂U — граница U, $\overline{U}=U\bigcup\partial U$, $D=[0,\ 1]\times U$, $\overline{D}=[0,\ 1]\times\overline{U}$ ($\overline{D}$ — метрическое пространство с расстоянием $|t_1-t_2|+\|x_1-x_2\|$ для $(t_i,\ x_i)\in[0,\ 1]\times\overline{U}$ $(i=1,\ 2)$), Y — банахово пространство.

Предположим, что заданы: 1) такие последовательности $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ замкнутых подпространств X и Y соответственно, что $X_i\subset X_{i+1}$ и $Y_i\subset Y_{i+1}$ для $i=1,\ 2,\ \ldots$; 2) такие проекторы Q_i пространства Y на Y_i (определение проектора см. в [1], с. 132), что $Q_iy\to y$ при $i\to\infty$ для каждого $y\in Y$; 3) такие отображения P_i из X в X_i, что $P_ix\to x$ при $i\to\infty$ для каждого $x\in X$.

Отметим, что из условия 2 в силу теоремы Банаха—Штейнгауза (см. [1]) вытекает, что существует такая постоянная $S\geqslant 1$, что $\|Q_i\|\leqslant S$ для $i=1,\ 2,\ \ldots$

1. *Проекционный аналог метода ломаных Эйлера.* В п. 1. будем предполагать, что $X=Y$ и $X_i=Y_i$ для $i=1,\ 2,\ \ldots$

Рассмотрим задачу Коши

$$x'=\varphi(t,\ x),\ x(0)=x_0\in U\ (t\in[0,\ 1]),\tag{1}$$

где отображение $\varphi:D\to X$ такое, что для всех $x,\ y\in U$ и $s,\ t\in[0,\ 1]$ имеем: 1) $\|\varphi(s,\ x)-\varphi(s,\ y)\|\leqslant L\|x-y\|$; 2) $\|\varphi(s,\ x)-\varphi(t,\ x)\|\leqslant K|s-t|$; 3) $\|\varphi(t,\ x)\|\leqslant P$ (L, K, P — константы).

Предположим, что существует непрерывно дифференцируемое отображение $f:[0,\ 1]\to U$, являющееся решением задачи (1).

Лемма 1. *Для всех* $t,\ s\in[0,\ 1]$ *имеем* $\|f'(t)-f'(s)\|\leqslant C_1|t-s|$, *где* $C_1=PL+K$.

Из леммы 1 вытекает

Лемма 2. *Для всех* $t,\ s\in[0,\ 1]$ *имеем* $\|f(t)-f(s)-(t-s)f'(s)\|\leqslant C|t-s|^2$, *где* $C=C_1/2$.

Пусть n — натуральное число, $\Delta_n=1/n$, $t_i^n=i\Delta_n$ для $0\leqslant i\leqslant n$.

Рассмотрим разностный метод

$$z_{i+1}^n=z_i^n+\Delta_nQ_n\varphi(t_i^n,\ z_i^n)\tag{2}$$

$(0\leqslant i\leqslant n-1)$, начатый с $z_0^n=Q_nx_0$. Пусть $f^n(t)$ — ломаная Эйлера, соответствующая разностному методу (2), т. е. $f^n(t)=z_i^n+(t-t_i^n)\Delta_n^{-1}(z_{i+1}^n-z_i^n)$ для $t\in[t_i^n,\ t_{i+1}^n]$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$.

Если предположим, что разностный метод (2) осуществим, то $\|z_i^n-f(t_i^n)\|\leqslant(1+q\Delta_n)\|z_{i-1}^n-f(t_{i-1}^n)\|+\Delta_n\|u^n(t_{i-1}^n)\|+C\Delta_n^2$ для $i=\overline{1,\ n}$, где $q=SL$ и $u^n(t)=f'(t)-Q_nf'(t)$ для $t\in[0,\ 1]$. Следовательно,

$$\|z_i^n-f(t_i^n)\|\leqslant(1+q\Delta_n)^i\|z_0^n-f(t_0^n)\|+$$
$$+C\Delta_n^2\sum_{m=1}^{i}(1+q\Delta_n)^{i-m}+\Delta_n\sum_{m=1}^{i}(1+q\Delta_n)^{i-m}\|u^n(t_{m-1}^n)\|.$$

А т. к.

$$\sum_{m=1}^{i}(1+q\Delta_n)^{i-m}=((1+q\Delta_n)^i-1)/(q\Delta_n)\leqslant(\exp(qt_i^n)-1)/(q\Delta_n)\leqslant(\exp q-1)/(q\Delta_n)$$

для $i=\overline{1,\ n}$, то из равномерной сходимости $u^n(t)$ к нулю при $n\to\infty$ на $[0,\ 1]$ вытекает

Теорема 1. *Существует такой номер N, что для каждого фиксированного $n \geqslant N$ разностный метод* (2) *осуществим и $f^n(t)$ сходится к $f(t)$ при $n \to \infty$ равномерно на* $[0, 1]$.

2. *Разностный метод отыскания неявной функции.* Пусть $L(X, Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов из X в Y.

Предположим, что непрерывное отображение $F: \bar{D} \to Y$ имеет частные производные по t и x для всех $(t, x) \in D$, причем линейный оператор $F'_x(t, x) \in L(X, Y)$ имеет обратный $(F'_x(t, x))^{-1} \in L(Y, X)$ для каждого $(t, x) \in D$ и существуют такие постоянные δ, L_0, M, K, N, P, что для всех t, $s \in [0, 1]$ и x, $z \in U$ имеем: 1) $\|(F'_x(t, x))^{-1}\| \leqslant \delta$; 2) $\|F'_x(t, x) - F'_x(t, z)\| \leqslant L_0 \|x - z\|$; 3) $\|F'_t(t, x)\| \leqslant M$; 4) $\|F'_t(t, x) - F'_t(t, z)\| \leqslant K\|x - z\|$; 5) $\|F'_x(t, x) - F'_x(s, x)\| \leqslant N|t - s|$; 6) $\|F'_t(t, x) - F'_t(s, x)\| \leqslant P|t - s|$; 7) оператор $A_n(t, z) \in L(X_n, Y_n)$, где $A_n(t, z)y = Q_n F'_x(t, z)y$ для каждого $y \in X_n$, имеет обратный $(A_n(t, z))^{-1} \in L(Y_n, X_n)$ и $\|(A_n(t, z))^{-1}\| \leqslant \delta$ (при всех n).

Отметим, что условия 1) — 6) аналогичны условиям из [2] и [3].

Лемма 3. *Для всех $t \in [0, 1]$ и x, $z \in U$ имеем*

$$\|(A_n(t, x))^{-1} - (A_n(t, z))^{-1}\| \leqslant \delta^2 S L_0 \|x - z\|.$$

Лемма 4. *Для всех $t \in [0, 1]$ и x, $z \in U$ имеем* $\|(A_n(t, x))^{-1} Q_n F'_t(t, x) - (A_n(t, z))^{-1} Q_n F'_t(t, z)\| \leqslant C_0 \|x - z\|$, *где* $C_0 = \delta S(\delta S L_0 M + K)$.

Лемма 5 (см. лемму 5 в [4]). *Пусть*: 1) $F(0, x_0) = 0$ *для некоторого* $x_0 \in U$; 2) $F(t, x) \neq 0$ *для всех* $(t, x) \in [0, 1]\, \partial U$. *Тогда существует такое непрерывно дифференцируемое отображение* $f: [0, 1] \to U$, *что* $F(t, f(t)) = 0$ *для всех* $t \in [0, 1]$, $f(0) = x_0$ *и* $\|f(t) - f(s) - (t - s) f'(s)\| \leqslant C|t - s|^2$ *для всех* t, $s \in [0, 1]$, *где* $C = (\delta L_0 M + K)\delta^2 M + \delta(P + \delta N M)$.

Пусть $\Delta_n = 1/n$, где n — натуральное число, $t_i^n = i\Delta_n$ для $0 \leqslant i \leqslant n$.

Рассмотрим разностный метод

$$z_{i+1}^n = z_i^n - \Delta_n (A_n(t_i^n, z_i^n))^{-1} Q_n F'_t(t_i^n, z_i^n) \tag{3}$$

$(0 \leqslant i \leqslant n - 1;\ z_0^n = P_n x_0)$. Пусть отображение $f_n: [0, 1] \to X$ такое, что $f_n(t) = z_i^n + (t - t_i)\Delta_n^{-1}(z_{i+1}^n - z_i^n)$ для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ $(0 \leqslant i \leqslant n - 1)$.

Если предположим, что разностный метод (3) осуществим и выполнены условия леммы 5, то $\|z_i^n - f(t_i^n)\| \leqslant (1 + C_0\Delta_n)\|z_{i-1}^n - f(t_{i-1}^n)\| + C\Delta_n^2 + \Delta_n \|v^n(t_{i-1}^n, f(t_{i-1}^n))\|$ для $i = \overline{1, n}$, где $v^n(t, f(t)) = ((F'_x(t, f(t)))^{-1} - (A_n(t, f(t)))^{-1} Q_n) F'_t(t, f(t))$ для $t \in [0, 1]$. Следовательно,

$$\|z_i - f(t_i)\| \leqslant (1 + C_0\Delta_n)^i \|z_0^n - f(t_0^n)\| + C\Delta_n^2 \sum_{m=1}^{i} (1 + C_0\Delta_n)^{i-m} + \Delta_n \sum_{m=1}^{i} (1 + C_0\Delta_n)^{i-m} \|v^n(t_{m-1}^n, f(t_{m-1}^n))\|$$

при $i = \overline{1, n}$. Отсюда и из равномерной сходимости $v^n(t, f(t))$ к нулю при $n \to \infty$ на $[0, 1]$ вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы 5. Тогда существует такой номер N_0, что для каждого фиксированного $n \geqslant N_0$ разностный метод* (3) *осуществим и $f_n(t)$ сходится к $f(t)$ при $n \to \infty$ равномерно на* $[0, 1]$.

Предположим, что отображение A из X в Y является C^2-диффеоморфизмом (см. [5]) и для каждого элемента $x_0 \in X$ существуют такие число $\alpha_0 = \alpha_0(x_0) > 0$ и номер $n_0 = n_0(x_0)$, что для любого $n \geqslant n_0$ оператор $A_n(x_0) \in L(X_n, Y_n)$, где $A_n(x_0)x = Q_n A'(x_0)x$ для каждого $x \in X_n$, имеет обратный $(A_n(x_0))^{-1} \in L(Y_n, X_n)$ и $\|(A_n(x_0))^{-1}\| \leqslant \alpha_0$. Зафиксируем произвольный элемент $x_0 \in X$. Тогда справедливо

Предложение 1. *Для заданного* $y \in Y$ *существует такой номер* $N_0 = N_0(x_0, y)$, *что для любого* $n \geqslant N_0$ *разностный метод* $z_{i+1}^n = z_i^n + \Delta_n (A_n'(z_i^n))^{-1} Q_n (y - A(x_0))$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1;$ $z_0^n = P_n x_0;$ $\Delta_n = 1/n)$ *осуществим и* $z_n^n \to z$ *при* $n \to \infty$, *где* $z \in X$ — *такой элемент, что* $A(z) = y$.

Предложение 1 вытекает из теоремы 2, ибо прообраз компакта при диффеоморфизме есть компакт (в данном случае рассматривается разностный метод теоремы 2 для отыскания неявной функции уравнения $A(x) - A(x_0) - t(y - A(x_0)) = 0$ $(t \in [0, 1])$).

В заключение отметим, что метод приближенного решения нелинейных операторных уравнений, заключающийся в приведении уравнения путем дифференцирования по параметру к дифференциальному уравнению первого порядка и численному интегрированию последнего, был предложен Д. Ф. Давиденко (см. [6] — [8] и [9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— 2-е изд.— М., 1977.—741 с.
2. Дементьева А. М. О разностных методах построения неявной функции.— ДАН СССР, 1971, т. 201, № 4, с. 774—777.
3. Дементьева А. М. Об одном способе построения неявной функции.— УМН, 1972, т. XXVII, вып. 4, с. 209—210.
4. Фонарёв А. А. О нелокальной продолжаемости решений некоторых нелинейных уравнений.— В сб.: Дифференц. уравнения и вопр. теории ветвления. Ташкент, 1982, с. 97—110.
5. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.— М., 1971.— 392 с.
6. Давиденко Д. Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений.— ДАН СССР, 1953, т. 88, № 4, с. 601—602.
7. Давиденко Д. Ф. О приближенном решении систем нелинейных уравнений.— Укр. матем. журн., 1953, т. V, № 2, с. 196—206.
8. Давиденко Д. Ф. О приложении метода вариации параметра к теории нелинейных функциональных уравнений.— Укр. матем. журн., 1955, т. VII, № 1, с. 18—28.
9. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.— М., 1975.— 560 с.

г. Москва

Поступила 12.07.1982

Е. А. Широкова

УДК 517.546

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРАХ, НЕ ВЫВОДЯЩИХ ИЗ КЛАССА ФУНКЦИЙ, ОДНОЛИСТНЫХ В КРУГЕ

В данной статье речь пойдет об операторах, действующих в классе S однолистных и аналитических в единичном круге $E = \{z : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + \ldots$ Рассматриваемые операторы являются обобщениями оператора, исследованного впервые в [1]:

$$A_c[f_0] = \frac{c+1}{z^c} \int_0^z \zeta^{c-1} f_0(\zeta)\, d\zeta .$$

В [1] — [4] было показано, что оператор $A_c[f]$ не выводит из подклассов S^0 в ыпуклых, S^* звездообразных и C почти выпуклых функций.

При доказательстве однолистности здесь будет использована

Лемма 1 [5]. *Пусть* $p(z) = \alpha + i\beta + \ldots$, *аналитическая при* $|z| < 1$ *функция, удовлетворяет условию* $\operatorname{Re}[p + zp'/p] > 0$, $|z| < 1$. *Тогда* $\operatorname{Re} p(z) > 0$, $|z| < 1$.

Доказательство однолистности функции $f(z)$ будет вестись путем включения $f(z)$ в параметрическое семейство $F(z, t)$ однолистных функций на основании следующей леммы ([6] — [8]).