Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. В. Алтунин, Г. А. Спиридонов, Рекуррентное соотношение между коэффициентами вириальных рядов по степеням ρ и p, *ТВТ*, 1967, том 5, выпуск 6, 1120–1122

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 3.238.202.29
10 ноября 2024 г., 19:33:01

$$+\frac{2(1+h)}{h}\frac{1}{2C+\Psi\left(-\frac{1}{1+h}\right)+\Psi\left(-\frac{h}{1+h}\right)}\times$$

$$\times\frac{t}{(1+t)^2}\left\{1-th^2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{[h(2n+1)+2n]^2}-\frac{1}{[h(2n-1)+2n]^2}\right)\right\}^2. \qquad (8)$$

Из нашего решения вытекает два частных случая, о которых ранее сообщалось в печати. Если радиусы частиц одинаковы, т. е. $r_1 = r_2$ и $h = 1$, получается решение, совпадающее с тем, которое опубликовано в работе [1]. Если взять сферическую частицу, соприкасающуюся с бесконечной плоскостью, т. е. $r_2 = \infty$ и $h = \infty$, то получается решение, совпадающее с тем, что приведено Льюисом [4].

Интересно отметить, что при изменении h от единицы до бесконечности k пробегает значения от $k > 1$ до $k < 1$, т. е. в зависимости от соотношения размеров соприкасающихся частиц работа выхода может иметь значения, превышающие работу выхода плоской поверхности, или, наоборот, может стать меньше этой величины.

Днепропетровский горный институт
им. Артема

Поступило в редакцию
19 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Максименко, В. И. Твердохлебов. Изв. вузов. Физика, № 1, 84, 1964
2. В. И. Твердохлебов, В. И. Уманов. Изв. вузов. Физика, № 4, 157, 1967.
3. Г. А. Гринберг. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. Изд-во АН СССР, 1948.
4. T. J. Lewis. Proc. Roy. Soc., 67 B, 187, 1954.
5. J. Bardeen. Phys. Rev., 49, 653, 1936.

УДК 533.21

РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ВИРИАЛЬНЫХ РЯДОВ ПО СТЕПЕНЯМ ρ И p

В. В. Алтунин, Г. А. Спиридонов

Наиболее распространенной формой уравнения состояния сжатых газов является вириальное разложение по степеням ρ

$$z = \frac{p}{\rho RT} = 1 + \sum_{i=1}^{r} B_i(T)\rho^i. \qquad (1)$$

Уравнение (1) широко используют как для решения прикладных задач, так и для получения физической информации (в частности вириальных коэффициентов B_i) по опытным термодинамическим данным.

Однако в некоторых задачах по чисто методическим соображениям в качестве независимых переменных используют не ρ и T, а p и T, и «рабочее» уравнение имеет вид

$$z = 1 + \sum_{i=1}^{r} A_i(T)p^i. \qquad (2)$$

К числу таких задач относятся экспериментальное определение сжимаемости методом Бернетта (метод последовательных расширений без измерения объема), расчет термодинамических свойств химически реагирующих смесей реальных газов и др.

При решении таких задач приходится трансформировать ряды (1) и (2), т. е. по известным коэффициентам B_i необходимо вычислять A_i, и наоборот.

Выведем соотношение, связывающее A_i и B_i, учитывая, что

$$p = RT\rho\sum_{i=1}^{r} B_i\rho^i. \qquad (3)$$

Используя (1), (2), (3), получим следующее выражение:

$$\sum_{i=1}^{r} B_i\rho^i = \sum_{i=1}^{\infty} A_i (RT\rho)^i \left[\sum_{j=0}^{r} B_j\rho^j\right]^i, \tag{4}$$

где $B_0 = 1$.

Выражение $\left[\sum_{j=0}^{r} B_j\rho^j\right]^i$ преобразуем, используя полиномиальную теорему [1]

$$\left[\sum_{j=0} B_j\rho^j\right]^i = \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_r=i} \frac{i!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_r!}(B_0)^{\alpha_0}(B_1\rho)^{\alpha_1}\ldots(B_r\rho^r)^{\alpha_r}. \tag{5}$$

Принимая во внимание (5) и заменяя индекс i в левой части выражения (4) на j, получим

$$\sum_{i=1}^{r} B_i\rho^i = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_r=j} A_j (RT\rho)^j \frac{j!}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_r!}(B_0)^{\alpha_0}(B_1\rho)^{\alpha_1}\ldots(B_r\rho^r)^{\alpha_r}, \tag{6}$$

или

$$\sum_{i=1}^{r} B_i\rho^i = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_r=j} A_j (RT)^j \frac{j!\,B_0^{\alpha_0}B_1^{\alpha_1}\ldots B_r^{\alpha_r}}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_r!}\rho^{j+\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+r\alpha_r}. \tag{7}$$

Положив

$$j + \alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + r\alpha_r = i(*),$$

получим реккурентное соотношение между коэффициентами B_i и A_i.

Чтобы стало справедливо соотношение $(*)$, в числитель правой части выражения (7), очевидно, должны входить лишь произведения B_k при $k \leqslant i-1$. Тогда

$$B_i = \sum_{\substack{\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_{i-1}=j,\\ \alpha_1+2\alpha_2+\ldots+(i-1)\alpha_{i-1}=i-j,\\ 1\leqslant j\leqslant i}} j!(RT)^j A_j \frac{B_0^{\alpha_0}B_1^{\alpha_1}\ldots B_{i-1}^{\alpha_{i-1}}}{\alpha_0!\,\alpha_1!\ldots\alpha_{i-1}!}, \tag{8}$$

где $B_0 = 1$, и

$$A_i = (RT)^{-i}\left[B_i - \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant i-1\\ \sum_{k=0}^{i-1}\alpha_k=j,\\ \sum_{k=0}^{i-1}k\alpha_k=i-j}} j!(RT)^j A_j \prod_{0\leqslant k\leqslant i-1}\frac{B_k^{\alpha_k}}{\alpha_k!}\right], \tag{9}$$

Формула (9) устанавливает аналитическую связь между коэффициентами A_i и B_i. Принимая во внимание (9), можно получить в развернутом виде выражение для любых коэффициентов A_i. Ниже приводятся формулы для вычисления коэффициентов A_i при $i = 1, 2, 3, \ldots 7$:

$$A_1 = (RT)^{-1}B_1,$$

$$A_2 = (RT)^{-2}[B_2 - (RT)A_1B_1],$$

$$A_3 = (RT)^{-3}\left[B_3 - \sum_{j=1}^{2} j(RT)^j A_j B_{3-j}\right],$$

$$A_4 = (RT)^{-4}\left[B_4 - \sum_{j=1}^{3} j(RT)^j A_j B_{4-j} - (RT)^2 A_2 B_1^2\right],$$

$$A_5 = (RT)^{-5}\left[B_5 - \sum_{j=1}^{4} j(RT)^j A_j B_{5-j} - 2(RT)^2 A_2 B_1 B_2 - 3(RT)^3 A_3 B_1^2\right].$$

$$A_6 = (RT)^{-6}\left[B_6 - \sum_{j=1}^{5} j(RT)^j A_j B_{6-j} - (RT)^2 A_2 (B_2^2 + 2B_1B_3) - \right.$$

$$\left. - (RT)^3 A_3 (B_1^3 + 6B_1B_2) - 6(RT)^4 A_4 B_1^2\right],$$

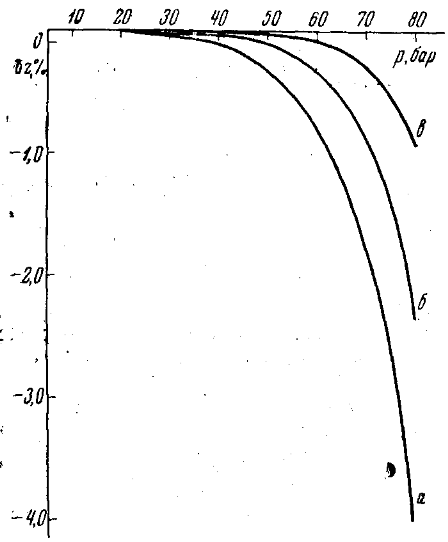
$$A_7 = (RT)^{-7}\left[B_7 - \sum_{j=1}^{6} j(RT)^j A_j B_{7-j} - 2(RT)^2 A_2 (B_1B_4 + B_2B_3) - \right.$$

$$\left. - 3(RT)^3 A_3 (B_2^2 + 2B_1B_3) - 4(RT)^4 A_4 (B_1^3 + 3B_1B_2) - 10(RT)^5 A_5 B_1^2\right].$$

Ранее в литературе сообщались формулы приведения для A_1, A_2, A_3 и A_4, полученные другим способом (см. [2]). Из найденных нами соотношений следует, что формулы для A_1, A_2 и A_3, указанные в [2], правильны, но в формуле для A_4 содержится ошибка. В действительности

$$A_4 = \frac{B_4 - 2B_2^2 - 4B_1B_3 + 10B_2B_1^2 - 5B_1^4}{(RT)^4}.$$

Если в качестве исходного принят ряд (1), то при переходе к ряду (2) степень полинома, как правило, не изменяют, т. е. удерживают в (2) столько же коэффициентов A_i, сколько было B_i в (1). Легко показать, что при таком переходе ряды (1) и



Отклонения значений z для CO_2 на изотерме 49,712° С, вычисленных с помощью трансформированных рядов (2) различной протяженности, от найденных по исходному уравнению (1а) с тремя коэффициентами:
$а - r = 3$; $б - r = 4$; $в - r = 7$

(2) не могут считаться эквивалентными. Пусть исходный ряд (1) содержит, например, четыре члена:

$$z = 1 + B_1\rho + B_2\rho^2 + B_3\rho^3. \tag{1а}$$

Из формулы (9) следует, что при обращении в нуль коэффициентов B_4, B_5, $B_6 \ldots$ (как в нашем случае) коэффициенты A_4, A_5, $A_6 \ldots$ в нуль не обращаются. Иными словами, чтобы описать опытные данные с заданной точностью (такой же, так и при использовании (1а)), необходимо в уравнении (2) удерживать значительно большее, чем три, число членов. Это положение иллюстрируется рисунком.

Московский энергетический институт

Поступило в редакцию 16 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. И. С. Соминский. Элементарная алгебра. Дополнительный курс. Физматгиз, 1963.
2. L. P. Epstein. J. Chem. Phys., 20, 1981, 1952.