П. П. Петрушев, В. Х. Христов, Обобщение признака Дини–Липшица равномерной сходимости ряда Фурье,
*Матем. заметки*, 1979, том 25, выпуск 4, 557–568

https://www.mathnet.ru/mzm10031

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 25, № 4 (1979)

## ОБОБЩЕНИЕ ПРИЗНАКА ДИНИ — ЛИПШИЦА РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ

**П. П. Петрушев, В. Х. Христов**

Обозначим через $C_{2\pi}$ пространство $2\pi$-периодических непрерывных функций $f$ с нормой $\| f \|_C = \max\limits_{-\infty<x<\infty} | f(x) |$, а через

$$S_n(f; x) = a_0/2 + \sum\nolimits_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$n$-ю частичную сумму ряда Фурье $S[f]$ функции $f$. В теории рядов Фурье хорошо известен признак Дини — Липшица [1, стр. 280; 2, стр. 108] о равномерной сходимости ряда Фурье для функций из $C_{2\pi}$: если функция $f \in C_{2\pi}$ и

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(f; \delta) \ln \delta = 0, \tag{1}$$

то ряд $S[f]$ равномерно сходится, где $\omega(f; \delta) = \sup\limits_{|h|\leqslant\delta} \| f(x + h) - f(x) \|_C$ — модуль непрерывности функции $f$.

Отметим, что достаточное условие Дини — Липшица точно в том смысле, что существует функция $g \in C_{2\pi}$ с модулем непрерывности $\omega(g; \delta) = O\{1/\ln(1/\delta)\}$ и такая, что ряд $S[g]$ расходится в некоторой точке [3; 2, стр. 477].

В настоящей статье мы докажем, что условие (1) для равномерной сходимости ряда $S[f]$ можно ослабить, заменяя модуль непрерывности $\omega(f; \delta)$ модулем немонотонности

$$\mu(f;\delta)=2^{-1}\sup_{|x_1-x_2|\leqslant\delta}\Big\{\sup_{x_1\leqslant x\leqslant x_2}[|f(x_1)-f(x)|+ \\ +|f(x_2)-f(x)|]-|f(x_1)-f(x_2)|\Big\},$$

введенным Сендовым [4].

Очевидно, если $f\in C_{2\pi}$, то

$$\mu(f;\delta)=\sup_{\substack{|x_1-x_2|\leqslant\delta\\ f(x_1)=f(x_2)}}\ \sup_{x_1\leqslant x\leqslant x_2}|f(x_1)-f(x)|. \tag{2}$$

Свойства модуля немонотонности обсуждаются подробно в [4, 5]. Отметим только, что $\mu(f;\delta)\to 0$ при $\delta\to +0$ для всех функций $f$, не имеющих разрывов второго рода и таких, что

$$(f(x)-f(x-0))(f(x)-f(x+0))\leqslant 0$$

и что если $\mu(f;\delta)=0$ для некоторого $\delta>0$, то функция $f$ достигает все свои локальные экстремумы на интервалах длиной не меньше $\delta$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. *Если функция* $f\in C_{2\pi}$ *и*

$$\lim_{\delta\to+0}\mu(f;\delta)\ln\delta=0, \tag{3}$$

*то ряд* $S[f]$ *равномерно сходится.*

Так как условие Дини — Липшица (1) для равномерной сходимости ряда $S[f]$ точно в указанном выше смысле и так как для любой функции $f$ (см. [5])

$$\mu(f;\delta)\leqslant\omega(f;\delta),\qquad \delta\geqslant 0, \tag{4}$$

то и условие (3), как достаточное условие для равномерной сходимости ряда $S[f]$, точно, т. е. существует функция $g\in C_{2\pi}$ такая, что $\mu(g;\delta)=O\{1/\ln(1/\delta)\}$ и ряд $S[g]$ расходится в некоторой точке.

Отметим, ввиду (4), что если для функции $f\in C_{2\pi}$ выполнено условие (1), то для нее выполнено и условие (3). Однако, существуют функции из $C_{2\pi}$, для которых условие (3) выполнено, а условие (1) — нет. Например, для функции

$$h(x)=\begin{cases}1/\ln(1/x) & \text{при}\quad 0<x\leqslant\pi/4,\\ 1/\ln(4/\pi) & \text{при}\quad \pi/4<x\leqslant 3\pi/4,\\ 1/\ln(1/(\pi-x)) & \text{при}\quad 3\pi/4<x<\pi,\\ 0 & \text{при}\quad \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

$h(x+2k\pi) = h(x)$ при $x \in (0, 2\pi]$ и $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, имеем

$$\varlimsup_{\delta\to+0} \omega(h;\ \delta) \ln(1/\delta) > 0 \text{ и } \mu(h;\ \delta) = 0 \text{ при } 0 \leqslant \delta \leqslant \pi/2.$$

Отметим, что Неваи [6] и Жижиашвили [7] показали, что достаточное условие Дини — Липшица (1) для равномерной сходимости ряда Фурье можно ослабить, заменяя его следующим односторонним условием:

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x) \geqslant -\varepsilon(h)/\ln(1/h), \qquad h > 0, \tag{5}$$

которое должно выполняться равномерно по $x$ и где $\varepsilon(h) \geqslant 0$, $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to +0$.

Покажем, что если $f \in C_{2\pi}$ и для нее выполнено условие (5), то

$$\mu(f;\ h) \ln(1/h) \leqslant \varepsilon_1(h) = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} \varepsilon(t) = o(1), \tag{6}$$

т. е. из (5) следует (3). Действительно, пусть точки $x_1$, $x_2$ и $x$ такие, что $f(x_1) = f(x_2)$, $0 < x_2 - x_1 \leqslant h$ и $x_1 < x < x_2$. Тогда $0 < x - x_1 \leqslant h$ и $0 < x_2 - x \leqslant h$ и из (5) получаем

$$f(x) - f(x_1) \geqslant -\varepsilon(x - x_1)/\ln(1/(x - x_1)) \geqslant -\varepsilon_1(h)/\ln(1/h),$$

$$f(x_2) - f(x) \geqslant -\varepsilon_1(h)/\ln(1/h).$$

Но так как $f(x_1) = f(x_2)$, то $f(x) - f(x_1) = -(f(x_2) - f(x))$ и, следовательно, $|f(x) - f(x_1)| \leqslant \varepsilon_1(h)/\ln(1/h)$. Так как точки $x_1$, $x_2$ и $x$ произвольные, то, ввиду (2), получаем (6).

С другой стороны, для вышеопределенной функции $h$ условие (5) не выполняется, а (3) выполнено.

Известно, что ставя условия на характеристики, связанные с вариацией функции $f \in C_{2\pi}$, также можно обеспечить равномерную сходимость ряда $S[f]$. В статье [9] показано, что достаточное условие Чантурии [8] для равномерной сходимости ряда Фурье и достаточное условие (3) несравнимы.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы, которые интересны сами по себе.

ЛЕММА 1. *Пусть* $f \in C_{2\pi}$. *Тогда для любых неотрицательных* $\delta^*$ *и* $\mu$ *таких, что* $\mu(f;\ \delta^*) \leqslant \mu$, *существуют* *функции* $g, r \in C_{2\pi}$ *такие, что*

а) $f = g + r$,

б) $\| g \|_C \leqslant \mu$, $\mu(g;\ \delta) \leqslant \mu(f;\ \delta)$ *при* $0 \leqslant \delta \leqslant \delta^*$,

в) $\| r \|_C \leqslant \max\{\| f \|_C - \mu, 0\}$, $\mu(r;\ \delta^*) = 0$,

$$\omega(r;\ \delta) \leqslant \omega(f;\ \delta) \text{ при } \delta \geqslant 0.$$

Доказательство. Обозначим $M = \max\limits_x f(x)$ и $m = \min\limits_x f(x)$. В зависимости от величины $(M - m)/2$ и $\mu$ возможны следующие случаи для определения функций $g$ и $r$.

I. $\mu = 0$. Тогда определяем $g \equiv 0$ и $r = f$. Очевидно, что для так определенных функций $g$ и $r$ выполняются свойства а) — в) леммы.

II. $\mu \geqslant (M - m)/2$. Тогда ясно, что существует константа $C$ такая, что функции $r \equiv C$ и $g = f - C$ удовлетворяют условиям а) — в) леммы.

III. $0 < \mu < (M - m)/2$. В этом содержательном случае основная цель будет состоять в нахождении таких интервалов, на которых функция $r$ будет постоянной, а на дополнительных к ним — монотонной.

Отметим, что так как $f \in C_{2\pi}$ и $0 < \mu < (M - m)/2$, то существуют точки $x_1, x_2, x_3$ такие, что

$$x_1 < x_2 < x_3,\quad m + \mu \leqslant f(x_1) = f(x_3) \leqslant M - \mu \quad \text{и} \quad | f(x_1) - f(x_2) | > \mu.$$

Пусть точка $y_2^{(0)}$ такая, что $y_2^{(0)} \in (x_1, x_3)$ и

$$| f(y_2^{(0)}) - f(x_1) | = \max_{x \in (x_1, x_3)} | f(x) - f(x_1) |.$$

Положим

$$y_1^{(0)} = \min\{y \in [x_1, y_2^{(0)}]:\ | f(x) - f(y_2^{(0)}) | \leqslant \mu \text{ для всех } x \in [y, y_2^{(0)}]\},$$

$$y_3^{(0)} = \max\{y \in [y_2^{(0)}, x_3]:\ | f(x) - f(y_2^{(0)}) | \leqslant \mu \text{ для всех } x \in [y_2^{(0)}, y]\}.$$

Из определения точек $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, $y_3^{(0)}$ следует, что

$$y_1^{(0)} < y_2^{(0)} < y_3^{(0)},\quad y_3^{(0)} - y_1^{(0)} < 2\pi,$$

$$m + \mu \leqslant f(y_1^{(0)}) = f(y_3^{(0)}) \leqslant M - \mu,$$

$$| f(y_2^{(0)}) - f(y_1^{(0)}) | = \mu,\quad | f(x) - f(y_2^{(0)}) | \leqslant \mu$$

для всех $x \in [y_1^{(0)}, y_3^{(0)}]$. На отрезке $[y_1^{(0)}, y_3^{(0)}] = \Delta_0$ функция $r$ будет постоянной.

Определим функции $g$ и $r$ на интервале $[y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$ и потом продолжим их периодически с периодом $2\pi$ на всю ось.

Для интервала $(y_3^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$ ставим следующий вопрос. Существуют ли точки $x_1, x_2, x_3 \in (y_3^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$ такие, что

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad m + \mu \leqslant f(x_1) = f(x_3) \leqslant M - \mu,$$
$$|f(x_2) - f(x_1)| > \mu? \quad (7)$$

Если существуют, то, как и выше, им сопоставляем точки $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, y_3^{(1)}$, аналогичные точкам $y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, y_3^{(0)}$. Отметим, ввиду (7), что $y_3^{(0)} < y_1^{(1)}$ и $y_1^{(0)} + 2\pi > y_3^{(1)}$. На отрезке $[y_1^{(1)}, y_3^{(1)}] = \Delta_1$ функция $r$ будет постоянной.

Для интервала $(y_3^{(0)}, y_1^{(1)})$ ставим тот же самый вопрос. Существуют ли точки $x_1, x_2, x_3 \in (y_3^{(0)}, y_1^{(1)})$ такие, что

$$x_1 < x_2 < x_3, \quad m + \mu \leqslant f(x_1) = f(x_3) \leqslant M - \mu$$
$$\text{и} \quad |f(x_1) - f(x_2)| > \mu?$$

Если существуют, то, как и выше, по ним определяем отрезок $[y_1^{(2)}, y_3^{(2)}] = \Delta_2$, на котором функция $r$ будет постоянна. Аналогично рассуждаем и для интервала $(y_3^{(1)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$.

Для любого из оставшихся интервалов, дополнительных к уже определенным отрезкам постоянства функции $r$, ставим тот же самый вопрос, и если для некоторого из них существуют три точки с вышеуказанными свойствами, то, как и выше, определяем еще отрезок постоянства для функции $r$. Так как функция $f$ непрерывна, то после конечного числа шагов получим следующую ситуацию. В зависимости от функции $f$ интервалу $[y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$ сопоставлены конечное число отрезков $\Delta_i = [y_1^{(i)}, y_3^{(i)}]$, $i = 0, 1, 2, \ldots, N$, таких, что $\Delta_i \subset [y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$, $\Delta_j \cap \Delta_k = \varnothing$ при $j \neq k$,

$$m + \mu \leqslant f(y_1^{(i)}) = f(y_3^{(i)}) \leqslant M - \mu \quad (8)$$

и существует точка $y_2^{(i)} \in (y_1^{(i)}, y_3^{(i)})$ такая, что

$$|f(y_2^{(i)}) - f(y_1^{(i)})| = \max_{x \in [y_1^{(i)}, y_3^{(i)}]} |f(x) - f(y_1^{(i)})| = \mu,$$

$$i = 0, 1, \ldots, N. \qquad (9)$$

Из определения (2) модуля немонотонности $\mu(f; \delta)$ для функций $f \in C_{2\pi}$ и из свойства (9) отрезков $\Delta_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$, следует, что

$$y_3^{(i)} - y_1^{(i)} = |\Delta_i| \geqslant \delta^*, \qquad i = 0, 1, \ldots, N. \qquad (10)$$

Для оставшихся $N$ интервалов $d_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$, дополнительных к $\bigcup_{i=0}^{N} \Delta_i$ до интервала $[y_1^{(0)}, y_1^{(0)} + 2\pi)$, имеем, что для любых точек $x_1, x_2, x_3 \in d_i$ $(0 \leqslant i \leqslant N)$ таких, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$ и $m + \mu \leqslant f(x_1) = f(x_3) \leqslant M - \mu$, выполнено

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \mu. \qquad (11)$$

Положим

$$\Delta_{N+1} = [y_1^{(N+1)}, y_3^{(N+1)}] = [y_1^{(0)} + 2\pi, y_3^{(0)} + 2\pi]$$

и $y_2^{(N+1)} = y_2^{(0)} + 2\pi$. Тогда любой из интервалов $d_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$, имеет следующий вид: $d_i = (y_3^{(k)}, y_1^{(l)})$ для некоторых $k$ и $l$ $(0 \leqslant k \leqslant N, 1 \leqslant l \leqslant N + 1)$.

Положим $r(x) = f(y_1^{(i)})$ для $x \in \Delta_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$. Для определения функции $r$ на интервале $d_i = (y_3^{(k)}, y_1^{(l)})$ $(0 \leqslant i \leqslant N)$, где $0 \leqslant k \leqslant N$, $1 \leqslant l \leqslant N + 1$, положим

а) если

$$f(y_3^{(k)}) < f(y_2^{(k)}), \ f(y_1^{(l)}) < f(y_2^{(l)})$$

и

$$f(y_3^{(k)}) \leqslant f(y_1^{(l)}),$$

то

$$r(x) = \max \{f(y_3^{(k)}), \min_{x \leqslant t \leqslant y_1^l} f(t)\}$$

для $x \in d_i$;

б) если

$$f(y_3^{(k)}) < f(y_2^{(k)}), \ f(y_1^{(l)}) < f(y_2^{(l)})$$

и

$$f(y_3^{(k)}) \geqslant f(y_1^{(l)}),$$

то
$$r(x)=\max\{f(y_1^{(l)}),\ \min_{y_3^{(k)}\leqslant t\leqslant x} f(t)\}$$
для $x\in d_i$;

в) если
$$f(y_3^{(k)})>f(y_2^{(k)}),\ f(y_1^{(l)})>f(y_2^{(l)})$$
и
$$f(y_3^{(k)})\leqslant f(y_1^{(l)}),$$
то
$$r(x)=\min\{f(y_1^{(l)}),\ \max_{y_3^{(k)}\leqslant t\leqslant x} f(t)\}$$
для $x\in d_i$;

г) если
$$f(y_3^{(k)})>f(y_2^{(k)}),\ f(y_1^{(l)})>f(y_2^{(l)})$$
и
$$f(y_3^{(k)})\geqslant f(y_1^{(l)}),$$
то
$$r(x)=\min\{f(y_3^{(k)}),\ \max_{x\leqslant t\leqslant y_1^l} f(t)\}$$
для $x\in d_i$;

д) пусть
$$f(y_3^{(k)})>f(y_2^{(k)})\ \text{и}\ f(y_1^{(l)})<f(y_2^{(l)})$$
или
$$f(y_3^{(k)})<f(y_2^{(k)})\ \text{и}\ f(y_1^{(l)})>f(y_2^{(l)}).$$
Тогда, если $f(y_3^{(k)})\geqslant f(y_1^{(l)})$, то определяем функцию $r$ на интервале $d_i$, как в случае б) или г), а если $f(y_3^{(k)})\leqslant\leqslant f(y_1^{(l)})$ — как в случае а) или в).

Таким образом, функция $r$ определена на интервале $[y_1^{(0)},\ y_1^{(0)}+2\pi)$. Отметим, что так определенная функция монотонна на интервалах $d_i$, $i=0, 1, \ldots, N$.

Положим $g(x)=f(x)-r(x)$ для $x\in[y_1^{(0)},\ y_1^{(0)}+2\pi)$ и продолжим функции $g$ и $r$ периодически с периодом $2\pi$ на всей оси. Докажем, что функции $g$ и $r$ удовлетворяют всем требованиям леммы.

Из определения функций $g$ и $r$ следует, что $g, r\in C_{2\pi}$ и $f=g+r$, т. е. утверждение а) леммы выполнено.

Из свойств интервалов $\Delta_i$ и $d_i$, $i=0, 1,\ldots, N$ (см. (8), (9), (11)), и так как $r(x)\equiv f(y_1^{(i)})$ для $x\in\Delta_i$, $i=0, 1,\ldots, N$, вытекает, что $\|r\|_C\leqslant\|f\|_C-\mu$, $\|g\|_C\leqslant\mu$.

Второе утверждение условия б) леммы, т. е. то, что $\mu(g; \delta) \leqslant \mu(f; \delta)$ при $0 \leqslant \delta \leqslant \delta^*$, вытекает из определения (2) модуля немонотонности $\mu(f; \delta)$ для $f \in C_{2\pi}$, из факта, что $|\Delta_i| \geqslant \delta^*$, $i = 0, 1, \ldots, N$ (см. 10)), и из определения функции $r$ на интервалах $\Delta_i$ и $d_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$.

Из (10) и из того, что на всех отрезках $\Delta_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$, функция $r$ постоянна, а на интервалах $d_i$, $i = 0, 1, \ldots, N$, монотонна, следует, что $\mu(r; \delta^*) = 0$ (см. (2)).

Так как функции $r$ и $f$ отличаются только на интервалах, на которых функция $r$ постоянна, то $\omega(r; \delta) \leqslant \omega(f; \delta)$ при $\delta \geqslant 0$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть $f \in C_{2\pi}$. Тогда для любых $0 = \delta_0 \leqslant \delta_1 \leqslant \ldots \leqslant \delta_s$, $s$ — натуральное, существуют функции $f_1, f_2, \ldots, f_s, r_s$ из $C_{2\pi}$ такие, что*

*а)* $f = \sum_{k=1}^{s} f_k + r_s$,

б) $\| f_k \|_C \leqslant \mu(f; \delta_k) - \mu(f; \delta_{k-1})$ *и* $\mu(f_k; \delta_{k-1}) = 0$,

в) $\mu(r_s; \delta_s) = 0$, $\omega(r_s; \delta) \leqslant \omega(f; \delta)$ *при* $\delta \geqslant 0$ *и* $\| r_s \|_C \leqslant \max\{\| f \|_C - \mu(f; \delta_s), 0\}$.

Доказательство. Применяя лемму 1 с $\delta^* = \delta_s$ и $\mu = \mu(f; \delta_s)$ к функции $f$ и полагая $g = g_s$ и $r = r_s$, получаем:

$$\| g_s \|_C \leqslant \mu(f; \delta_s), \quad f = g_s + r_s, \quad g_s, r_s \in C_{2\pi},$$

$$\mu(g_s; \delta) \leqslant \mu(f; \delta) \text{ при } 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_s,$$

$$\| r_s \|_C \leqslant \max\{\| f \|_C - \mu(f; \delta_s), 0\}, \quad \mu(r_s; \delta_s) = 0,$$

$$\omega(r_s; \delta) \leqslant \omega(f; \delta) \text{ при } \delta \geqslant 0.$$

Применяя лемму 1 с $\delta^* = \delta_{s-1}$ и $\mu = \mu(f; \delta_{s-1})$ к функции $g_s$ и полагая $g = g_{s-1}$ и $r = f_s$, получаем:

$$g_s = g_{s-1} + f_s, \quad g_{s-1}, f_s \in C_{2\pi}, \quad f = g_{s-1} + f_s + r_s,$$

$$\| g_{s-1} \|_C \leqslant \mu(f; \delta_{s-1}),$$

$$\mu(g_{s-1}; \delta) \leqslant \mu(g_s; \delta) \leqslant \mu(f; \delta) \text{ при } 0 \leqslant \delta \leqslant \delta_{s-1},$$

$$\mu(f_s; \delta_{s-1}) = 0,$$

$$\| f_s \|_C \leqslant \max\{\| g_s \|_C - \mu(f; \delta_{s-1}), 0\} \leqslant \mu(f; \delta_s) - \mu(f; \delta_{s-1}).$$

Снова применяем лемму 1, но уже к функции $g_{s-1}$ с $\delta^* = \delta_{s-2}$ и $\mu = \mu^r(f;\ \delta_{s-2})$, и полагаем $g = g_{s-2}$ и $r = f_{s-1}$ и т. д. После $s$-кратного применения леммы 1, полагая при последнем применении $g = f_1$ и $r = f_2$, получаем утверждение леммы.

Замечание. Незначительно усложняя доказательства лемм 1 и 2, можно добиться, чтобы для функций $f_k$, $k = 1, 2, \ldots, s$, из леммы 2 выполнялось $\omega(f_k;\ \delta) \leqslant \omega(f;\ \delta)$ при $\delta \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, s$.

Доказательство теоремы. Пусть функция $f \not\equiv \mathrm{const}$. Тогда существует $N$ такое, что для всех $n \geqslant N$ выполнено

$$\pi(1 + \ln n)/n \leqslant (\omega(f;\ 1/n))^{1/2} \leqslant 1. \tag{12}$$

Пусть $n$ — произвольное натуральное, $n \geqslant N$, $N \geqslant 3$ и $x \in [0,\ 2\pi)$. Из принципа локализации Римана [10] имеем, что для любого $\delta > 0$ справедливо

$$|S_n(f; x) - f(x)| \leqslant \pi^{-1}\left|\int_{-\delta}^{\delta} (f(x+t) - f(x))\frac{\sin nt}{t}\,dt\right| + C\delta^{-1}(1 + \|f\|_C)\,\omega(f; n^{-1}),$$

где $C$ — абсолютная константа. В дальнейшем через $C$ будем обозначать все абсолютные константы.

Положим $\delta = \alpha_n = (\omega(f;\ 1/n))^{1/2}$. Тогда имеем

$$C\alpha_n^{-1}(1 + \|f\|_C)\omega(f;\ 1/n) = C(1 + \|f\|_C)(\omega(f;\ 1/n))^{1/2} = o(1).$$

Оценим $\left|\int_0^{\alpha_n} (f(x+t) - f(x))\,t^{-1}\sin(nt)\,dt\right| = I$. Имеем

$$I \leqslant \left|\int_0^{\pi/n}\right| + \left|\int_{\pi/n}^{\alpha_n}\right| = o(1) + \left|\int_{\pi/n}^{\alpha_n}\right|.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся разложением функции $f$ из леммы 2 с $s = [\ln n]$ и $\delta_i = i\pi/n$, $i = 0, 1, \ldots, s$. Получаем

$$\left|\int_{\pi/n}^{\alpha_n} (f(x+t) - f(x))\,t^{-1}\sin nt\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{s}\left|\int_{\pi/n}^{\alpha_n} (f_k(x+t) - f_k(x))\,t^{-1}\sin nt\,dt\right| + \left|\int_{\pi/n}^{\alpha_n} (r_s(x+t) - r_s(x))\,t^{-1}\sin nt\,dt\right| = \sum_{k=1}^{s} I_k + R_s.$$

Сначала оценим $I_1$:

$$I_1 \leqslant 2\|f_1\|_C \int_{\pi/n}^{\alpha_n} |\sin nt|\, t^{-1}\, dt \leqslant C\mu(f; \pi/n)\ln n = o(1)$$

ввиду (3).

Для $I_{k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant s-1)$, разбивая интервал $[\pi/n, \alpha_n]$ на подынтервалы длиной $k\pi/n$, имеем

$$I_{k+1} = \left| \int_{\pi/n}^{\alpha_n} (f_{k+1}(x+t) - f_{k+1}(x))\, t^{-1} \sin nt\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{p_k-1} \left| \int_{\pi/n+k\pi j/n}^{\pi/n+k\pi(j+1)/n} \right| + \left| \int_{\pi/n+k\pi p_k/n}^{\alpha_n} \right| =$$

$$= \sum_{j=0}^{p_k-1} I_{k+1}^{(j)} + I'_{k+1},$$

где $p_k = [(\alpha_n - \pi/n)/(k\pi/n)]$, $1 \leqslant p_k \leqslant n-1$ $(1 \leqslant k \leqslant s)$, ввиду (12) (здесь через $[x]$ обозначили целую часть числа $x$).

Заметим, ввиду равенства $\mu(f_{k+1}; k\pi/n) = 0$, что функция $f_{k+1}(x+t) - f_{k+1}(x)$, как функция от $t$, монотонна на каждом интервале длины $k\pi/n$, и поэтому в каждом из интегралов $I_{k+1}^{(j)}$ можно применить вторую теорему о среднем значении (см. [1, стр. 19]). Тогда, обозначая $\pi/n + k\pi j/n = a_j$, $j = 0, 1, \ldots, p_k$, получаем

$$I_{k+1}^{(j)} = \left| \int_{a_j}^{a_{j+1}} (f_{k+1}(x+t) - f_{k+1}(x))\, t^{-1} \sin nt\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant |f_{k+1}(x+a_j) - f_{k+1}(x)| \left| \int_{a_j}^{\xi_j} t^{-1} \sin nt\, dt \right| +$$

$$+ |f_{k+1}(x+a_{j+1}) - f_{k+1}(x)| \left| \int_{\xi_j}^{a_{j+1}} t^{-1} \sin nt dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 4\|f_{k+1}\|_C \left| \int_{a_j}^{a_j+\pi/n} t^{-1} \sin nt\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 4(\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi/n)) \int_{a_j}^{a_j+\pi/n} t^{-1} dt \leqslant$$

$$\leqslant 4(\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi))/(kj+1), \quad \xi_j \in [a_j, a_{j+1}].$$

Аналогично оценивается и $I'_{k+1}$. Получаем

$$I'_{k+1} \leqslant 4(\mu(f; (k+1)\pi/n) - \mu(f; k\pi))/(kp_k+1)$$

Следовательно,

$$I_{k+1} \leqslant \sum_{j=0}^{p_k-1} I_{k+1}^{(j)} + I_{k+1}' \leqslant$$
$$\leqslant 4(\mu(f;(k+1)\pi/n) - \mu(f;k\pi/n)) \sum_{j=0}^{p_k} 1/(1+kj) \leqslant$$
$$\leqslant 4(\mu(f;(k+1)\pi/n) - \mu(f;k\pi/n)) +$$
$$+ 4(\mu(f;(k+1)\pi/n) - \mu(f;k\pi/n)) k^{-1} \ln n.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{s-1} I_{k+1} \leqslant 4 \sum_{k=1}^{s-1} (\mu(f;(k+1)\pi/n) - \mu(f;k\pi/n)) +$$
$$+ 4 \ln n \sum_{k=1}^{s-1} k^{-1} (\mu(f;(k+1)\pi/n) - \mu(f;k\pi/n)) \leqslant$$
$$\leqslant 4(\mu(f;s\pi/n) - \mu(f;\pi/n)) +$$
$$+ 4 \ln n \sum_{k=1}^{s-1} k^{-1} (\mu(f;(k+1)\pi/n) - \mu(f;k\pi/n)).$$

Так как $s = [\ln n]$ и

$$\ln n \cdot \sum_{k=2}^{s-1} k^{-2} \mu(f;(k+1)\pi/n) \leqslant$$
$$\leqslant \ln n \cdot \mu(f;s\pi/n) \sum_{k=2}^{\infty} k^{-2} \leqslant C \ln \sqrt{n}\, \mu(f;1/\sqrt{n}) = o(1)$$

ввиду (3), то после преобразования Абеля в последней сумме получаем

$$\sum_{k=1}^{s-1} I_{k+1} \leqslant 4\mu(f;s\pi/n) +$$
$$+ 4 \ln n \sum_{k=2}^{s-1} k^{-2} \mu(f;(k+1)\pi/n) + 4 \ln n \mu(f;s\pi/n)/s = o(1).$$

Оценим $R_s$ аналогично $I_{k+1}$:

$$R_s \leqslant \int_{j=0}^{p_s-1} \left| \int_{\pi/n+\pi sj/n}^{\pi/n+\pi s(j+1)/n} \right| + \left| \int_{\pi/n+\pi s(j+1)/n}^{\alpha_n} \right| =$$
$$= \sum_{j=0}^{p_s-1} R_s^{(j)} + R_s'.$$

Для $R_s^{(j)}$, как при оценке $I_{k+1}^{(j)}$, получаем

$$R_s^{(j)} \leqslant 2 \max_{t \in [x,\, x+\pi s(j+1)/n]} |r_s(x+t) - r_s(x)|/(1+js) \leqslant$$
$$\leqslant 2\omega(f;\alpha_n)/(1+js).$$

Аналогично имеем

$$R_s' \leqslant 2\omega(f;\alpha_n)/(1+sp_s).$$

Окончательно получаем

$$R_s \leqslant \sum_{j=0}^{p_s-1} R_s^{(j)} + R_s' \leqslant 2\omega(f; \alpha_n) + 2\omega(f; \alpha_n) \sum_{j=1}^{p_s-1} 1/sj \leqslant$$
$$\leqslant 2\omega(f; \alpha_n) + 2\omega(f; \alpha_n) s^{-1} \ln n = o(1).$$

Следовательно,

$$\left| \int_{\pi/n}^{\alpha_n} (f(x+t) - f(x)) t^{-1} \sin nt \, dt \right| \leqslant$$
$$\leqslant I_1 + \sum_{k=1}^{s-1} I_{k+1} + R_s = o(1)$$

равномерно по $x$. Аналогично получается, что

$$\left| \int_{-\alpha_n}^{-\pi/n} (f(x+t) - f(x)) t^{-1} \sin nt \, dt \right| = o(1)$$

равномерно по $x$. Теорема доказана.

Наконец, отметим, что результаты настоящей статьи анонсированы в [9].

Институт математики
Болгарской АН

Поступило
8.X.1976

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Бари Н. К., Тригонометрические ряды, М., Физматгиз, 1961.
[2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1, М., «Мир», 1965.
[3] Lebesque H., Sur la representation trigonometrique approchee des fonctions satisfaisant a une condition de Lipschitz, Bull. Soc. Math. France, 38 (1910), 184—210.
[4] Сендов Бл., Върху някои линейни методи за апроксимиране на периодични функции относно хаусдорфово разстояние, Годишник Соф. у-тет, Физ.-матем. фак., 58 (1965), 107—140.
[5] Сендов Бл., Некоторые вопросы теории приближений функций и множеств в метрике Хаусдорфа, Успехи матем. наук, **24**, № 5 (1969), 141—178.
[6] Неваи Г. П., О признаке Дини — Липшица, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **24**, № 3—4 (1973), 349—351.
[7] Жижиашвили Л. В., О тригонометрических рядах Фурье, Матем. сб., **100**, № 4 (1976), 580—609.
[8] Чантурия З. А., О равномерной сходимости рядов Фурье, Матем. сб., **100**, № 4 (1976), 534—554.
[9] Христов В. Х., Петрушев П. П., Одно улучшение критерия Дини — Липшица о равномерной сходимости ряда Фурье, Докл. Болг. АН, **29**, № 11 (1976), 1579—1582.
[10] Hille E., Klein G., Rimann's lokalization theorem for Fourier series, Duke Math. J., **21** (1954), 587—591.