



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. М. Фоменко, О дзета-функции Эпштейна,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2002, том 286, 169–178

<https://www.mathnet.ru/zns11575>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.171

22 мая 2025 г., 14:08:03



О. М. Фоменко

О ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ЭПШТЕЙНА

§1. ВВЕДЕНИЕ; РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $Q(x_1, \dots, x_k)$ – положительная квадратичная форма от $k \geq 2$ переменных с целыми коэффициентами; $s = \sigma + it$. Для $\sigma > \frac{1}{2}k$ дзета-функция Эпштейна определена рядом

$$\zeta(s; Q) = \sum_{x_1, \dots, x_k = -\infty}^{\infty} Q(x_1, \dots, x_k)^{-s},$$

где суммирование идет по всем целым точкам $(x_1, \dots, x_k) \neq (0, \dots, 0)$. Дзета-функция $\zeta(s; Q)$ имеет аналитическое продолжение на всю s -плоскость с единственной особенностью – простым полюсом в точке $s = k/2$. Для нее справедливо функциональное уравнение риманова типа $\ll s \rightarrow \frac{k}{2} - s \gg$. Полоса $0 \leq \sigma \leq k/2$ является для $\zeta(s; Q)$ критической. В [1] исследовался рост $\zeta(s; Q)$ на прямой $s = \frac{k}{2} - \frac{1}{2} + it$, $|t| \rightarrow \infty$. Как показано в [1], в случае $k \geq 4$ эта задача сводится к задаче о росте L -рядов Дирихле $L(s, \chi)$ на центральной прямой $s = \frac{1}{2} + it$. В результате получаем оценку

$$\zeta\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2} + it; Q\right) \ll T^{\alpha+\varepsilon},$$

где здесь и ниже $T = |t| + C$, $C > 0$ – некоторое постоянное число, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое постоянное число, $\alpha = 9/56$ для четного $k \geq 4$, $\alpha = 1/6$ для нечетного $k \geq 5$. Показатель $9/56$, связанный с известной оценкой Бомбьери и Иванца [2] в классической гипотезе Линделёфа, можно несколько уменьшить (см. уточнение оценки Бомбьери и Иванца в работах Хаксли и других авторов). В случае положительной бинарной квадратичной формы Q с целыми коэффициентами ситуация сходная, а именно,

Работа выполнена частично при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 02-01-00087)

справедливо неравенство

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it; Q\right) \ll \left|G\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| + \sum_f \left|L\left(\frac{1}{2} + it, f\right)\right|.$$

Здесь

$$G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(n)}{n^s},$$

где $R(n)$ – число представлений n родом формы Q , $\{L(s, f)\}$ – конечный набор L -функций собственных форм Гекке f веса 1. Можно показать, что $G(s)$ выражается в виде конечной линейной комбинации произведений вида

$$\varphi(s)L(s, \chi_1)L(s, \chi_2),$$

где $\varphi(s)$ – несущественный множитель. Такой подход приводит к передоказательству (для случая форм с целыми коэффициентами) наилучшей на настоящий момент оценки Титчмарша [3] порядка роста дзета-функции Эпштейна положительной бинарной квадратичной формы Q с вещественными коэффициентами на критической прямой:

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + it; Q\right) \ll T^{\frac{1}{3} + \varepsilon}.$$

Отметим, что в работе [3] Титчмарш впервые применил двумерный аналог метода ван дер Корпута.

Для тернарной квадратичной формы Q с целыми коэффициентами аналогичная связь $\zeta(s; Q)$ с какими-либо каноническими L -функциями неизвестна. В [1] для $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ была получена оценка

$$\zeta(1 + it; Q) \ll T^{5/12} \log^3 T. \quad (1)$$

Её доказательство легко следует из известного неравенства ван дер Корпута (теорема 5.11 книги [4], см. также ниже лемму 5).

В настоящей работе мы применим к задаче (1) метод оценки экспоненциальных сумм, использованный в проблеме шара (см. [5–7]). При этом в работе [7] подход [5, 6] был значительно упрощен.

Цель настоящей работы – существенно улучшить оценку (1).

Теорема. Пусть $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Тогда

$$\zeta(1 + it; Q) \ll T^{1/4 + \varepsilon}.$$

§2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СУММЫ ПО ЦЕЛЫМ ТОЧКАМ В СФЕРАХ

Пусть $r_3(n)$ – число представлений n суммой трех квадратов целых чисел. Нам потребуются нетривиальные оценки для экспоненциальных сумм типа ($R > 1$)

$$V_N(R) = \sum_{n \asymp N} r_3(n) e(R \log n),$$

где $e(z) = e^{2\pi iz}$, $n \asymp N$ означает $c_1 N < n < c_2 N$ с некоторыми положительными константами c_1, c_2 (которые не обязательно одни и те же в каждом конкретном случае).

Лемма 1. Для $1 < N \ll R^2$ имеет место следующее неравенство

$$V_N(R) \ll N^{5/4+\varepsilon} + N^\varepsilon \cdot \min \left\{ R^{3/8} N^{3/4} + R^{1/8} N, R^{7/24} N^{7/8} + R^{5/24} N \right\}.$$

Доказательство. Сначала выведем, что

$$\begin{aligned} V_N(R) &\ll \left| \sum_{a,b,c} \left(R \log(a^2 + b^2 + c^2) \right) \right| \ll \\ &\ll N^\varepsilon \sum_{n \asymp N} \left| \sum_{c \ll \sqrt{N}} e(\theta c) e \left(R \log(n + c^2) \right) \right| \end{aligned} \quad (2)$$

для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$.

Для доказательства (2) мы выберем наименьшую переменную, скажем c , и используем следующую лемму 2 ([8, лемма 7.3]).

Лемма 2. Пусть $M \leq N < N_1 \leq M_1$. Пусть

$$K(\theta) = \min \left\{ M_1 - M + 1, (\pi|\theta|)^{-1}, (\pi\theta)^{-2} \right\}.$$

Тогда

$$\left| \sum_{N < n \leq N_1} a_n \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta) \left| \sum_{M < m \leq M_1} a_m e(m\theta) \right| d\theta.$$

Кроме того, L_1 -норма функции $K(\theta)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\theta) d\theta \ll \log(M_1 - M + 2).$$

Эту лемму применяем к сумме по c , а из переменных a, b образуем новую переменную $n = a^2 + b^2$.

Отметим, что доказательство (2) можно получить непосредственными рассуждениями (без применения леммы 2).

Далее разбиваем интервал внутреннего суммирования на отрезки длины $N^{1/2-\varepsilon}$ и применяем неравенство Коши, тогда

$$V_N^2(R) \ll N^{1+\varepsilon} \sum_{c_1, c_2} \left| \sum_{n \asymp N} \varepsilon \left(R(\log(n + c_1^2) - \log(n + c_2^2)) \right) \right|,$$

где c_1, c_2 берутся с ограничениями $c_1, c_2 < N^{1/2}$ и $|c_1 - c_2| < N^{1/2-\varepsilon}$. Следовательно, при подходящем $D < N^{1-\varepsilon}$ мы получаем

$$V_N^2(R) \ll N^{5/2+\varepsilon} + N^{1+\varepsilon} \sum_{y \asymp D} \left| \sum_{x \asymp N} \varepsilon(f(x, y)) \right|,$$

где

$$f(x, y) = R(\log x - \log(x + y)).$$

Нам потребуется теорема Кузьмина–Ландау [8, теорема 2.1], которую мы приведем в следующей лемме.

Лемма 3. Пусть $I = (a, b]$, где a, b – целые числа,

$$\|x\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |x - n|;$$

f непрерывно дифференцируема, f' монотонна и $\|f'\| \geq \lambda > 0$ на I . Тогда

$$\sum_{n \in I} \varepsilon(f(n)) \ll \lambda^{-1}.$$

Если $DR \ll N^2$, то, по лемме 3, внутренняя сумма удовлетворяет неравенству

$$\sum_{x \asymp N} \varepsilon(f(x, y)) \ll N^2 D^{-1} R^{-1},$$

поэтому

$$N^{1+\varepsilon} \sum_{y \asymp D} \left| \sum_{x \asymp N} \varepsilon(f(x, y)) \right| \ll N^{3+\varepsilon} R^{-1}.$$

Следовательно, в пределах

$$\sqrt{DR} \ll N \ll R^2$$

справедлива оценка

$$V_N^2(R) \ll N^{5/2+\varepsilon}. \quad (3)$$

Остается исследовать случай

$$N \ll \sqrt{DR}.$$

Нам потребуется следующая известная лемма ([8, лемма 3.6]; B -процесс одномерного метода ван дер Корпута). Напомним, что $f \approx g$ означает выполнение обоих неравенств $f \ll g$ и $g \ll f$.

Лемма 4. Пусть f – вещественная функция на $[a, b]$, которая имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно, и пусть $f'' < 0$ на этом интервале. Пусть далее $[a, b] \subseteq [N, 2N]$ и $\alpha = f'(b)$, $\beta = f'(a)$. Пусть существует некоторое $F > 0$ такое, что $f^{(2)}(x) \approx FN^{-2}$, $f^{(3)}(x) \ll FN^{-3}$ и $f^{(4)}(x) \ll FN^{-4}$ для $x \in [a, b]$. Пусть x_ν определено соотношением $f'(x_\nu) = \nu$ и пусть $\phi(\nu) = -f(x_\nu) + \nu x_\nu$. Тогда

$$\sum_{n \in (a, b]} \varepsilon(f(n)) = \sum_{\alpha \leq \nu \leq \beta} \frac{\varepsilon(-\phi(\nu) - 1/8)}{|f''(x_\nu)|^{1/2}} + O\left(\log(FN^{-1} + 2) + F^{-1/2}N\right).$$

Если $N \ll \sqrt{DR}$, мы применим лемму 4 с $F = RDN^{-1}$. В результате получаем неравенство

$$\begin{aligned} V_N^2(R) &\ll N^{5/2+\varepsilon} + R^{-1/2}D^{1/2}N^{5/2+\varepsilon} + \\ &+ R^{-1/2}D^{-1/2}N^{5/2+\varepsilon} \sum_{y \asymp D} \left| \sum_{x \asymp U} \varepsilon(g(x, y)) \right|, \end{aligned} \quad (4)$$

где $U = RDN^{-2}$,

$$g(x, y) = f(\alpha(x, y), y) - x\alpha(x, y) \quad (5)$$

и $\alpha(x, y)$ есть неявная функция, определенная соотношением

$$f_x(\alpha(x, y), y) = x. \quad (6)$$

Средний член в (4) возникает из остаточного члена в лемме 4.

Далее используем неравенство Коши и деление на диадические интервалы. Можно показать, что существует $1 \leq T < U$ такое, что

$$V_N^4(R) \ll N^{5+\varepsilon} + R^{-1}DN^{5+\varepsilon} + R^{-1}N^{5+\varepsilon}V_{UTD}, \quad (7)$$

где

$$V_{UTD} \ll \sum_{x \asymp U} \sum_{z \asymp T} \left| \sum_{y \asymp D} \epsilon(G(x, y, z)) \right|$$

с

$$G(x, y, z) = g(x + z, y) - g(x, y).$$

Далее нам потребуются хорошо известные неравенства ван дер Корпута ([8, теорема 2.2; 4, теорема 5.11]) которые мы приведем в следующей лемме.

Лемма 5. 1) Пусть $f(x)$ – вещественная функция на интервале $I = (a, b]$ с непрерывными производными до второго порядка включительно и $b - a \geq 1$. Пусть на этом интервале $0 < \lambda_2 \leq f''(x) \leq h\lambda_2$ (или $0 < \lambda_2 \leq -f''(x) \leq h\lambda_2$). Тогда

$$\sum_{n \in I} \epsilon(f(n)) \ll h(b-a)\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}.$$

2) Пусть $f(x)$ – вещественная функция на интервале $I = (a, b]$ с непрерывными производными до третьего порядка включительно и $b - a \geq 1$. Пусть на этом интервале $0 < \lambda_3 \leq f'''(x) \leq h\lambda_3$ (или $0 < \lambda_3 \leq -f'''(x) \leq h\lambda_3$). Тогда

$$\sum_{n \in I} \epsilon(f(n)) \ll h^{1/2}(b-a)\lambda_3^{1/6} + (b-a)^{1/2}\lambda_3^{-1/6}.$$

Применяя неравенства леммы 5, получаем

$$V_{UTD} \ll UT \min \left\{ D\lambda_2^{1/2} + \lambda_2^{-1/2}, D\lambda_3^{1/6} + D^{1/2}\lambda_3^{-1/6} \right\}, \quad (8)$$

где $\lambda_2 \asymp |G_{yy}|$ и $\lambda_3 \asymp |G_{yyy}|$. По теореме о среднем значении

$$\lambda_2 \asymp T|g_{xyy}| \quad \text{и} \quad \lambda_3 \asymp T|g_{xyyy}|.$$

С другой стороны, по (5) и (6), имеем $g_x = -\alpha$, следовательно,

$$\lambda_2 \asymp T|\alpha_{yy}| \quad \text{и} \quad \lambda_3 \asymp T|\alpha_{yyy}|.$$

Остается оценить частные производные α_{yy} и α_{yyy} . По определению функции f и (6), имеем

$$\alpha^{-1} - (\alpha + y)^{-1} = xR^{-1}.$$

Дифференцируя по y , получаем

$$-\frac{1}{\alpha^2}\alpha_y + \frac{1}{(\alpha+y)^2}(\alpha_y+1) = 0,$$

откуда

$$\frac{1}{\alpha_y} = \left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)^2 - 1 = (1+h)^2 - 1 = h(2+h), \quad (9)$$

где

$$h = \frac{y}{\alpha} \asymp \frac{D}{N} \ll N^{-\varepsilon},$$

поскольку

$$y \asymp D, \quad \alpha \asymp N, \quad D < N^{1-\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$\alpha_y \asymp ND^{-1}.$$

Дифференцируя формулу (9), получаем

$$-\frac{\alpha_{yy}}{\alpha_y^2} = 2\left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha - y\alpha_y}{\alpha^2}\right), \quad (10)$$

откуда

$$-\alpha_{yy} = 2\alpha_y^2(1+h)\frac{1}{\alpha}(1-h\alpha_y) = 2\alpha_y^2\frac{1}{\alpha}(1+h)\frac{h+1}{h+2} \asymp \alpha_y^2 \cdot \frac{1}{\alpha}.$$

Следовательно,

$$|\alpha_{yy}| \asymp ND^{-2}.$$

Дифференцируя формулу (10), после некоторых вычислений получаем

$$-\frac{\alpha_{yyy}}{\alpha_y^3} + 2\frac{\alpha_{yy}^2}{\alpha_y^3} = 2\frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{h+1}{h+2}\right)^2 \left\{ \frac{h^2 - 2h - 6}{h(h+2)} \right\},$$

откуда следует

$$\alpha_{yyy} = 2\frac{\alpha_y^2}{\alpha^2 h} \left(\frac{h+1}{h+2}\right)^2 \left(\frac{3h^2 + 10h + 10}{h+2}\right) \asymp \frac{\alpha_y^2}{\alpha^2 h} \asymp ND^{-3}.$$

Из полученных выше оценок для частных производных мы заключаем теперь, что

$$\lambda_2 \asymp TND^{-2}, \quad \lambda_3 \asymp TND^{-3}.$$

Подставляем полученное в (7) и (8). Учитывая соотношения

$$U = RDN^{-2}, \quad T < U, \quad N^2 R^{-1} \ll D < N,$$

имеем (после некоторых вычислений)

$$V_N^4(R) \ll N^{5+\varepsilon} + N^\varepsilon \cdot \min \left\{ R^{3/2} N^3 + R^{1/2} N^4, R^{7/6} N^{7/2} + R^{5/6} N^4 \right\}.$$

Соединяя эту оценку с (3), получаем доказательство леммы 1.

§3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Имеем

$$\zeta(s; Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_3(n)}{n^s} \quad \left(\sigma > \frac{3}{2} \right).$$

Исходя из результатов работы [9], получаем приближенное функциональное уравнение для $\zeta(s; Q)$.

Лемма 6. Для $\frac{1}{4} \leq \sigma \leq H$, где H — любая константа, $|t| > C > 0$ и x, y взяты с условиями

$$x \asymp y \asymp |t|, \quad xy = |t|^2,$$

имеем

$$\begin{aligned} \zeta(s; Q) &= \sum_{n \leq x/\pi} \frac{r_3(n)}{n^s} + \pi^{2s-3/2} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}-s\right)}{\Gamma(s)} \cdot \\ &\cdot \sum_{n \leq y/\pi} \frac{r_3(n)}{n^{3/2-s}} + O(x^{1-\sigma} \log x). \end{aligned}$$

Из этой леммы следует соотношение

$$\begin{aligned} \zeta(1+it; Q) &= \sum_{n \leq \frac{|t|}{\pi}} \frac{r_3(n)}{n^{1+it}} + \pi^{1/2+2it} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-it\right)}{\Gamma(1+it)} \sum_{n \leq \frac{|t|}{\pi}} \frac{r_3(n)}{n^{1/2-it}} + \\ &+ O(\log |t|) = S_1 + \pi^{1/2+2it} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-it\right)}{\Gamma(1+it)} \cdot S_2 + O(\log |t|). \end{aligned}$$

Рассмотрим сумму S_1 с $t < 0$; сумма S_1 с $t > 0$ и сумма S_2 (с $t \geq 0$) изучаются аналогично.

Разобьем сумму S_1 на две:

$$S_1 = \sum_{1 \leq n \leq \sqrt{|t|}} \frac{r_3(n)}{n^{1+it}} + \sum_{\sqrt{|t|} < n \leq \frac{|t|}{\pi}} \frac{r_3(n)}{n^{1+it}} = S_1^{(I)} + S_1^{(II)}.$$

$S_1^{(I)}$ оцениваем тривиально:

$$S_1^{(I)} \ll |t|^{1/4+\varepsilon} \quad (|t| > C > 0).$$

$S_1^{(II)}$ оцениваем с помощью леммы 1; полагая $-t = R$, имеем

$$S_1^{(II)} \ll R^\varepsilon \sup_{\sqrt{R} \ll N \ll R} \left(N^{-1} |V_N(R)| \right).$$

В промежутке $\sqrt{R} \ll N \ll R$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} N^{-1} V_N(R) &\ll \\ &\ll N^{1/4+\varepsilon} + N^\varepsilon \min \left(R^{3/8} N^{-1/4} + R^{1/8}, R^{7/24} N^{-1/8} + R^{5/24} \right), \end{aligned}$$

откуда

$$\sup_{\sqrt{R} \ll N \ll R} \left(N^{-1} |V_N(R)| \right) \ll R^{1/4+\varepsilon} + R^{1/4-1/48+\varepsilon}.$$

Итак, при $|t| > C > 0$ имеем

$$\zeta(1+it; Q) \ll |t|^{1/4+\varepsilon}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. О. М. Фоменко, *Порядок дзета-функции Эпштейна в критической полосе*, Зап. научн. семин. ПОМИ **263** (2000), 205–225.
2. E. Bombieri and H. Iwaniec, *On the order of $\zeta(\frac{1}{2} + it)$* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci (4) **13** (1986), 449–472.
3. E. C. Titchmarsh, *On Epstein's zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (2) **36** (1934), 485–500.
4. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*. Second edition, Oxford, (1986).
5. И. М. Виноградов, *К вопросу о числе целых точек в шаре*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **27** (1963), 957–968.
6. Chen Jing-Run, *Improvement on the asymptotic formulas for the number of lattice points in a region of the three dimensions. II*, Sci. Sinica **12**, No. 6 (1963), 751–764.
7. F. Chamizo and H. Iwaniec, *On the sphere problem*, Revista Mathem. Iberoamericana **11**, No. 2 (1995), 417–429.

8. S. W. Graham and G. Kolesnik, *Van der Corput's method for exponential sums*, London Math. Soc. Lecture Notes **126**, Cambridge, 1991.
9. K. Chandrasekharan and R. Narasimhan, *The approximate functional equation for a class of zeta-functions*, Math. Ann. **152**, No. 1 (1963), 30–64.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 6 мая 2002 г.