B. A. Kats, The Riemann boundary value problem on nonsmooth arcs, and fractal dimensions,
Algebra i Analiz, 1994, Volume 6, Issue 1, 172–202

Алгебра и анализ
Том 6 (1994), вып. 1

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА РИМАНА НА НЕГЛАДКИХ ДУГАХ И ФРАКТАЛЬНЫЕ РАЗМЕРНОСТИ

Б. А. Кац

В работе рассматривается краевая задача Римана на неспрямляемых контурах. Традиционный аппарат исследования этой задачи основан на формулах Сохоцкого–Племели для интеграла типа Коши; поэтому в почти всех работах по этой тематике контур предполагался кусочно-гладким или хотя бы спрямляемым. В данной статье описывается новый метод решения задачи Римана, не использующий контурное интегрирование и применимый для весьма обширного класса контуров. Выясняется, что картина разрешимости задачи во многом определяется фрактальными размерностями контура. Некоторые из полученных результатов являются новыми и для спрямляемых негладких контуров.

Введение

Пусть на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ задана ориентированная простая жорданова дуга Γ с началом a_1 и концом a_2. Краевая задача Римана (КЗР) на этой дуге — это задача отыскания всех голоморфных в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функций $\Phi(z)$, обладающих в любой точке $t \in \overset{\circ}{\Gamma} \equiv \Gamma \setminus \{a_1, a_2\}$ предельными значениями $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ (слева и справа соответственно), связанными соотношением

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \qquad t \in \overset{\circ}{\Gamma}, \tag{0.1}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на Γ функции, а также удовлетворяющих вблизи точек множества $E = \{a_1, a_2\}$ какому-либо ограничению на скорость роста, например,

$$\Phi(z) = O(|z-a|^{-\gamma}), a \in E, \gamma = \gamma(\Phi) < 1. \tag{0.2}$$

Эту задачу называют также краевой задачей Римана–Гильберта и задачей линейного сопряжения.

Данная задача является одной из основных краевых задач теории голоморфных функций. Она возникает как модельная задача во многих прикладных дисциплинах; в то же время методы и результаты теории КЗР находят применение при исследовании некоторых классических проблем анализа. Первые решения этой задачи в явном виде были получены И. Племелем и Т. Карлеманом (см., например, [1]); систематическое ее изучение было начато в 30-е годы Ф. Д. Гаховым и Н. И. Мусхелишвили. Число работ на эту тему, опубликованных к настоящему времени, чрезвычайно велико. Здесь мы укажем лишь несколько монографий и обзоров [1–12], в которых описаны классические результаты по КЗР, ее традиционные приложения, история, а также дана обширная библиография.

Для дальнейшего важно отметить, что во всех опубликованных работах за очень небольшим исключением дуга Г предполагалась гладкой или кусочно-гладкой. Это ограничение обусловлено традиционным аппаратом решения КЗР, а именно использованием интеграла типа Коши

$$K_\Gamma\varphi \equiv \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{0.3}$$

Если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет на кусочно-гладком контуре Г условию Гёльдера

$$\sup\left\{\frac{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|}{|t_1-t_2|^\nu} : t_{1,2}\in\Gamma, t_1\neq t_2\right\} \equiv h_\nu(\varphi,\Gamma) < \infty, \tag{0.4}$$

$0 < \nu \leqslant 1$, то по теореме Сохоцкого–Племели $K_\Gamma\varphi(z)$ удовлетворяет краевому условию (0.1) при $G \equiv 1$, $g \equiv \varphi$. Этот частный случай КЗР называют задачей о скачке. Общая КЗР сводится к двум задачам о скачке посредством факторизации (см., например, [1,2]). В то же время постановка задачи Римана имеет смысл для любой простой дуги вне зависимости от ее гладкости или спрямляемости. В связи с этим возникает проблема построения теории КЗР на неспрямляемых и на негладких дугах. Это необходимо еще и потому, что в традиционных областях приложения КЗР в последнее время возобладало мнение, что адекватной математической моделью границ реальных тел являются не гладкие кривые и поверхности, а фракталы (см., например, [13–15]). Кроме того, КЗР на негладких кривых естественным образом возникает при исследовании полноты и минимальности некоторых систем функций [16], а также при решении краевой задачи Римана со сдвигом методом конформного склеивания (см.[16,17], а также [18–20]).

В данной работе предлагается новый метод решения КЗР, позволяющий исследовать эту задачу на неспрямляемых контурах, а также на негладких контурах, не подпадающих под ранее развитую теорию.

Прежде чем перейти к построению этого метода, опишем вкратце классические результаты по КЗР на гладкой дуге, а также известные результаты по КЗР на негладких контурах.

Если Г есть кусочно-гладкая дуга, а функции $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют на ней условию Гёльдера (0.4) и $G(t) \neq 0$, то картина разрешимости задачи (0.1)–(0.2) определяется значениями аргумента G на концах Г. Именно если $G(t) = \exp f(t)$, то этой картиной управляет величина $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2, \varkappa_j = 1 +](-1)^j \cdot \operatorname{Im} f(a_j)/2\pi[$ (так называемый индекс задачи; здесь и ниже $]x[$ означает наибольшее из целых чисел, строго меньших x): при $\varkappa \geqslant 0$ общее решение задачи содержит $\varkappa + 1$ произвольных комплексных постоянных, при $\varkappa = -1$ решение существует и единство, а при $\varkappa < -1$ задача разрешима единственным образом при выполнении $-\varkappa - 1$ условий ортогональности g некоторым заданным на Γ функциям. Подробные доказательства и обсуждения этих классических результатов можно найти в монографиях [1,2].

Уже на спрямляемой негладкой дуге только что описанная картина разрешимости меняется. По-видимому, первым это заметил Н. В. Говоров (см.[3]). В своем получившем широкую известность цикле работ, посвященном задаче Римана с сильными особенностями коэффициента на концах гладкого контура Γ, он отметил, что на дуге с неравномерной гладкостью (в построенном им примере касательная на конце дуги не является предельным положением касательных во внутренних точках) при надлежащем выборе $|G(t)|$ однородная КЗР может иметь бесконечномерное семейство решений, несмотря на отрицательность величины $\varkappa$. Р.К. Сейфуллаев [21] исследовал сходное явление для спрямляемых дуг Γ, удовлетворяющих K-условию: суммарная длина частей такой дуги, попадающих внутрь любого круга равномерно соизмерима с радиусом этого круга. Он показал, что однозначная ветвь функции $\arg(z - a_j)$, выделенная вблизи a_j с помощью разреза вдоль Γ, имеет в точке a_j не более чем логарифмический рост, и установил, что величины $\varkappa_j$ зависят здесь от значений $f(a_j)$ и от верхних и нижних пределов отношения $\arg(z - a_j)/\ln|z - a_j|$ при $z \to a_j$. При $g \not\equiv 0$ в [21] налагается дополнительное условие совпадения этих верхнего и нижнего пределов между собой. Близкий класс кривых изучал Е. А. Данилов [22].

Ю. И. Любарский [16] установил наличие тесной связи между задачей Римана на негладких дугах и свойствами систем степеней функций. Полнота и минимальность исследованной им системы степеней оказались эквивалентными существованию и единственности решения КЗР на некоторой негладкой спрямляемой спиралеобразной дуге (сходной с логарифмической спиралью и подпадающей под условия работ [21,22]). Ясно, однако, что для других систем метод Ю. И. Любарского может привести к задачам Римана на негладких дугах бесконечной длины, не подпадающим под условия ни одной из упомянутых работ.

Следует отметить, что на замкнутой K-кривой переход от гладкости с спрямляемости не вызывает изменения картины разрешимости; для задач с гёльдеровыми коэффициентами это показали А. А. Бабаев и В. В. Салаев [23]. И. И. Данилюк [5], В. М. Кокилашвили и В. А. Пааташвили [24–25] описали классы негладких замкнутых кривых, на которых КЗР с разрывными коэффициентами имеет ту же картину разрешимости, что в классической ситуации.

Существует несколько исследований КЗР в классах квазиконформных контуров, содержащих неспрямляемые кривые. Это работы В. А. Селезнева [26–27] и И. М. Батчаева [28], в которых используются квазиконформные аналоги интеграла типа Коши; ранее теорию квазиконформных отображений при исследовании КЗР использовали С. Н. Антонцев и В. Н. Монахов (см.[8]). Далее, В. А. Селезнев [29] заметил, что формула Бореля–Помпейю может служить определением интеграла типа Коши по замкнутой неспрямляемой кривой Γ, если плотность этого интеграла является сужением на Г функции соболевского класса W_p^{-1}, $p > 2$. На этой основе он получил решение КЗР на неспрямляемой замкнутой кривой с коэффициентами, представляющими собой следы соболевских функций на этой кривой. Полученная В. А. Селезневым [29] картина разрешимости этой КЗР совпадает с классической по модулю вопросов единственности.

Завершая краткий обзор истории вопроса, необходимо остановиться на работе Е. М. Дынькина [30]. В ней исследован интеграл типа Коши (0.3) по замкнутой спрямляемой кривой Г с плотностью φ, удовлетворяющей условию Гёльдера (0.4). Е. М. Дынькин доказал, что функция $(K_\Gamma\varphi)(z)$ непрерывна в замыкании области, ограниченной кривой Г, если $\nu > 1/2$, причем это условие неулучшаемо. Отсюда нетрудно вывести, что при том же условии краевая задача Римана на замкнутой негладкой спрямляемой кривой сохраняет классическую картину разрешимости.

Данная статья построена следующим образом. Сначала (§1) мы опишем метод решения КЗР, не связанный с контурным интегрированием. Этот метод предложен в работах автора [31–33]. Он представляет собою реализацию на материале этой задачи следующей идеи, оказавшейся в последнее десятилетие весьма плодотворной во многих областях комплексного анализа (см., например, доказательство Волффа теоремы Карлесона о короне [34], „квазиконформные" доказательства теорем о конформном склеивании [8, 16–20] и др.): для построения голоморфной функции с какими-либо свойствами полезно сначала построить неголоморфную функцию с требуемыми свойствами, а затем свести исходную задачу к $\bar\partial$-проблеме. Затем в §2 устанавливается, что единственным условием разрешимости КЗР (0.1) в „свободном" классе (т.е. без ограничений (0.2)) является неравенство $\nu > d/2$, связывающее гёльдеровский показатель коэффициентов ν с фрактальной размерностью d контура Г. Это условие неулучшаемо; оно может рассматриваться, как неспрямляемая версия упомянутого выше результата Е. М. Дынькина.

В следующем параграфе, §3, исследуется разрешимость задачи (0.1) в классе (0.2). Здесь на дугу Г приходится налагать дополнительные ограничения, лимитирующие скорость ее скручивания на концах. Тем не менее рассматриваемый здесь класс контуров содержит все типы дуг, на которых КЗР была решена ранее, а также контуры, не подпадающие под условия ни одной из известных автору работ. Количество решений определяется значениями коэффициента G на концах Г.

В §4 рассматриваются дуги с большей скоростью скручивания, чем это допускалось в §3. Оказалось целесообразным рассматривать эти дуги как результат возмущения сложных контуров, состоящих из гладкой дуги и счетного семейства концентрических окружностей. Число решений КЗР на таких дугах оказалось зависящим уже не только от значений G на концах Г, но и от характера стремления G к этим своим значениям, в частности от значений производных G на концах Г.

§1. Квазирешения и их регуляризация

Как уже отмечалось, предлагаемый метод состоит из двух шагов. Сначала мы ищем все непрерывные (но, вообще говоря, не голоморфные) в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции, удовлетворяющие краевому условию (0.1); будем называть их квазирешениями. Затем среди квазирешений отыскиваются голоморфные функции путем решения уравнения

$$\partial\Phi/\partial\bar{z} = 0, \qquad z \in \bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma. \tag{1.1}$$

С учетом этого мы можем ограничить множество квазирешений функциями, имеющими в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ частные производные всех порядков. Кроме того, поскольку Γ лежит в конечной части плоскости, то без ограничения общества можно рассматривать квазирешения с компактным носителем.

Вначале рассмотрим таким образом задачу о скачке

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \qquad t \in \overset{\circ}{\Gamma}. \tag{1.2}$$

Пусть $\varphi(z)$ — ее квазирешение, т.е. непрерывная дифференцируемая в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функция с компактным носителем, удовлетворяющая краевому условию (1.2). Тогда всякое другое ее квазирешение имеет вид $\Phi = \varphi + \psi$, где ψ — непрерывная в $\bar{\mathbb{C}} \setminus E$ функция; в частности, такой вид имеет и решение задачи, удовлетворяющее уравнению (1.1). Согласно (1.1), $\partial\psi/\partial\bar{z} = -\partial\varphi/\partial\bar{z}$. Таким образом, решение задачи о скачке (1.2) можно искать в виде

$$\Phi(z) = \varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}\setminus\Gamma} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}} \cdot \frac{d\zeta\, d\bar{\zeta}}{\zeta - z}. \tag{1.3}$$

Конечно, здесь следует еще убедиться, что входящий в (1.3) интеграл существует и дает непрерывную функцию. Известно (см., например, [35]), что интегральный оператор

$$T\psi = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\psi(\zeta)\, d\zeta\, d\bar{\zeta}}{\zeta - z} \tag{1.4}$$

при $p > 2$ отображает L_0^p в $H_\lambda(\mathbb{C})$ (здесь L_0^p — пространство интегрируемых в p-й степени функций с компактными носителями, $H_\lambda(A)$ — пространство Гёльдера: $H_\lambda(A) \equiv \{f : h_\lambda(f; A) < \infty\}$, см. (0.4)) при $\lambda = 1 - 2/p$. Поэтому вопрос о разрешимости задачи о скачке (1.2) свелся к вопросу о существовании квазирешения φ со свойством $\partial\varphi/\partial\bar{\zeta} \in L_0^p$, $p > 2$. Точнее, поскольку функция ψ должна быть непрерывной в $\bar{\mathbb{C}} \setminus E$, то $\partial\varphi/\partial\bar{\zeta}$ должна быть интегрируемой в степени $p > 2$ вне любой окрестности E; вблизи E эта производная должна быть интегруема.

Аналогично если $\varphi(z)$ есть квазирешение КЗР (0.1), а $X(z)$ — голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ функция, удовлетворяющая краевому условию

$$X^+(t) = G(t)X^-(t), \qquad t \in \overset{\circ}{\Gamma}, \tag{1.5}$$

то решение можно искать в виде $\Phi(z) = \varphi(z) + X(z)\psi(z)$, где ψ — непрерывная в $\bar{\mathbb{C}} \setminus E$ функция. Из (1.1) следует $\partial\psi/\partial\bar{z} = -X^{-1}(z)\partial\varphi/\partial\bar{z}$, что приводит к формуле

$$\Phi(z) = \varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}X(z) \iint\limits_{\mathbb{C}\setminus\Gamma} X^{-1}(\zeta)\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}} \cdot \frac{d\zeta\, d\bar{\zeta}}{\zeta - z} = \left(I - XTX^{-1}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)\varphi, \tag{1.6}$$

где I — тождественный оператор, а X означает как функцию $X(z)$, так и оператор умножения на эту функцию. Остается выяснить, когда задача имеет квазирешение φ, для которого функция $X^{-1}(z)\partial\varphi/\partial\bar{z}$ интегрируема в нужных степенях.

Формула (1.3) получается из (1.6) при $X(z) \equiv 1$. Обе эти формулы не содержат контурных интегралов и могут быть поэтому использованы и в случае, когда дуга Γ неспрямляема.

Отметим еще, что вид формул (1.3), (1.6) не изменится, если понимать в них под Γ не дугу, а замкнутую кривую, или же конечную либо счетную совокупность дуг и кривых. Это позволяет единообразно исследовать КЗР на контурах самых разных типов. Мы воспользуемся этой возможностью, поскольку, во-первых, это обобщение не приводит к существенному усложнению изложения и, во-вторых, некоторые эффекты в исходной КЗР на простой дуге становятся прозрачнее в контексте рассмотрения более сложных контуров.

Контуром Γ мы будем называть любую конечную или счетную совокупность $\{\Gamma_j\}$ ориентированных простых жордановых замкнутых и разомкнутых кривых. Множество $E = E(\Gamma)$ концевых точек контура Γ состоит из концов входящих в него разомкнутых дуг, а также точек сгущения кривых Γ_j, т.е. предельных точек всевозможных последовательностей $\{z_j\}$ вида $z_1 \in \Gamma_1$, $z_2 \in \Gamma_2, \ldots$; $\overset{\circ}{\Gamma} \equiv \Gamma \setminus E(\Gamma)$. Будем называть контур допустимым (сокращенно д-контуром), если множество $E(\Gamma)$ состоит из конечного числа точек либо пусто и не содержит бесконечно удаленной точки. В частности, д-контур может содержать лишь конечное число разомкнутых дуг. Важнейшее для нас свойство д-контуров состоит в том, что на них всегда разрешима задача о единичном скачке. Действительно, свяжем с каждой кривой $\Gamma_j \in \Gamma$ функцию $k_j(z)$ по следующему правилу. Если Γ есть дуга с началом a_{1j} и концом a_{2j}, то $k_j(z) = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-a_{2j}}{z-a_{1j}}$, где однозначная ветвь логарифма выделена посредством разреза по дуге Γ_j и условия $k_j(\infty) = 0$. Если Γ_j — замкнутая кривая, то $k_j(z)$ равна нулю вне Γ_j, а внутри этой кривой $k_j(z)$ есть $+1$ или -1 в зависимости от того, положительным или отрицательным образом ориентирована кривая Γ_j относительно своей внутренности. Далее, положим

$$k_\Gamma(z) = \sum_{\Gamma_j \in \Gamma} k_j(z). \tag{1.7}$$

Для д-контура эта сумма локально конечна в $\bar{\mathbb{C}} \setminus E$ и представляет собою голоморфную в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию, удовлетворяющую краевому условию (1.2) с $f(t) \equiv 1$ (но не удовлетворяющую, вообще говоря, условию (0.2)).

Функцию $k_\Gamma(z)$ мы будем называть ядром контура Γ. Очевидно, на множестве контуров можно ввести операции сложения и вычитания, согласованные со сложением и вычитанием их ядер.

Итак, на любом д-контуре задача о единичном скачке имеет решение $k_\Gamma(z)$. Тогда произведение $\tilde{f}(z)k_\Gamma(z)$, где $\tilde{f}$ — какое-либо продолжение функции f с Γ на всю комплексную плоскость, является квазирешением (1.2). Для его построения мы можем воспользоваться оператором продолжения Уитни $\mathcal{E}_0$ (см., например, [36]). Если функция f задана на компакте A и удовлетворяет там условию Гёльдера с показателем ν, то ее продолжение Уитни $\mathcal{E}_0 f$ удовлетворяет в $\mathbb{C}$ условию Гёльдера с тем же показателем и имеет в $\mathbb{C}\setminus A$ производные всех порядков, причем

$$|\operatorname{grad}\mathcal{E}_0 f(z)| \leqslant C(\operatorname{dist}(z,A))^{\nu-1}, \qquad C = h_\nu(f;A). \tag{1.8}$$

Обозначим через $f^w(z)$ гладкую в $\bar{\mathbb{C}}\setminus\Gamma$ функцию, совпадающую с $\mathcal{E}_0 f$ вблизи Γ и имеющую компактный носитель. Тогда квазирешение $\varphi = f^w k_\Gamma$ обладает всеми описанными выше свойствами, и нам остается выяснить порядок интегрируемости производной $\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}$. Это можно сделать в терминах верхней метрической размерности [37], называемой также клеточной размерностью [15]. Одно из ее определений таково. Пусть $\mathcal{M}_k$ есть покрывающая плоскость сеть из квадратов со стороной 2^{-k} с вершинами в точках вида $(im+n)2^{-k}$, n и m — целые числа. Обозначим через $m_k(A)$ число квадратов этой сети, пересекающихся с множеством $A\subset\mathbb{C}$. Верхняя метрическая размерность множества A есть предел

$$\overline{\operatorname{dm}}A \equiv \varlimsup_{k\to\infty}\frac{\log_2 m(k)}{k}. \tag{1.9}$$

Детальное описание свойств этой размерности можно найти в [15] (см. также [32]). Здесь мы отметим лишь, что размерность любого плоского множества не превосходит двух, а размерность спрямляемой кривой равна единице. Далее, пусть $E\subset A$ и $A_\varepsilon = A\setminus\{z:\operatorname{dist}(z,E)<\varepsilon\}$. Положим

$$\overline{\operatorname{dm}}(A,E) = \lim_{\varepsilon\to 0}\overline{\operatorname{dm}}A_\varepsilon. \tag{1.10}$$

В дальнейшем мы увидим, что $\overline{\operatorname{dm}}(A;E)$ может не совпадать с $\overline{\operatorname{dm}}A$, даже если E — единственная точка. Но, очевидно, всегда $\overline{\operatorname{dm}}(A;E)\leqslant\overline{\operatorname{dm}}A$.

Необходимое описание интегрируемости $\partial f^w/\partial\bar{z}$ дает

Лемма 1. *Пусть $f\in H_\nu(A)$. Тогда вблизи A частные производные первого порядка продолжения f^w интегрируемы в любой степени, меньшей $p_1(\nu,\overline{\operatorname{dm}}A)$, где*

$$p_1(\nu,d) = \begin{cases} \frac{2-d}{1-\nu} & \text{при } 0<\nu<1,\\ \infty & \text{при } \nu=1. \end{cases} \tag{1.11}$$

Вне любой окрестности множества $E \subset A$ *эти производные локально интегрируемы в любой степени, меньшей* $p_1(\nu, \overline{\mathrm{dm}}(A; E))$.

Отметим, что при $\nu = 1$ *эти производные ограничены согласно* (1.8).

Доказательство. Рассмотрим разбиение Уитни $\mathcal{W}$ дополнения $\mathbb{C} \setminus A$. Оно состоит из попарно не пересекающихся диадических квадратов Q, обладающих свойством (см.[36])

$$\operatorname{diam} Q \leqslant \operatorname{dist}(Q, A) \leqslant 4 \operatorname{diam} Q. \tag{1.12}$$

Согласно (1.8) и (1.12), интеграл от $|\operatorname{grad} f^w|^p$ по окрестности A в $\mathbb{C} \setminus A$ оценивается сверху величиной $\sum\limits_{k=1}^{\infty} w_k \cdot 2^{kp(1-\nu)-2k}$, где w_k — число квадратов со стороной 2^{-k}, входящих в рассматриваемое разбиение Уитни $\mathcal{W}$. Если Q — такой квадрат, z_Q — одна из ближайших к нему точек A, Q^* — содержащий точку z_Q квадрат сетки $\mathcal{M}_k$, то Q содержится, согласно (1.12), в концентрическом с Q^* квадрате со стороной $2^{-k} \cdot 13$, т.е. $w_k \leqslant 13^2 m_k(A)$. Теперь первое утверждение леммы следует из (1.9). По-видимому, впервые оно было доказано в работе автора [32]; здесь это доказательство приведено в интересах относительной замкнутости изложения. Второе утверждение по сути дела означает, что значения производных f^w в точке z определяются значениями $f(t)$ на достаточно близкой к z части A. Детальное доказательство этого утверждения содержится в [38].

Отсюда немедленно получается

Лемма 2. *Пусть* Γ *есть* д-*контур и функция* $f \in H_\nu(\Gamma)$ *обращается в нуль в окрестности множества* $E(\Gamma)$. *Если*

$$\nu > \overline{\mathrm{dm}}\Gamma_f/2 \quad \textit{или} \quad \nu = 1, \tag{1.13}$$

где Γ_f *— замкнутый носитель* f *на* Γ, *то существует голоморфная в* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_f$ *функция* Φ, *удовлетворяющая краевому условию* (1.2).

Доказательство. Положим $\varphi = f^w k_\Gamma$, где f^w — вышеописанное продолжение f с Γ_f в $\mathbb{C}$ (с комплектным носителем в $\mathbb{C}$). При условии (1.13) $p_1(\nu, \overline{\mathrm{dm}}\Gamma_f) > 2$, а ядро k_Γ ограничено вне любой окрестности $E(\Gamma)$. Поэтому производная интегрируема в степени большей двух, и формула (1.3) дает искомое решение задачи о скачке (1.2). В последующих параграфах мы получим более точные условия разрешимости этой задачи.

§2. Свободная разрешимость задачи Римана

Здесь идет речь о свободе от ограничений типа (0.2) на концах контура Γ.

Теорема 1. *Пусть* Γ *есть* д-*контур,* $G = \exp f$, *и функции* f *и* g *удовлетворяют на каждом замкнутом подмножестве* S *контура* $\mathring{\Gamma}$ *условию Гёльдера с таким показателем* $\nu(S)$, *что*

$$\nu(S) > \overline{\mathrm{dm}}S/2 \quad \text{или} \quad \nu(S) = 1. \tag{2.1}$$

Тогда существует голоморфная в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ *функция* $\Phi(z)$, *удовлетворяющая краевому условию* (0.1).

Доказательство 1°. Сначала пусть $f(t) = 0$, т.е. рассматривается задача о скачке. Фиксируем точку $a \in E$ и построим такую последовательность гладких функций $\{\psi_j(z)\}$ с компактными носителями $\{\Omega_j\}$, что: а) $\Omega_j \cap E = \varnothing$ при каждом j; б) при $j \to \infty$ носители Ω_j стягиваются к точке a; в) сумма $\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(z)$ локально конечна и равна единице в некоторой (проколотой) окрестности точки a. Построение таких разбиений хорошо известно (см., например, [36]). Скачок $g\psi_j$ удовлетворяет условию леммы 2. Таким образом, существует голоморфная в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\Gamma \cap \Omega_j\}$ функция Φ_j, которая имеет скачок $g\psi_j$ на контуре Γ. Разложение Φ_j по степеням $(z-a)^{-1}$ сходится при $|z-a| > R_j \equiv \max\{|z-a| : z \in \Omega_j \cap \Gamma\}$. Поэтому можно указать такую частичную сумму ее разложения $F_j(z)$, что $|\Phi_j(x) - F_j(x)| < 2^{-j}$ при $|z-a| \geqslant 2R_j$. По условию $R_j \to 0$; значит, ряд $\sum_{j=1}^{\infty}(\Phi_j - F_j)$ сходится к голоморфной в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\Phi_a(z)$ со скачком $g_a(t) = g(t) \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t)$ на Γ. Вблизи точки a этот скачок совпадает с $g(t)$. Тогда разность $\tilde{g}(t) = g(t) - \sum_{a \in E} g_a(t)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Если $\tilde{\Phi}(z)$ есть решение задачи (1.2) со скачком $\tilde{g}$, то $\Phi_0 = \tilde{\Phi} + \sum_{a \in E} \Phi_a$ есть искомое решение задачи (0.1) при $G \equiv 1$.

2°. Теперь пусть $g \equiv 0$, $f \not\equiv 0$. Такому краевому условию удовлетворяет функция $X(z) = \exp \Phi_0(z)$, где Φ_0 — решение задачи о скачке (1.2), существование которого при условиях данной теоремы мы только что доказали.

3°. Перейдем к доказательству в общем случае. Стандартные преобразования приводят задачу (0.1) к виду

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}, \qquad t \in \mathring{\Gamma}. \tag{2.2}$$

Это задача о скачке; но мы не можем воспользоваться уже доказанной разрешимостью такой задачи, так как гёльдеровский показатель $X^+(t)$ (а значит, и g/X^+) ниже $\nu(S)$, и градиент уитнеевского продолжения дроби g/X^+ уже, вообще говоря, не интегрируем в степени, большей двух. Это препятствие можно преодолеть следующим образом. Разбиения единицы $\{\psi_j\}$ можно построить таким образом, что контур Γ разбивает каждый из носителей Ω_j на не более чем две части Ω_j^+

и Ω_j^-, расположенные слева и справа от Γ. В силу соотношения (1.5) в качестве продолжения $X^+(t)$ с $\Gamma \cap \Omega_j$ в Ω_j можно использовать функцию $X_j(z)$, равную $X(z)$ в Ω_j^+ и $G^w(z)X(z)$ в Ω_j^-. Производная $\partial X_j/\partial\bar z$ этого продолжения равна 0 в Ω_j^+ и $X(z)\partial G^w/\partial\bar z$ в Ω_j^-. В силу леммы 1 она (а вместе с ней — и производная $\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{g^w}{X_j}$) интегрируема в Ω_j в степени большей двух. Таким образом, если использовать в качестве продолжений скачка g/X^+ из $\Gamma\cap\Omega_j$ в Ω_j не $(g/X^+)^w$, а g^w/X_j, то все препятствия к применению к задаче (2.2) рассуждений из п.1° данного доказательства снимаются. Теорема доказана.

Условие (2.1) неулучшаемо. На это указывает

Предложение 1. *Для любой пары чисел* (ν, d), *удовлетворяющей условию* $0 < \nu \leqslant d/2 < 1$, *можно указать такую простую жорданову дугу* Γ *и такую заданную на ней функцию* $f(t)$, *что* $f \in H_\nu(\Gamma)$, $\overset{\circ}{\Gamma}$ *содержит дуги размерности* d *и задача* (1.2) *неразрешима.*

Доказательство. Пусть $\beta > 1$ и $c > 0$; значения этих величин будут уточнены ниже. Рассмотрим совокупность точек $x_{n,j} = 2^{-n}(1+j\cdot 2^{-[n\beta]})$, где j при каждом натуральном n принимает все целые значения от 1 до $2^{[n\beta]}$ ($[\cdot]$ здесь — целая часть), а n пробегает все натуральные числа. Положим $I_{n,j} = \{\, z = x+iy : x = x_{n,j}, 0 \leqslant y \leqslant c\cdot 2^{-n} \,\}$, $I_c^\beta = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{2^{[n\beta]}} I_{n,j}$. Прямой подсчет показывает, что $\overline{\mathrm{dm}} I_c^\beta = 2\beta/(\beta+1)$ (размерность сходного множества в деталях вычислена в [32]). Совокупность вертикальных отрезков $I_{n,j}$ составляет „вертикальную часть“ семейства прямоугольников $\{\Pi_{n,j}\}$, ограничивающих области

$$P_{n,j} = \{\, z = x+iy : x_{n,2j-1} < x < x_{n,2j},\ 0 < y < c\cdot 2^{-n} \,\}$$

при $j = 1, 2, \ldots, 2^{[n\beta]-1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Положим $\Pi = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{2^{[n\beta]-1}} \Pi_{n,j}$; очевидно, контур Π состоит из счетного множества замкнутых кривых (прямоугольников $\Pi_{n,j}$), расположенных вне друг друга и стягивающихся к точке $a = 0$. Горизонтальные стороны этих прямоугольников имеют конечную суммарную длину, так что $\overline{\mathrm{dm}}\Pi = \overline{\mathrm{dm}} I_c^\beta = 2\beta/(\beta+1)$. Начиная с этого момента, мы полагаем $\beta = d/(2-d)$, так что $\overline{\mathrm{dm}}\Pi = d$. Все прямоугольники $\Pi_{n,j}$ ориентированы положительно относительно областей $P_{n,j}$.

Перейдем к построению скачка f. Рассмотрим линейную на каждом из интервалов $[x_{n,j}; x_{n,j+1}]$ функцию $\theta_\nu(x)$, принимающую в точке $x_{n,j}$ значение 0 при четном j и значение $(x_{n,j} - x_{n,j-1})^\nu$ при j нечетном. Такого рода функции нередко используются в теории аппроксимаций; известно, что $\theta_\nu \in H_\nu([0,1])$ (см., например, [30]). Продолжим θ_ν на всю комплексную плоскость, положив $\theta_\nu(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и при $x \geqslant 1$ и $\theta_\nu(x+iy) = \theta_\nu(x)$ при любом y; тогда $\theta_\nu \in H_\nu(\mathbb{C})$.

Простой подсчет показывает, что $|\partial\theta_\nu/\partial x| = 2^{(1-\nu)(n+[n\beta])}$ при $2^{-n} < x < 2^{-n+1}$. При приближении x к нулю эта величина ведет себя как $x^{-\alpha}$, $\alpha = (1+\beta)(1 -$

$\nu) = 2(1-\nu)/(2-d)$. Поэтому при малых ν производная $\partial\theta_\nu/\partial\bar z$ может оказаться неинтегрируемой. Положим

$$f(z) = z^l\theta_\nu(z), \qquad l = [\alpha]-1 \geqslant 0; \tag{2.3}$$

тогда производная $df/\partial\bar z$ интегрируема, и мы можем рассмотреть функцию

$$\Phi_\Pi(z) = f(z)k_\Pi(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_P \frac{\partial f}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{d\zeta\,d\bar\zeta}{\zeta - z}, \tag{2.4}$$

где P — объединение всех прямоугольников $P_{n,j}$. Из известных оценок интеграла (1.4) (см., например, [35]) немедленно следует, что

$$|\Phi_\Pi(z)| \leqslant \begin{cases} C|z|^{[\alpha]-\alpha} & \text{при } \alpha \neq [\alpha], \\ C\ln\frac{1}{|z|} & \text{при } \alpha = [\alpha]. \end{cases} \tag{2.5}$$

Сейчас мы покажем, что эти оценки достигаются „по порядку“. Это происходит благодаря тому обстоятельству, что $\theta_\nu(x)$ возрастает на основаниях всех прямоугольников $P_{n,j}$.

Область P лежит в секторе $S = \{z : 0 \leqslant \arg z \leqslant \operatorname{arctg} c\}$. Обозначим через Σ противоположный сектор $\{z : -z \in S\}$. Фиксируем c так, чтобы $\operatorname{arctg} c < \pi/2(l+1)$. Тогда при $z = x+iy \in S$, $\zeta = \xi + i\eta \in \Sigma$ имеем $\operatorname{Re} z^l(z-\zeta)^{-1} \geqslant Cx^l(x-\xi)^{-1}$, где $C > 0$. Поэтому при $\zeta \in \Sigma$

$$\operatorname{Re}\Phi_\Pi(\zeta) \geqslant -C + \frac{1}{C}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{[n\beta]-1}} 2^{(1-\nu)(n+[n\beta])}\iint\limits_{P_{n,j}}\frac{x^l\,dx\,dy}{x-\xi},$$

здесь и ниже буква C означает различные положительные постоянные. Теперь простые оценки дают при $\zeta \in \Sigma$

$$\operatorname{Re}\Phi_\Pi(\zeta) \geqslant \begin{cases} C|\zeta|^{[\alpha]-\alpha}, & \alpha \neq [\alpha], \\ C\ln\frac{1}{|\zeta|}, & \alpha = [\alpha]. \end{cases} \tag{2.6}$$

В качестве дуги Γ мы возьмем разность $\Pi - I$, где I есть отрезок вещественной оси $[-1,1]$. Она представляет собою ломаную, составленную из счетного множества вертикальных и горизонтальных отрезков. Функция $\Phi_\Gamma(z) = \Phi_\Pi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{t-z}$ удовлетворяет краевому условию (1.2) во всех точках дуги $\overset{\circ}{\Gamma}$, за исключением нуля, где в силу (2.6) она не имеет граничного значения $\Phi_\Gamma^-(0)$.

Теперь допустим, что задача (1.2) с только что построенными Γ и f имеет решение $\Phi_0(z)$. Тогда разность $\Phi_\Gamma(z) - \Phi_0(z)$ голоморфна в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{-1, 0, +1\}$. В силу (2.5) особенность этой разности в точке 0 устранима, т.е. $\Phi_\Gamma(z)$ есть сумма $\Phi_0(z)$ и функции, голоморфной в точке 0. Тогда Φ_Γ должна быть непрерывна в точке 0. Полученное противоречие доказывает предложение.

Конечно, решение задачи Римана (0.1) в классе функций, свободных от ограничений на концах контура, не может быть единственным. Если $\tilde{\Phi}$ есть какое-либо частное решение этой задачи, то ее решением является каждая функция вида

$$\Phi = \tilde{\Phi} + XF, \tag{2.7}$$

где X — функция, построенная при доказательстве теоремы 1, а F — любая голоморфная в $\bar{\mathbb{C}} \setminus E(\Gamma)$ функция. Более того, если контур Γ неспрямляем и его размерность Хаусдорфа (определение этой размерности, см., например, в [39]) превосходит единицу, то существуют нетривиальные голоморфные в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ и непрерывные в $\bar{\mathbb{C}}$ функции; если F — одна из таких функций, то формула (2.7) также дает решение задачи (0.1). Решения этого последнего вида существенно затрудняют описание структуры множества решений задачи (0.1) в классе (0.2). Поэтому целесообразно изменить постановку задачи таким образом, чтобы исключить их из рассмотрения. Это можно сделать в терминах условия Гёльдера и размерности Хаусдорфа.

Будем обозначать размерность Хаусдорфа множества A через $\mathrm{dm}_H A$. Если $\mu(t)$ есть заданная на $\overset{\circ}{\Gamma}$ вещественная функция, принимающая значения из интервала $(0, 1]$, то голоморфную в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ функцию Φ мы отнесем к классу $H_\mu(\mathbb{C}, \overset{\circ}{\Gamma})$, если у каждой точки $t \in \overset{\circ}{\Gamma}$ есть такая окрестность U_t, что Φ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\mu(t)$ в замыкании каждой связной компоненты $U_t \setminus \Gamma$. Решение задачи (0.1), построенное при доказательстве теоремы 1 посредством интегрального оператора (1.4), попадет в этот класс, если

$$\mu(t) < 1 - 2p_1^{-1}(\nu(S), \overline{\mathrm{dm}} S), \qquad t \in S,$$

для каждого $S \subset \overset{\circ}{\Gamma}$. С другой стороны, согласно теореме Е. П. Долженко [40], всякая непрерывная в области U и голоморфная в $U \setminus S$ функция голоморфна в U, если она удовлетворяет в U условию Гёльдера с показателем $\mu > \mathrm{dm}_H S - 1$. Отсюда немедленно следует

Лемма 3. *Если при условиях теоремы* 1 *существует такая заданная на* $\overset{\circ}{\Gamma}$ *функция* $\mu(t)$, *что*

$$\mathrm{dm}_H S - 1 < \mu(t) < 1 - 2p_1^{-1}(\nu(S), \overline{\mathrm{dm}}(S)) \tag{2.8}$$

для любой замкнутой части S множества $\overset{\circ}{\Gamma}$ и для любого $t \in S$, то общее решение задачи (0.1) *в классе $H_\mu(\mathbb{C}; \overset{\circ}{\Gamma})$ имеет вид* (2.7), *где $\tilde{\Phi}$ — любое ее частное решение, X — функция, построенная при доказательстве теоремы* 1, *а F — произвольная голоморфная в $\bar{\mathbb{C}} \setminus E(\Gamma)$ функция.*

Конечно, условие (2.8) можно налагать в не столь локальной форме. Так, если функции $\mu(t)$ и $\nu(S)$ постоянны, то оно превращается в неравенство

$$\mathrm{dm}_H \Gamma - 1 < \mu < 1 - 2p_1^{-1}(\nu, \overline{\mathrm{dm}}(\Gamma; E)), E = E(\Gamma). \tag{2.9}$$

Можно сказать, что разрешимостью задачи Римана управляет клеточная размерность контура, а единственностью решения — его хаусдорфова размерность.

§3. Задача Римана на контурах умеренного скручивания

Теперь мы переходим к решению задачи (0.1) в классе (0.2). Здесь естественным образом возникают ограничения на поведение контура Γ вблизи его концов $E(\Gamma)$. Так, ядро $k_\Gamma(z)$ решает задачу (0.1) при $G(t) \equiv g(t) \equiv 1$, но в класс (0.2) это решение, вообще говоря, не попадает. Примерами тому могут служить дуга $\{t : t = r\exp(-2\pi r^{-p}), 0 < r < 1\}$ или счетная система концентрических кругов $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{t : |t| = n^{-1/p}\}$; для них функция

$$A_\Gamma(z) = \mathrm{Re}\, k_\Gamma(z) \tag{3.1}$$

ведет себя при $z \to 0$ как $|z|^{-p} + O(1)$, т.е. при $p > 1$ ядро $k_\Gamma(z)$ не удовлетворяет условию (0.2). Нетрудно доказать, что задача о единичном скачке на этих контурах не имеет решений, удовлетворяющих условию (0.2). В связи с этим возникает такое предположение: для разрешимости задачи о скачке на контуре Γ в классе (0.2) нужно, чтоб ядро k_Γ попадало в этот класс, т.е.

$$k_\Gamma(z) = O(|z - a|^{-\lambda}), \qquad a \in E(\Gamma), \tag{3.2}$$

где $\lambda < 1$ (конечно, вместо k_Γ здесь можно написать A_Γ). Сейчас мы покажем, что это предположение справедливо.

Теорема 2. *Пусть Γ есть д-контур, обладающий свойством* (3.2), *и $f \in H_\nu(\Gamma)$. Тогда*

1°) *если выполнены следующие два условия:*

$$\nu > \overline{\mathrm{dm}}(\Gamma, E)/2 \quad \textit{или} \quad \nu = 1, \tag{3.3}$$

$$p_1^{-1}(\nu, \overline{\mathrm{dm}}\Gamma) + \lambda/2 < 1, \tag{3.4}$$

то задача о скачке (1.2) *разрешима в классе* (0.2);

2°) *если, кроме того, существует число* μ, *удовлетворяющее неравенствам* (2.9), *то два решения задачи* (1.2) *в классе* $H_\mu(\mathbb{C}; \overset{\circ}{\Gamma})$, *удовлетворяющие условию* (0.2), *могут отличаться лишь постоянным слагаемым*;

3°) *если вместо* (3.3),(3.4) *выполняется более сильное условие*

$$0 \leqslant \lambda < 1 - 2p_1^{-1}(\nu, \overline{\mathrm{dm}}\Gamma), \tag{3.5}$$

то вышеописанное решение задачи (1.2) *имеет вблизи точек множества* $E(\Gamma)$ *асимптотику*

$$\Phi(z) = f(a)k_\Gamma(z) + c(a) + o(1), \qquad a \in E \tag{3.6}$$

где величина $c(a)$ *зависит лишь от* a.

Доказательство утверждения 1° сводится к подстановке квазирешения $\varphi = f^w k_\Gamma$ в формулу (1.3). Согласно лемме 1, при условии (3.4) производная $\partial\varphi/\partial\bar{z}$ интегрируема, а при условии (3.3) она интегрируема в степени большей двух вне любой окрестности $E(\Gamma)$. Поэтому интеграл в формуле (1.3) сводится и дает функцию, непрерывную в $\bar{\mathbb{C}} \setminus E(\Gamma)$. Стандартные оценки интегрального оператора (1.4) (см., например, [35]) показывают, что эта функция удовлетворяет условию (0.2). Утверждение 2° следует из леммы 3: здесь $X(z) \equiv 1$, и разность F двух решений голоморфна в $\bar{\mathbb{C}} \setminus E(\Gamma)$ и имеет слабые особенности в точках множества $E(\Gamma)$, т.е. постоянна. При условии (3.5) производная $\partial\varphi/\partial\bar{z}$ интегрируема в $\bar{\mathbb{C}}$ в степени, большей двух, т.е. интегральный член (1.3) непрерывен в $\bar{\mathbb{C}}$ и $\Phi(z) = f^w(z)k_\Gamma(z) + c(a) + o(1)$ вблизи $a \in E$. Отсюда следует (3.6) в силу очевидного неравенства $\nu > 1 - 2/p_1(\nu, d)$. Теорема доказана.

Мы будем говорить, что контур Γ имеет умеренное скручивание, если он удовлетворяет условию (3.2) с $\lambda < 1$. Этот класс контуров достаточно обширен. Он включает, в частности, все классы негладких дуг, на которых до сих пор была изучена КЗР. Так, Р. К. Сейфуллаев [21] исследовал эту задачу на спрямляемых негладких дугах, удовлетворяющих K-условию, а это условие влечет вблизи концов дуги оценку

$$k_\Gamma(z) = O(\ln|z - a|^{-1}), \qquad a \in E(\Gamma). \tag{3.7}$$

Ю. И. Любарский [16] и Е. А. Данилов [22] также решали КЗР на негладких спрямляемых дугах, удовлетворяющих оценке (3.7). Исходя из идеи В. А. Селезнева [29], можно построить решение задачи о скачке на неспрямляемой дуге Γ, которую можно дополнить до простой замкнутой кривой посредством дуги Γ из классов, исследованных Р. К. Сейфуллаевым, Ю. И. Любарским и Е. А. Даниловым. Но такая дуга Γ также удовлетворяет условию (3.7). Разумеется, условие (3.7) жестче, чем (3.2). При этом условии ограничения (3.4), (3.5) приобретают вид

$$\nu > \overline{\mathrm{dm}}\Gamma - 1, \tag{3.4.0}$$

$$\nu > \overline{\mathrm{dm}}\Gamma/2 \tag{3.5.0}$$

соответственно. Мы уже видели, что ограничение (3.5.0) нельзя ослабить. Покажем, что условие (3.4.0) также неулучшаемо.

Предложение 2. *Для любой пары чисел* (ν, d), *удовлетворяющей условию* $0 < \nu \leqslant d - 1 < 1$, *можно указать такую простую жорданову дугу* Γ *и такую заданную на ней функцию* f, *что*:

1°) *дуга* Γ *имеет клеточную размерность* d *и удовлетворяет оценке* (3.7);

2°) $f \in H_\nu(\Gamma)$;

3°) *задача о скачке* (1.2) *не имеет решений класса* (0.2).

Доказательство. Мы используем контур Π и функцию $\theta_\nu(z)$, построенные при доказательстве предложения 1. Положим

$$\Gamma = \Pi - I_0, \qquad f(z) = z^{l-1}\theta_\nu(z), \qquad l = [\alpha] - 1, \tag{3.8}$$

где I_0 — отрезок $[0, 1]$. Таким образом, Γ здесь есть бесконечно звенная ломаная, отличающаяся от ломаной из доказательства предложения 1 отсутствием звена $[-1, 0]$, т.е. теперь 0 есть ее концевая, а не внутренняя точка. Функция f получается из одноименной функции того же доказательства делением на z; при наших условиях $\alpha = 2(1 - \nu)/(2 - d) \geqslant 2$, следовательно, $l \geqslant 1$ и $f \in H_\nu(\Gamma)$. Остальные обозначения доказательства предложения 1 сохраняются. Выполнение условия $\overline{\mathrm{dm}}\Gamma = d$ и оценки (3.7) очевидно, так что остается доказать 3°. Одним из решений задачи (1.2) для построенных Γ и f является функция

$$\Phi^*(z) = z^{-1}\left(\Phi_\Pi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \frac{tf(t)\,dt}{t - z}\right),$$

где Φ_Π — функция из доказательства предложения 1. Согласно (2.6), Φ^* не удовлетворяет условию (0.2). Допустим, что решение (1.2) в классе (0.2) все же существует, и обозначим его $\Phi(z)$. Тогда функция $z(\Phi^*(z) - \Phi(z))$ голоморфна в $\mathbb{C}$ и имеет в точке ∞ полюс порядка не выше первого. Отсюда

$$\Phi_\Pi(z) = z\Phi(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \frac{tf(t)\,dt}{t - z} + az + b, \tag{3.9}$$

где a и b — постоянные. Поскольку Φ удовлетворяет (0.2), то эта функция интегрируема в квадрате в окрестности нуля. Поэтому (3.9) влечет оценку

$$\iint\limits_{B(r)} |\Phi_\Pi(x + iy)|\,dx\,dy \leqslant Cr^2,$$

где $B(r) = \{z : |z| \leqslant r\}$, C — положительная постоянная. Но согласно (2.6),

$$\iint\limits_{\Sigma\cap B(r)} \operatorname{Re}\Phi_\Pi(x+iy)\,dx\,dy \geqslant \begin{cases} C'r^{2-(\alpha-[\alpha])}, & \alpha > [\alpha], \\ C'r^2 \ln\frac{1}{r}, & \alpha = [\alpha], \end{cases}$$

где C' есть также положительная постоянная. Две последние оценки несовместимы. Поэтому эта задача о скачке не имеет решений не только в классе (0.2), но и в более широком классе функций, интегрируемых в квадрате в окрестности нуля.

Теперь мы переходим к решению в классе (0.2) однородной КЗР, т.е. задачи (0.1) с $g(t) \equiv 0$. Пусть $G(t) = \exp f(t)$, $f \in H_\nu(\Gamma)$, и выполнены условия теоремы 2. Как и выше, обозначим

$$X(z) = \exp\Phi_0(z) = \exp\left(\varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\iint \frac{\partial\varphi}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{d\zeta\,d\bar\zeta}{\zeta - z}\right), \tag{3.10}$$

где $\varphi = f^w k_\Gamma$. Согласно лемме 3, при условии (2.9) любое решение однородной КЗР в классе $H_\mu(\mathbb{C};\overset{\circ}{\Gamma})$ имеет вид

$$\Phi(z) = X(z)F(z),$$

где F — функция с изолированными особенностями в концевых точках контура Γ. Вообще говоря, эти особенности могут оказаться существенными. Но если предел

$$\Delta^*(a) = \varliminf_{z\to 0} \max\{\ln|X(z)|/\ln r : |z-a| = r\}, \qquad a \in E(\Gamma), \tag{3.11}$$

не равен $+\infty$, то особенность F в точке a может быть лишь полюсом. В этом нетрудно убедиться, выбрав сходящуюся к нулю последовательность радиусов $\{r_n\}$, на которой нижний предел (3.11) превращается в обычный, и применив принцип максимума в кольцах $r_{n+1} \leqslant |z-a| \leqslant r_n$ к функции $z^N F(z)$ с достаточно большим N. В частности, при $\Delta^*(a) = -\infty$ это рассуждение показывает, что однородная КЗР не имеет нетривиальных решений класса $H_\mu(\mathbb{C};\overset{\circ}{\Gamma})$, удовлетворяющих условию (0.2). Далее, порядок возможного полюса F в точке $a \in E$ определяется величиной

$$\Delta(a) \varliminf_{z\to a} \ln|X(z)|/\ln|z-a|. \tag{3.12}$$

Именно, произведение $(z-a)^{-n}X(z)$ удовлетворяет условию (0.2) в точке a тогда и только тогда, когда целое число n не превосходит величины

$$\varkappa(a) = 1 +]\Delta(a)[; \tag{3.13}$$

это легко устанавливается прямым подсчетом. В частности, при $\Delta(a) = +\infty$ это условие выполняется при любом n а при $\Delta(a) = -\infty$ таких n нет. Отметим, что $\Delta(a) \leqslant \Delta^*(a)$.

Таким образом, справедливы следующие заключения о числе линейно независимых решений однородной КЗР в классе $H_\mu(\mathbb{C}; \overset{\circ}{\Gamma})$, удовлетворяющих условию (0.2):

если среди значений $\Delta(a)$ нет $-\infty$, но есть $+\infty$, то это число бесконечно;

если среди значений $\Delta^*(a)$ есть $-\infty$, то нетривиальных решений не существует;

если все значения $\Delta^*(a)$ конечны, то число решений есть $\max\{1 + \varkappa, 0\}$, где $\varkappa = \sum\limits_{a \in E(\Gamma)} \varkappa(a)$, а общее решение имеет вид

$$\Phi(z) = P(z)X(z) \prod_{a \in E(\Gamma)} (z-a)^{-\varkappa(a)}, \tag{3.14}$$

где $P(z)$ — произвольный алгебраический многочлен степени не выше $\varkappa$.

Эти утверждения полностью описывают картину разрешимости однородной КЗР в интересующем нас классе, за исключением случая $\Delta^*(a) = +\infty$, $\Delta(a) < +\infty$, т.е. случая, когда колебание $\ln|X(z)|$ на окружности $|z-a| = r$ растет при $r \to 0$ быстрее $\ln r^{-1}$.

Асимптотика (3.6) позволяет выразить пределы (3.11) и (3.12) через G и Γ. Пусть $f(t) = u(t) + iv(t)$, т.е. $v(t)$ есть непрерывная на Γ ветвь $\arg G(t)$, $u(t) = \ln|G(t)|$. Очевидно,

$$k_\Gamma(z) = A_\Gamma(z) + \frac{s_\Gamma(a)}{2\pi i} \ln|z-a| + O(1)$$

при $z \to a \in E(\Gamma)$, где $s_\Gamma(a)$ есть разность между числом разомкнутых дуг контура Γ, входящих в точку a, и числом дуг, выходящих из этой точки. Отсюда и из (3.6) получаем

$$\Delta^*(a) = \frac{1}{2\pi} s_\Gamma(a) v(a) + \delta^*(a), \qquad \Delta(a) = \frac{1}{2\pi} s_\Gamma(a) v(a) + \delta(a) \tag{3.15}$$

где

$$\delta(a) = \varliminf_{z \to a} \ln|G(a)| A_\Gamma(z) / \ln|z-a|,$$
$$\delta^*(a) = \varliminf_{r \to 0} \max\{\ln|G(a)| A_\Gamma(z) / \ln r : |z-a| = r\}. \tag{3.16}$$

Тогда, согласно (3.13),

$$\varkappa(a) = 1 +]\frac{1}{2\pi} s_\Gamma(a) \arg G(a) + \delta(a)[, \tag{3.17}$$

а если колебания

$$\omega_\Gamma(r;a) = \max\{ A_\Gamma(z_1) - A_\Gamma(z_2) : |z_{1,2} - a| = r \}, \qquad a \in E(\Gamma),$$

удовлетворяют при $r \to 0$ условию

$$|\ln|G(a)||\omega_\Gamma(r;a) = O(\ln r^{-1}), \tag{3.18}$$

то разность $\Delta^*(a) - \Delta(a)$ конечна, т.е. величины $\Delta^*(a)$, $\Delta(a)$ либо обе конечны, либо обе одновременно равны $+\infty$ или $-\infty$. Таким образом, при условии (3.18) ситуация $\Delta^*(a) = +\infty$, $\Delta(a) < +\infty$ невозможна. Итак, доказана

Теорема 3. *Пусть* Γ *есть д-контур,* $g \equiv 0$, $G = \exp f$, $f \in H_\nu(\Gamma)$. *Допустим, что выполнены условия* (3.2),(3.5) *и* (3.18) *и существует величина* μ, *удовлетворяющая неравенствам* (2.9). *Тогда количество линейно независимых решений задачи* (0.1)–(0.2) *в классе* $H_\mu(\mathbb{C}; \mathring{\Gamma})$ *равно* $\max(1 + \sum_{a\in E(\Gamma)} \varkappa(a), 0)$, *где величины* $\varkappa(a)$ *определяются формулами* (3.16), (3.17), *если хотя бы одно из значений* $\varkappa(a)$ *есть* $-\infty$, *то здесь необходимо положить* $\sum_a \varkappa(a) = -\infty$.

Таким образом, переход от задачи о скачке к однородной задаче Римана вызывает появление дополнительного ограничения (3.18). Отметим, что это ограничение автоматически выполняется, если $|G(a)| = 1$ или если контур Γ удовлетворяет условию (3.7). Кроме того, оно выполняется, если витки контура Γ вокруг точки a не слишком эксцентричны. Так, если Γ есть дуга $\{t = a + r\exp i\theta(r) : 0 < r \leqslant r_0\}$, где θ вещественная непрерывная на $(0, r_0]$ функция, то колебание $\omega_\Gamma(r;a)$ ограничено при $r \to 0$, какой бы ни была особенность $\theta(r)$ при $r = 0$. Вообще, колебание $\omega_\Gamma(r;a)$ оценивается сверху количеством точек пересечения Γ с окружностью $|z - a| = r$, и если это количество растет не быстрее $\ln r^{-1}$, то условие (3.18) выполняется.

Теперь мы переходим к неоднородной задаче Римана, т.е. к случаю $g(t) \not\equiv 0$. Решение этой задачи в рамках метода регуляризации квазирешений сводится к двум операциям: к построению квазирешения φ и к выбору подходящего решения X, соответствующей однородной КЗР (см. формулу (1.6)).

Сначала мы построим квазирешение (0.1). Если Γ есть замкнутая кривая, то оно строится просто: можно положить $\varphi(z) = 0$ в компоненте $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, расположенной справа от Γ, и $\varphi(z) = g^w(z)$ в левой компоненте. Но если контур Γ не разбивает $\mathbb{C}$ на такие компоненты, то такая конструкция φ невозможна. С другой стороны, для любого д-контура Γ мы можем искать квазирешение непрерывным на Γ; тогда из (0.1) получаем $\varphi^+(t) = \varphi^-(t) = \frac{g(t)}{1-G(t)}$ при $t \in \Gamma$. Таким образом, если G не обращается в единицу на носителе g, то мы можем положить

$$\varphi(z) = (g/(1 - G))^w(z). \tag{3.19}$$

Но если $G(t)$ обращается в единицу там, где $g(t) \neq 0$, то эта формула также не работает. Получить конструкцию квазирешения, осуществимую в любой ситуации, позволяет следующее рассуждение.

Пусть Γ состоит из счетного множества последовательно вложенных друг в друга замкнутых кривых $\{\Gamma_j\}$, $\operatorname{int}\Gamma_1 \supset \operatorname{int}\Gamma_2 \supset \dots$, обходимых против часовой стрелки. Тогда квазирешением является функция $\varphi(z)$, равная 0 вне Γ_1, $g^w(z)$ в $\operatorname{int}\Gamma_1 \setminus \operatorname{int}\Gamma_2$, $G^w(z)g^w(z) + g^w(z)$ в $\operatorname{int}\Gamma_2 \setminus \operatorname{int}\Gamma_3$ и т.д.; в $\operatorname{int}\Gamma_n \setminus \operatorname{int}\Gamma_{n+1}$ эта функция равна

$$\varphi(z) = g^w(z)(1 + G^w(z) + \dots + (G^w(z))^{n-1}) = g^w(z)\frac{(G^w(z))^{k_\Gamma(z)} - 1}{G^w(z) - 1}; \tag{3.20}$$

мы воспользовались здесь тем, что ядро $k_\Gamma(z)$ равно n в $\operatorname{int}\Gamma_n \setminus \operatorname{int}\Gamma_{n+1}$. Легко убедиться, что функция (3.20) является квазирешением для любого контура с целозначным ядром. Но правой части формулы (3.20) можно придать смысл и при нецелом k_Γ. Действительно, пусть $G = \exp f$, $f \in H_\nu(\Gamma)$, а $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_N$ есть такое разбиение единицы, что колебание $\operatorname{Im} f$ на носителе любой из функций ψ_j меньше 2π. Тогда существуют такие целые числа $m_1, \dots, m_N$, что $|\operatorname{Im}(f^w(z) - 2\pi m_j i)| < 2\pi$ на носителе ψ_j. Рассмотрим целую функцию $e(z)$, равную $(e^z - 1)/z$ при $z \neq 0$ и 1 при $z = 0$. Она не обращается в нуль при $|\operatorname{Im} z| < 2\pi$. Поэтому функция

$$\varphi_j(z) = \psi_j(z)g^w(z)k_\Gamma(z)\frac{e(k_\Gamma(z)(f^w(z) - 2\pi m_j i))}{e(f^w(z) - 2\pi m_j i)} \tag{3.21}$$

корректно определена в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. На $\mathring{\Gamma}$ она удовлетворяет краевому условию

$$\varphi_j^+(t) = G(t)\varphi_j^-(t) + g(t)\psi_j(t), t \in \mathring{\Gamma}.$$

Значит, сумма

$$\varphi_*(z) = \sum_{j=1}^{N} \varphi_j(z) \tag{3.22}$$

является квазирешением (0.1). Если $G(t)$ не обращается в единицу на носителе ψ_j, то соответствующее слагаемое φ_j можно определить по более простой формуле $\varphi_j(z) = (\psi_j g/(1 - G))^w(z)$ (ср. (3.19)). В частности, если $a \in E$ и $G(a) \neq 1$, то квазирешение φ_* можно считать непрерывным в точке a. Если же $G(a) = 1$, то из (3.21) следует оценка $\varphi_*(a) = g(a)k_\Gamma(z) + o(1)$ при $z \to a$.

Чтобы подставить это квазирешение в формулу (1.6), мы должны построить еще подходящую функцию X. Пусть $G = \exp f$ и $\Phi_0(z)$ есть решение задачи о скачке (1.2). Будем считать, что все ограничения теоремы 3 на f и Γ выполнены и функции $\delta(a)$, $\delta^*(a)$ конечны. Тогда произведение

$$X_0(z) = \prod_{a \in E} (z - a)^{-\varkappa(a)} \exp \Phi_0(z) \tag{3.23}$$

удовлетворяет (1.5), но о поведении $X_0^{-1}(z)$ вблизи E можно утверждать лишь, что $|X_0^{-1}(z)|$вблизи $a \in E$ оценивается сверху величиной вида $|z-a|^{-\gamma(a)-\omega(a)-\varepsilon}$, где $\gamma(a) = \varkappa(a) - \Delta(a) < 1$,

$$\omega(a) = \overline{\lim_{r\to 0}} \,|\ln|G(a)||\omega_\Gamma(r;a)/\ln r^{-1}; \tag{3.24}$$

ε здесь и ниже означает сколь угодно малое положительное число. Если величина $\omega(a)$ велика, то функция $X_0^{-1}(z)$ может оказаться неинтегрируемой; поэтому в условия разрешимости КЗР входит условие малости $\omega(a)$.

Теорема 4. *Пусть* Γ *есть* д*-контур,* $G = \exp f$, f, $g \in H_{\nu(\Gamma)}$, *причем показатель* ν, *величина* μ *и контур* Γ *удовлетворяют условиям* (2.9),(3.2) *и* (3.5). *Пусть, кроме того, в каждой из точек* $a \in E$ *либо* $|G(a)| = 1$, *либо выполняются оценки* (3.7) *и*

$$\omega(a) \leqslant 1 - 2p_1^{-1}(\nu, \overline{\mathrm{dm}}\Gamma). \tag{3.25}$$

Тогда картина разрешимости задачи (0.1),(0.2) *в классе* $H_\mu(\mathbb{C}; \overset{\circ}{\Gamma})$ *определяется величиной* $\varkappa = \sum\limits_{a\in E(\Gamma)} \varkappa(a)$, *где* $\varkappa(a)$ *есть конечные величины, определенные формулой* (3.17). *Именно при* $\varkappa \geqslant -1$ *эта задача разрешима безусловно, а при* $\varkappa < -1$ — *при выполнении* $\varkappa - 1$ *условий ортогональности производной* $\partial\varphi^*/\partial\bar z$ *квазирешения* (3.22) *некоторым заданным в* $\mathbb{C}$ *функциям.*

Доказательство. Заменим в первой из формул (3.16) нижний предел верхним и обозначим полученную величину $\bar\delta(a)$; очевидно, $\bar\delta(a) - \delta(a) = \omega(a)$. Далее, подставим в формулу (3.17) $\bar\delta(a)$ вместо $\delta(a)$ и обозначим то, что получится, через $\bar\varkappa(a)$. При наших условиях $\bar\varkappa(a) - \varkappa(a) \leqslant 1$, если же $|G(a)| = 1$, то $\bar\varkappa(a) = \varkappa(a)$. Рассмотрим наряду с (3.23) функцию

$$X_*(z) = \prod_{a\in E}(z-a)^{-\bar\varkappa(a)} \exp \Phi_0(z),$$

где $\Phi_0(z)$ определяется формулой (1.3) при $\varphi = f^w k_\Gamma$. Легко видеть, что $|X_*^{-1}(z)| = O(|z-a|^{-\varepsilon})$ вблизи $a \in E(\Gamma)$. Тогда при условиях данной теоремы функция

$$\Psi_*(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbb{C}} X_*^{-1}(\zeta)\frac{\partial\varphi_*}{\partial\bar\zeta},\frac{d\zeta\, d\bar\zeta}{\zeta - z} \tag{3.26}$$

непрерывна в $\bar{\mathbb{C}}$ и удовлетворяет там условию Гёльдера с показателем $1 - 2 \times p_1^{-1}(\nu, \overline{\mathrm{dm}}\Gamma) - \varepsilon$. Пусть Q есть алгебраический многочлен, совпадающий с $\Psi_*(z)$

на множестве $E(\Gamma)$, $\psi(z)$ — гладкая функция с компактным носителем, равная единице в окрестности Г. Тогда

$$\varphi = (\varphi_* - X_*(\Psi_* - Q))\psi$$

есть квазирешение КЗР (0.1). Нетрудно убедиться, что подстановка этого квазирешения в формулу (1.6) дает функцию Ф класса $H_\mu(\mathbb{C}; \mathring{\Gamma})$, голоморфную в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, удовлетворяющую краевому условию (0.1) и условию на концах (0.2) и имеющую порядок $O(|z|^{-\varkappa-1})$ на бесконечности. Таким образом, при $\varkappa \geqslant -1$ она является искомым решением. При $\varkappa < -1$ эта функция будет решением, если Ψ_* имеет нуль достаточно высокого порядка на бесконечности. Несложные преобразования приводят это условие к виду

$$\iint\limits_{\mathbb{C}} \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\zeta}} X_*^{-1}(\zeta)\zeta^{m-1}\,d\zeta\,d\bar{\zeta} = 0, m = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1, \tag{3.27}$$

что и доказывает теорему.

При $\varkappa \geqslant 0$ общее решение задачи имеет вид (2.7), где $\tilde{\Phi}$ есть только что построенное решение, X определяется формулой (3.23), а F — произвольный алгебраический многочлен степени не выше $\varkappa$. При $\varkappa \leqslant -1$ решение (если оно существует) единственно.

Таким образом, переход от задачи о скачке к однородной и затем к неоднородной КЗР сопряжен с нарастанием ограничений на контур. Отметим, однако, что даже довольно жесткие ограничения (3.7), (3.25) теоремы 4 слабее соответствующих условий, использовавшихся до сих пор при исследовании задачи Римана на негладких дугах. Так, Р. К. Сейфуллаев [21] исследовал неоднородную КЗР на негладкой спрямляемой K-дуге в предложении существования пределов отношений $\arg(z-a)/\ln|z-a|$, т.е. при условии $\omega(a) \equiv 0$ в наших обозначениях.

§4. Сильное скручивание

Здесь мы рассмотрим контуры, удовлетворяющие оценке (3.2) с $\lambda > 1$. Конечно, результат §2 о свободной разрешимости задачи Римана применим и здесь. Но как только мы переходим к отысканию решений с оценками (0.2) на концах, то сразу возникает следующее препятствие. Все построения §2 основаны на асимптотике (3.6), а она, в свою очередь, на возможности регуляризации квазирешения $\varphi = f^w k_\Gamma$ посредством интегро-дифференциального оператора (1.3). При $\lambda > 1$ это невозможно, так как производная $\partial\varphi/\partial\bar{z}$ может оказаться неинтегрируемой за счет сильных особенностей k_Γ на концах Г. Простейший способ преодоления этого препятствия — сузить класс функций f таким образом, чтобы интеграл (1.3) сходился. Рассмотрим функции вида

$$f(t) = P(t) + (t-a)^n f_a(t), \qquad t \in \Gamma, \tag{4.1}$$

где n — натуральное число, P — алгебраический многочлен от переменной t, $f_a \in H_\nu(\Gamma)$ и $f_a(a) = 0$. Без ограничения общности можно считать, что степень многочлена P не превосходит n; тогда многочлен P однозначно определяется функцией f и является ее многочленом Тейлора порядка n. Если на множестве E задана целозначная функция $n = n(a)$ и функция f допускает представление (4.1) при каждом $a \in E$, то мы отнесем f к классу $H_\nu^n(\Gamma; E)$ и будем говорить, что эта функция дифференцируема по Тейлору. Эта разновидность дифференцируемости нередко используется при изучении задачи Римана. Следует, однако, отметить, что в случае, когда контур Γ не является гладким в точке a, она перестает быть ослаблением обычной (вещественной) дифференцируемости. Так, функция $f(z) = \bar{z}$ может оказаться не дифференцируемой на Γ по Тейлору в вышеописанном смысле.

Функция f класса $H_\nu^n(\Gamma; E)$ допускает продолжение в $\mathbb{C}$, совпадающее вблизи каждой точки $a \in E$ с функцией $P_f(z; a) + (z-a)^{n(a)} f_a^w(z)$, где $P_f(z; a)$ — многочлен Тейлора функции f в точке a порядка $n(a)$. Сохраним за этим продолжением обозначение $f^w(a)$. Очевидно, $\partial f^w/\partial \bar{z} = (z-a)^n \partial f_a^w/\partial \bar{z}$ вблизи точки a, и произведение $k_\Gamma(z)\partial f^w/\partial \bar{z}$ интегрируемо, если при каждом $a \in E(\Gamma)$ интегрируемо произведение $(z-a)^{n-\lambda} \cdot \partial f_a^w/\partial \bar{z}$. Отсюда немедленно следует

Лемма 4. *Пусть $f \in H_\nu^n(\Gamma; E)$, где ν либо равно* 1, *либо больше* $\overline{\mathrm{dm}}\Gamma/2$, *а ядро k_Γ вблизи каждой точки $a \in E$ допускает оценку* (3.2) *с показателем $\lambda = \lambda(a)$, удовлетворяющим неравенству*

$$\lambda(a) - n(a) < 1 - 2p_1^{-1}(\nu, \overline{\mathrm{dm}}\Gamma), \qquad a \in E. \tag{4.2}$$

Тогда задача о скачке (1.2) *имеет такое решение $\Phi_0(z)$, что*

$$\Phi_0(z) = P_f(z; a) k_\Gamma(z) + O(1), \qquad z \to a \in E. \tag{4.3}$$

Это полная аналогия утверждения 3° теоремы 2, в которое данная лемма превращается при $n(a) \equiv 0$. Но при переходе к однородной КЗР аналогия теряется. Использование пределов (3.10) и (3.11) приводит здесь к удовлетворительным результатам лишь в двух случаях: во-первых, если $|G(a)| \neq 1$, то величины $\Delta(a)$ и $\Delta^*(a)$ одновременно обращаются в $+\infty$ или $-\infty$; во-вторых, если $|G(a)| = 1$ и $P_f(z; a) - P_f(a; a) = O(|z-a|^\lambda)$ вблизи точки a, то $\Delta(a) = \Delta^*(a) = 0$ (отметим, что $P_f(a; a) = f(a) = \ln G(a)$ в этом случае есть чисто мнимая величина либо нуль). В этих случаях картина разрешимости однородной КЗР подобна описанной в теореме 3, и мы не будем ее подробно описывать. Новые явления возникают, если $|G(a)| = 1$, но порядок нуля многочлена $P_f(z; a) - P_f(a; a)$ в точке $z = a$ ниже $\lambda(a)$. Обозначим порядок этого нуля через $\sigma(a)$. Тогда справедлива

Теорема 5. *Пусть вблизи точки $a \in E(\Gamma)$ справедлива оценка*

$$C_*(a)|z-a|^{-\lambda(a)} \leqslant A_\Gamma(z) \leqslant C^*(a)|z-a|^{-\lambda(a)}, \tag{4.4}$$

где $C_*(a)C^*(a) > 0$. *Пусть* $g \equiv 0$, $G = \exp f$, $f \in H^n_\nu(\Gamma; E)$, *где показатель* ν *либо равен* 1, *либо превосходит* $\overline{\mathrm{dm}}\Gamma/2$, *и* $|G(a)| = 1$. *Если порядок* $\sigma(a)$ *меньше* $\lambda(a)$ *и не равен* $\lambda(a)/2$, *то задача* (0.1),(0.2) *не имеет нетривиальных решений в классе* $H_\mu(\mathbb{C}; \overset{\circ}{\Gamma})$ *с любым показателем* μ, *удовлетворяющим* (2.9).

Доказательство. Допустим, что при указанных условиях однородная КЗР имеет нетривиальное решение Φ. Пусть Φ_0 есть решение соответствующей задачи о скачке из леммы 4. Согласно лемме 3, тогда $\Phi = F\exp\Phi_0$, где F — голоморфная в $\bar{\mathbb{C}}\setminus E(\Gamma)$ функция, причем это произведение удовлетворяет неравенству (0.2). Отсюда

$$|F(z)| \leqslant C|z-a|^{-\gamma}\exp(-\operatorname{Re}P_f(z;a)k_\Gamma(z)).$$

Тогда при достаточно большом натуральном n вблизи точки a справедлива оценка

$$|(z-a)^n F(z)| \leqslant C\exp(-A_\Gamma(z)\operatorname{Re}P_f(z;a)). \tag{4.5}$$

Оценка (4.5) означает, что окрестность a разбита линией $\Lambda = \{z : \operatorname{Re}P_f(z;a) = 0\}$ на 2σ криволинейных секторов раствора π/σ каждый, $\sigma = \sigma(a)$, причем на линии Λ функция $(z-a)^n \cdot F(z)$ ограничена, в (проколотой) окрестности a она оценивается сверху величиной $\exp(c|z-a|^{\sigma-\lambda})$, $c > 0$, а в тех секторах, где показатель в правой части (4.5) отрицателен — стремится к нулю при $z \to a$. Согласно принципу Фрагмена–Линделёфа, нетривиальная функция может обладать всеми этими свойствами, лишь если раствор π/σ не менее $\pi/(\lambda-\sigma)$. С другой стороны, если $\pi/(\lambda-\sigma) < \pi/\sigma$, то в криволинейный сектор убывания функции $(z-a)^n F(z)$ можно вписать прямолинейный сектор раствора $\pi/(\lambda-\sigma)$ достаточно малого радиуса, в котором эта функция оценивается сверху величиной $\exp(-|z-a|^{\sigma-\lambda})$, $c > 0$. Но тогда эта функция есть тождественный нуль по теореме Карлсона (см., например, [41]). Итак, существование нетривиального решения влечет равенство углов π/σ и $\pi/(\lambda-\sigma)$, т.е. $\lambda = 2\sigma$, что противоречит условию. Теорема доказана.

В частности, если λ не является целым четным числом, то при $|G(a)| = 1$, $\sigma < \lambda$ однородная КЗР не имеет нетривиальных решений.

Если $\lambda = 2\sigma$, то такие решения могут существовать. Так, если вместо (4.4) вблизи $a \in E(\Gamma)$ выполняется оценка

$$\begin{aligned} A_\Gamma(z) &= c(a)|z-a|^{-\lambda(a)} + O(|z-a|^{-\lambda(a)/2}), \qquad c(a) \neq 0, \\ P_f(z;a) &= b_0(a) + b_\sigma(a)(z-a)^\sigma + Q_f(z;a), \end{aligned} \tag{4.6}$$

где $\operatorname{Re}b_0 = 0$ и порядок нуля многочлена Q_f в точке a больше σ, то при $\lambda(a) = 2\sigma$ имеем

$$A_\Gamma(z)\operatorname{Re}P_f(z;a) = \operatorname{Re}\bar{b}_\sigma c(a)(z-a)^{-\sigma} + A_\Gamma(z)\operatorname{Re}Q_f(z;a) + O(1).$$

Положим $\Phi_1(z) = \Phi_0(z) - \sum\limits_{a\in E(\Gamma)} \overline{b_\sigma(a)}c(a)(z-a)^{-\sigma(a)}$, где Φ_0 — решение задачи о скачке из леммы 4. Тогда вблизи $a \in E$

$$\operatorname{Re}\Phi_1(z) = A_\Gamma(z)\operatorname{Re}Q_f(z;a) + O(1),$$

причем $\Phi_1(z)$ также является решением задачи о скачке (1.2). Используя это решение вместо Φ_0 в рассуждениях из доказательства теоремы 5, мы убеждаемся, что однородная КЗР может иметь нетривиальные решения в этой ситуации, лишь если $Q_f(z;a) = O(|z-a|^{\lambda(a)})$ при $z \to a$, т.е. если в каждой точке $a \in E(\Gamma)$ тейлорово разложение функции f имеет вид

$$f(t) = f(a) + b(a)(t-a)^{\lambda(a)/2} + O(|t-a|^{\lambda(a)}), \qquad \operatorname{Re}f(a) = 0. \tag{4.7}$$

Если эти условия выполнены, то функция

$$X_1(z) = \prod_{a\in E(\Gamma)} (z-a)^{-\varkappa(a)} \exp\Phi_1(z) \tag{4.8}$$

голоморфна в $\mathbb{C}\setminus\Gamma$, попадает в класс $H_\mu(\mathbb{C};\overset{\circ}{\Gamma})$ и удовлетворяет условиям (0.1), (0.2) (при $g(t)\equiv 0$)). В бесконечно удаленной точке порядок этой функции равен $\varkappa = \sum\limits_{a\in E(\Gamma)} \varkappa(a)$, т.е. при $\varkappa \geqslant 0$ общее решение задачи (0.1), (0.2) в классе $H_\mu(\mathbb{C};\overset{\circ}{\Gamma})$ имеет вид

$$\Phi(z) = P(z)X_1(z),$$

где P — произвольный алгебраический многочлен степени не выше $\varkappa$, а при $\varkappa < 0$ нетривиальных решений нет. Показатели $\varkappa(a)$ здесь определяются формулами (3.17), но в силу условия $|G(a)| = 1$ в них следует положить $\delta(a) = 0$.

Итак, если выполнены все продолжения теоремы 5 о Γ и G, но вместо (4.4) в точках $a \in E(\Gamma)$ выполняется условие (4.6) с чëтным показателем $\lambda(a)$, то однородная КЗР имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда выполнены условия согласования контура и коэффициента (4.7) и индекс $\varkappa$ положителен.

При выполнении условий (4.6), (4.7) функция $X_1(z)$ может использоваться для регуляризации квазирешений неоднократной КЗР, т.е. может быть подставлена в формулу (1.6) вместо X. Это позволяет получить для этого случая полный аналог теоремы 4, который мы здесь не приводим.

Как уже отмечалось, класс функций, дифференцируемых по Тейлору в точке скручивания кривой, на которой эти функции заданы, довольно узок. Последующие построения имеют целью решение на кривой с сильным скручиванием задач Римана с коэффициентами из более широкого класса. План этих построений таков. Сначала мы введем на множестве д-контуров отношение эквивалентности таким образом, что решения задачи о скачке на эквивалентных контурах имеют одинаковую (с точностью до ограниченных слагаемых) асимптотику в концевых точках. Затем мы рассмотрим контур, состоящий из счетного множества концентрических окружностей, стягивающихся к их общему центру, и отрезка прямой, выходящего из этого центра. Геометрические свойства этого контура позволяют дать оценку решений задачи о скачке на нем и в случае, когда скачок не является дифференцируемым по Тейлору. Оценка переносится на весь класс эквивалентности этого контура и создает возможности для исследования КЗР на дугах этого класса.

Определение. Будем называть два д-контура Γ и Λ эквивалентными и писать $\Gamma \sim \Lambda$, если разность $k_\Gamma(z) - k_\Lambda(z)$ ограничена в $\bar{\mathbb{C}}$.

Лемма 5. *Контуры* Γ *и* Λ *эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют такие два семейства областей* $\{B_\alpha\}$ *и* $\{D_\beta\}$ *(одно из них может быть пустым) и такое число* $M > 0$, *что* $\Gamma - \Lambda = \sum\limits_\alpha \partial B_\alpha - \sum\limits_\beta \partial D_\beta$ *и каждая точка* $z \in \mathbb{C}$ *содержится не более чем в* M *областях семейства* $\{B_\alpha\} \cup \{D_\beta\}$. *Здесь* ∂Z *означает ориентированную обычным образом границу области* Z.

Доказательство. Поскольку $k_\Gamma - k_\Lambda = k_{\Gamma-\Lambda}$, то из $\Gamma \sim \Lambda$ следует, что контур $\Gamma - \Lambda$ не содержит разомкнутых дуг. Это значит, что $s_\Gamma(a) = s_\Lambda(a)$ для всех a, и входящие в $\Gamma - \Lambda$ разомкнутые дуги образуют в совокупности одну или несколько замкнутых кривых. Поэтому $k_{\Gamma-\Lambda}$ есть ограниченная целозначная функция, равная нулю вблизи бесконечности и имеющая единичный скачок при переходе через любую компоненту контура $\Gamma - \Lambda$. Отсюда нетрудно вывести возможность представления $\Gamma - \Lambda = \sum\limits_\alpha \partial B_\alpha - \sum\limits_\beta \partial D_\beta$ с помощью индукции по величине разности между наибольшим и наименьшим значениями $k_{\Gamma-\Lambda}$ в $\mathbb{C}$.

Пусть $\theta(r)$ есть заданная на отрезке $(0, R]$, $R > 0$, непрерывная вещественная монотонная функция, для которой $\lim\limits_{r\to+0} \theta(r)$ есть $+\infty$ или $-\infty$. Тогда кривая $\Gamma_\theta = \{z = r\exp 2\pi i\theta(r) : 0 < r \leqslant R\}$ с началом $a_1 = 0$ и концом $a_2 = R\exp 2\pi i\theta(R)$ спиралеобразна и $A_{\Gamma_\theta}(z) = -\theta(|z|) + O(1)$. Далее, пусть R_n есть корень уравнения $|\theta(x) - \theta(R)| = n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, а C_n — окружность $|z| = R_n$, обходимая против часовой стрелки; очевидно, $b_n = R_n \exp 2\pi i\theta(R)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, есть точки пересечения дуги Γ_θ с отрезком прямой $[a_1, a_2] = I$ и с окружностями C_n. Рассмотрим контур $\Lambda_\theta = I \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, где знак плюс ставится при $\theta(+0) = -\infty$, а минус — при $\theta(+0) = +\infty$. Тогда $\Gamma_\theta - \Lambda_\theta = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \partial D_n$, где область D_n ограничена отрезком прямой $[b_n, b_{n-1}]$, окружностью C_n и соединяющей точки b_n и b_{n-1} дугой Γ_θ. Области $D_1, D_2, \ldots$ попарно не пересекаются; поэтому $\Gamma_\theta \sim \Lambda_\theta$.

Лемма 6. *Пусть* Γ_1 *и* Γ_2 *— два д-контура,* $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, $f \in H_\nu(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$. *Пусть, кроме того, показатель* ν *либо равен* 1, *либо превосходит* $\overline{\mathrm{dm}}(\Gamma_1 \cup \Gamma_2)/2$, *а величина* μ *удовлетворяет неравенствам вида* (2.9) *при* $\Gamma = \Gamma_1$ *и при* $\Gamma = \Gamma_2$. *Если существует* *голоморфная в* $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_1$ *функция* $\Phi_1(z)$, *удовлетворяющая краевому условию* (1.2) *и принадлежащая пространству* $H_\mu(\mathbb{C}; \mathring{\Gamma})$ *при* $\Gamma = \Gamma_1$, *то существует голоморфная в* $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma_2$ *функция* $\Phi_2(z)$, *удовлетворяющая краевому условию* (1.2) *при* $\Gamma = \Gamma_2$, *принадлежащая пространству* $H_\mu(\mathbb{C}; \mathring{\Gamma})$, *и такая, что разность* $\Phi_1(z) - \Phi_2(z)$ *ограничена в* $\bar{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Здесь достаточно рассмотреть функцию (1.3) с $\varphi(z) = f^w(z) \times k_{\Gamma_1 - \Gamma_2}(z)$, где f^w — продолжение f с $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ в $\mathbb{C}$. Эта функция определена в силу ограниченности ядра $k_{\Gamma_1 - \Gamma_2}$ и представляет собою разность решений задач о скачке на контурах Γ_1 и Γ_2.

Итак, на эквивалентных контурах решения задач о скачке имеют одинаковую асимптотику на E с точностью до ограниченных членов. Но для многих классов скачков решение задачи (1.2) на системе концентрических окружностей Λ_θ строится в явном виде. Согласно лемме 6, это решение может служить оценкой решения задачи о скачке на любом эквивалентном Λ_θ контуре, в том числе на кривой Γ_θ. В работе [42] эта идея реализована для довольно широкого класса скачков, содержащего, в частности, все алгебраические многочлены двух переменных t и $\bar{t}$ (напомним, что класс $H_\nu^n(\Gamma; E)$, вообще говоря, не содержит функцию $f(t) = \bar{t}$). Там приведены аналоги оценки (4.3) для таких скачков и вытекающие из них утверждения о разрешимости КЗР. Здесь мы рассмотрим один простой класс скачков, не подпадающих под условия работы [42].

Обозначим через $H_\nu^*(\Gamma; a)$ подкласс $H_\nu(\Gamma)$, состоящий из функций $f(t)$, представимых вблизи точки $a \in \Gamma$ в виде $f(t) = f^*(|t - a|)$; здесь $f^*(x)$ — функция, заданная для малых неотрицательных x. Если $f \in H_\nu^*(\Lambda_\theta; 0)$, то ввиду постоянства этой функции на окружности C_n (при достаточно большом n) задача (1.2) на контуре Λ_θ имеет решение Φ_0 с оценкой вблизи нуля

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_I \frac{f(t)\,dt}{t - z} \pm \sum_{n=1}^{\infty} f^*(R_n) k_n(z) + O(1).$$

Здесь функция $k_n(z) \equiv k_{C_n}(z)$ равна нулю при $|z| > R_n$ и единице при $|z| < R_n$ а знак перед суммой совпадает со знаком в представлении $\Lambda_\theta = 1 \pm \sum C_n$. Теперь лемма 6 и стандартная замена суммы интегралом приводят к следующему результату: если $\Gamma \sim \Lambda_\theta$ и $f \in H_\nu^*(\Gamma; 0)$, то задача о скачке (1.2) имеет решение, допускающее вблизи нуля оценку

$$\Phi_0(z) = -\frac{1}{2\pi i} f(0) \ln|z| - \int_{|z|} f^*(x)\, d\theta(x) + O(1).$$

Итак, мы получили аналог оценок (3.6) и (4.3); данная асимптотика даже проще, так как оба ее существенных члена постоянны на окружностях $|z| = r$, и пределы (3.11), (3.12) здесь совпадают. Повторяя рассуждения из §3, получаем следующий аналог теоремы 3.

Теорема 6. *Пусть* Γ *есть простая дуга с началом* $a_1 = 0$ *и концом* a_2, *эквивалентная контуру* Λ_θ, $g \equiv 0$, $G = \exp f$ *и* $f \in H_\nu^*(\Gamma; 0)$. *Пусть, кроме того, показатель* ν *либо равен* 1, *либо превосходит* $\overline{\mathrm{dm}}\Gamma/2$, *а величина* μ *удовлетворяет* (2.9). *Тогда число линейно независимых решений задачи* (0.1),(0.2) *в классе* $H_\mu(\mathbb{C}; \overset{\circ}{\Gamma})$ *равно* $\max\{1 + \varkappa, 0\}$, *где*

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2, \qquad \varkappa_1 = 1 +] - (2\pi)^{-1} \arg G(0) - \delta[,$$

$$\varkappa_2 = 1 +](2\pi)^{-1} \arg G(a_2)[, \qquad \delta = \varlimsup_{r \to 0} \int\limits_r \ln |G^*(x)|\, d\theta(x) / \ln r.$$

Так, под условия этой теоремы подпадает дуга с уравнением $t = r \exp 2\pi i (c r^{-\lambda} + \theta_0(r))$, $0 < r \leqslant R$, где числа c, λ вещественны, $c \neq 0$, $\lambda > 1$, $\theta_0(r)$ — непрерывная на $(0, R]$ вещественная функция с оценкой $\theta_0(r) = O(r^{-\lambda+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$. В этом случае $\delta = \lim\limits_{r \to 0} c\lambda r^{-\lambda} \ln |G^*(r)|$, если этот предел существует (конечный или бесконечный).

Если предел δ и соответствующий нижний предел δ_* конечны, причем $\delta - \delta_* < 1 - 2p_1^{-1}(\nu, \overline{\mathrm{dm}}\Gamma)$, то повторение рассуждений из §3 приводит к полному аналогу теоремы 4.

Отметим следующий аспект теорем 5 и 6: они показывают, что картина разрешимости КЗР на контурах с сильным скручиванием существенно зависит от производных и подобных им характеристик абсолютной величины коэффициента G в концевых точках контура.

§5. Заключительные замечания

1. Класс допустимых контуров, описанный в §1, не является максимальной областью применимости метода регуляризации квазирешений. Так, построения §2 нетрудно изменить таким образом, чтобы они доказывали свободную разрешимость задачи Римана на контуре с бесконечным множеством концевых точек.

2. В формулах регуляризации (1.3), (1.6) интегралы берутся по $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Но условия разрешимости $\nu \overline{\mathrm{dm}}(\Gamma; E)/2$, $\nu > \overline{\mathrm{dm}}\Gamma - 1$, а также условие единственности (2.9) означают, что входящие в них размерности контура Γ строго меньше двух. Поэтому при выполнении этих условий площадь контура Γ равна нулю, т.е. при доказательстве почти всех результатов данной статьи можно считать, что интегрирование в этих формулах ведется по всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. С другой стороны, если $\nu = 1$ и ядро k_Γ локально интегрируемо в любой степени, то формула (1.3) с $\varphi = f^w k_\Gamma$ дает решение задачи о скачке и в случае, когда Γ имеет ненулевую площадь. Если заменить в ней область интегрирования $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ на $\mathbb{C}$ (или на $\mathbb{C} \setminus \Gamma'$, где Γ' — измеримое подмножество Γ), то она также даст решение задачи (1.2), но, вообще говоря, иное. Аналогичное замечание можно сделать относительно формулы (1.6).

3. В теоремах 1, 3–6 мы предполагали, что $G(t) = \exp f(t)$, где f — непрерывная на Γ (в теореме 1 — на $\overset{\circ}{\Gamma}$) функция. Если контур Γ состоит из незамкнутых дуг, то это предположение равносильно тому, что функция G непрерывна и не обращается в нуль на Γ (соответственно на $\overset{\circ}{\Gamma}$). Но если контур Γ содержит замкнутые компоненты, то это уже не так. Для того чтобы заданная на замкнутой кривой Γ_j, непрерывная и не обращающаяся в нуль функция $G(t)$, имела непрерывный логарифм $f(t)$, необходимо и достаточно, чтобы обратилась в нуль величина $\varkappa(\Gamma_j) \equiv \frac{1}{2\pi}[\arg G]_{\Gamma_j}$, где $[\arg G]_{\Gamma_j}$ означает приращение $\arg G$ при однократном положительном обходе Γ_j. Однако теорема 1 сохраняет справедливость, если заменить в ней условия

$$G = \exp f, \qquad f \in H_{\nu(s)}(S) \ \forall S \Subset \overset{\circ}{\Gamma}$$

условиями

$$G \in H_{\nu(s)}(S) \ \forall S \Subset \overset{\circ}{\Gamma}, \qquad G(t) \neq 0 \ \forall t \in \overset{\circ}{\Gamma}.$$

В этом нетрудно убедиться с помощью хорошо известной процедуры (см., например, [1,2]), позволяющей перейти к задаче с нулевыми индексами $\varkappa(\Gamma_j)$ на всех замкнутых компонентах Γ_j. Применение этой процедуры на контуре с бесконечным множеством компонент Γ_j возможно здесь потому, что на искомую функцию не налагается никаких ограничений вблизи множества $E(\Gamma)$. Если же решение ищется в классе (0.2), то „обнуление" индексов $\varkappa(\Gamma_j)$ возможно в общем случае лишь на конечном числе компонент, т.е. в теоремах 3 и 4 условие

$$G = \exp f, \qquad f \in H_\nu(\Gamma),$$

можно заменить лишь условием

$$G \in H_\nu(\Gamma), \qquad G(t) \neq 0$$

на Γ и среди чисел $\varkappa(\Gamma_j)$ лишь конечное число отличных от нуля.

При этом к величине $\varkappa$, определяющей, согласно этим теоремам, картину разрешимости задачи Римана, необходимо добавить конечную сумму $\sum\limits_{\Gamma_j \in \Gamma} \varkappa(\Gamma_j)$. То же можно сказать и о теореме 5, но здесь пространство $H_\nu(\Gamma)$ заменяется на $H_\nu^n(\Gamma; E)$.

4. При условиях теоремы 1 коэффициенты G и g могут иметь любые особенности в точках множества $E(\Gamma)$, а коэффициент G может обращаться в нуль в этих точках.

5. Конструкция примера, доказывающего предложения 1 и 2, является неспрямляемой версией конструкции Е. М. Дынькина [30]. В работе [30] оно служит для доказательства неулучшаемости условия $\nu > 1/2$, обеспечивающего непрерывность интеграла типа Коши по спрямляемой кривой. Е. М. Дынькин полагал, что $1/2$ здесь — это половина хаусдорфовой размерности контура интегрирования. Но из результатов данной работы следует, что это половина его клеточной размерности. Впрочем, для спрямляемой кривой эти размерности совпадают.

6. В последние годы появилось несколько работ (см. [43–46]), в которых вводится обобщение интеграла $\int_\Gamma f(z)\,dz$ для неспрямляемых кривых Г. Можно показать, что решение КЗР и ее условия разрешимости представимы в форме таких обобщенных интегралов.

7. Если контур Г состоит из счетного множества замкнутых спрямляемых кривых, то теорему 2 можно рассматривать как описание условий сходимости ряда из интегралов типа Коши по этим кривым и некоторых свойств его суммы. Аналогично если E есть линия бесконечной длины, каждая собственная дуга которой спрямляема, то теорема 2 дает условия сходимости несобственного интеграла типа Коши по дуге Г и его асимптотику на концах.

8. Условие (3.25) означает, что витки скручивающегося контура Г не сильно отклоняются от окружностей. Это условие существенно. В статье [47] отчасти описаны явления, возникающие при его нарушении. С другой стороны, теорема 4 сохраняет справедливость и при $1 \leqslant \omega(a) < +\infty$, если коэффициенты G и g имеют в точке a тейлоровы производные порядка $> \omega(a)$ (см. [48]).

9. Пусть ядро k_Γ локально интегрируемо в любой степени. Тогда, согласно лемме 1, формула (1.3) с $\varphi = f^w k_\Gamma$, $f \in H_\nu(\Gamma)$ дает вполне определенную голоморфную в $\bar{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функцию при $\nu > d-1$, $d = \overline{\mathrm{dm}}\Gamma$. Но непрерывные граничные значения в каждой точке $t \in \overset{\circ}{\Gamma}$ эта функция имеет лишь при $\nu > d/2$. Возникает вопрос: что можно сказать о ее граничных значениях при $d/2 \geqslant \nu > d-1$? Отчасти ответить на этот вопрос позволяют результаты А. Йонссона и Х. Валлина [49,50]. Из них можно вывести при некоторых дополнительных ограничениях на контур Г, что в этой ситуации почти всюду на Г(относительно соответствующей меры Хаусдорфа) существуют усредненные граничные значения

$$\Phi^\pm(t) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{m_2(U_r^\pm(t))} \iint\limits_{U_r^\pm(t)} \Phi(x+iy)\,dx\,dy,$$

где $U_r^+(t)$ и $U_r^-(t)$ — это части, на которые контур Г разбивает круг $\{z : |z-t| < r\}$, m_2 — мера Лебега на плоскости. Кроме того, равенство $\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t)$ выполняется почти всюду на Г относительно той же меры. Здесь можно усмотреть аналогию с разрывной постановкой краевой задачи Римана (см., например, [10]).

Список литературы

[1] Гахов Ф. Д., *Краевые задачи*, Наука, М., 1977.

[2] Мусхелишвили Н. И., *Сингулярные интегральные уравнения*, Наука, М., 1968.

[3] Говоров Н. В., *Краевая задача Римана с бесконечным индексом*, Наука, М., 1986.

[4] Гохберг И. Д., Крупник Н. Я., *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов*, Штиинца, Кишинев, 1973.

[5] Данилюк И. И., *Нерегулярные граничные задачи на плоскости*, Наука, М., 1975.

[6] Зверович Э. И., *Краевые задачи теории аналитических функций в гёльдеровских классах на римановых поверхностях*, Успехи мат.наук **26** (1971), № 1(157), 113–179.

[7] Литвинчук Г. С., *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом*, Наука, М., 1977.

[8] Монахов В. Н., *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений*, Наука, Новосибирск, 1969.

[9] Симоненко И. Б., Чинь Нгок Минь, *Локальный метод в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами. Нетеровость*, Изд-во Ростовск. ун-та, 1986.

[10] Хведелидзе Б. В., *Линейные разрывные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения*, Тр. Тбил. ин-та АН ГССР, т. 23, 1956, с. 3–158.

[11] Чибрикова Л. И., *Основные граничные задачи для аналитических функций*, Изд-во Казанск. ун-та, 1977.

[12] Коэн Д., Боксма О., *Граничные задачи в теории массового обслуживания*, Мир, М., 1987.

[13] Mandelbrot B., *Fractals: Form, Chance and Dimension*, San Francisco, Freeman, 1977.

[14] Mandelbrot B., *The Fractal Geometry of Nahire*, San Francisco, Freeman, 1983.

[15] Федер Е., *Фракталы*, Мир, М., 1991.

[16] Любарский Ю. И., *Свойства систем линейных комбинаций степени*, Алгебра и анализ **1** (1989), № 6, 1–70.

[17] Айзенштат А. В., Карлович Ю. И., Литвинчук Г. С., *Об одной теореме конформного склеивания и ее приложениях*, Докл. расш. заседания семин. Ин-та прикл. мат. им. И. Н. Векуа 3 (1988), № 1, 9–12.

[18] Vainio J. V., *Conditions for the possiqility of contormal sewing*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. Dissertationes **53** (1985), 3–43.

[19] Katznelson Y., Sughashis Nag, Sullivan D. P., *On contormal welding homeomorphism associated to Jordan curves*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. **15** (1990), 293–306.

[20] Bishop C. J., *Contormal welding of rechiaqle curves*, Math. Scand. **67** (1990), 61–72.

[21] Сейфуллаев Р. К., *Краевая задача Римана на негладкой разомкнутой кривой*, Мат. сб. **112** (1980), № 2, 147–161.

[22] Данилов Е. А., *Зависимость числа решений однородной задачи Римана от контура и модуля коэффициента*, ДАН СССР **264** (1982), № 6, 1305–1308.

[23] Бабаев А. А., Салаев В. В., *Краевые задачи и сингулярные уравнения на спрямляемом контуре*, Мат. заметки **31** (1982), № 4, 571–580.

[24] Кокилашвили В. М., Пааташвили В. А., *Краевая задача линейного сопряжения с измеримыми коэффициентами*, Тбил. Мат. ин-та АН ГССР **55** (1977), 59–92.

[25] Кокилашвили В. М., Паатишвили В. А., *Задача линейного сопряжения с измеримыми коэффициентами для одного класса граничных кривых*, Сообщ. Ан ГССР **91** (1978), № 1, 25–27.

[26] Селезнев В. А., *Краевая задача Газемана на римановых поверхностях в классах квазиконформных контуров и сдвигов*, Динамика сплошной среды, т. 13, Новосибирск, 1973, с. 99–115.

[27] Селезнев В. А., *Сингулярные уравнения на квазиконформных контурах*, Метрич. вопросы теории функций и отображений (1975), № 7, 130–147, Наук. думка, Киев.

[28] Батчаев И. М., *Об аналоге формулы Сохотского–Племеля в областях с квазиконформной границей*, Теория приближ. функций. Тр. междунар. конф. по прибл. функций, Киев, 31 мая–5 июня 1983 г., Наука, М., 1987, с. 436.

[29] Селезнев В. А., *Краевая задача Римана в классах жордановых границ*, Метрич. вопросы теории функций и отображений, Наук. думка, Киев, 1980, с. 125–132.

[30] Дынькин Е. М., *Гладкость интеграла типа Коши*, Зап. науч.семинаров ЛОМИ **92** (1979), 115–133.

[31] Кац Б. А., *Краевая задача Римана на неспрямляемой жордановой кривой*, ДАН СССР **267** (1982), № 14, 789–792.

[32] Кац Б. А., *Задача Римана на замкнутой жордановой кривой*, Изв. вузов, Математика (1983), № 4, 68–80.

[33] Кац Б. А., *Задача Римана на разомкнутой жордановой кривой*, Изв.вузов, Математика (1983), № 12, 30–38.

[34] Кусис П., *Введение в теорию пространств НР с приложением доказательства Волффа теоремы о короне*, Мир, 1984.

[35] Векуа И. Н., *Обобщенные аналитические функции*, ГИФМЛ, М., 1959.
[36] Стейн И., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
[37] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М., *ϵ-энтропия и емкость множества в функциональных пространствах*, Успехи мат.наук **14** (1959), № 2, 3–86.
[38] Кац Б. А., *Задача Римана на замкнутой жордановой кривой в полунепрерывной постановке*, Изв.вузов, Математика (1985), № 6, 14–22.
[39] Карлесон Л., *Избранные проблемы теории исключительных множеств*, Мир, М., 1971.
[40] Долженко Е. П., *О „стирании" особенностей аналитических функций*, Успехи мат. наук **18** (1963), № 4, 135–142.
[41] Титимарш Е., *Теория функций*, Наука, М., 1980.
[42] Кац Б. А., *О краевой задаче Римана на функциональных дугах и дугах бесконечной длины* I, II, Изв. вузов, Математика (1993).
[43] Кац Б. А., *Задача о скачке и интеграл по неспрямляемой кривой*, Изв. вузов, Математика (1987), № 5, 49–57.
[44] Harrison J., Norton A., *Geometric Integration on Fractal Curves in the Plane*, Indiana Math.J. **40** (1991), no. 2, 567–594.
[45] Harrison J., Norton A., *The Gauss-Green formula for fractal boundaries*, Duke Math. J. **67** (1992), no. 3, 575–588.
[46] Кац Б. А., *К вопросу об интегрировании по плоским фрактальным контурам*, Сиб. мат. журн.
[47] Кац Б. А., *О краевой задаче Римана на краевой с неравномерным закручиванием*, Изв. вузов, Математика (1990), № 11, 38–40.
[48] Кац Б. А., *О неоднородной задаче Римана на разомкнутой жордановой кривой*, Тр. семинаров по краевым задачам, т. 21, Казань, 1984, с. 87–93.
[49] Jonsson A., Wallin H., *Function spaces on subsets of* $\mathbb{R}^n$, Math. Reports 2, Pt 1, Harwood Acad. Publ., London, 1984.
[50] Wallin H., *The trace to the boundary of Sobolev spaces on a snowflake*, Manuscripta math. **73** (1991), 117–125.

Поступило 28 октября 1992 г.