



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. В. Кречетников, И. И. Липатов, Распространение возмущений в пространственных сверхзвуковых пограничных слоях,
Прикл. мех. техн. физ., 1999, том 40, выпуск 3, 116–127

<https://www.mathnet.ru/pmtf3085>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

14 мая 2025 г., 16:43:41



УДК 532.526

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

Р. В. Кречетников, И. И. Липатов*

Московский физико-технический институт, 140160 Жуковский

* Центральный аэрогидродинамический институт, 140160 Жуковский

Проведен анализ распространения возмущений в трехмерных пограничных слоях в условиях глобального и локального сильного вязко-невязкого взаимодействия. Найдена система субхарактеристик, на основе выведенного условия для субхарактеристики, связанной с давлением, получено алгебраическое соотношение, определяющее скорость распространения возмущений. Рассчитаны скорости распространения возмущений в двух- и трехмерных течениях. Исследованная проблема имеет важное значение для корректной постановки задач для уравнений трехмерного нестационарного пограничного слоя и построения адекватных вычислительных моделей.

Введение. Развитие возмущений является составной частью проблемы гидродинамической устойчивости. Анализ распространения возмущений в пограничном слое соответствует исследованию устойчивости к длинноволновым возмущениям и необходим для корректной постановки задач для уравнений трехмерного нестационарного пограничного слоя и построения вычислительных моделей.

На основе анализа уравнений трехмерного пограничного слоя в [1, 2] показано, что характеристиками являются линии, перпендикулярные обтекаемой поверхности. Такое свойство характеристик связано со старшими производными, описывающими распространение возмущений с бесконечными скоростями в направлении, перпендикулярном к поверхности.

В [1, 2] на основе анализа характеристик и субхарактеристик сформулирована корректная постановка задачи для нестационарного двумерного и стационарного трехмерного пограничных слоев. Исследование течения с возвратными токами в пограничном слое позволило выявить разрывное решение, формирующееся в результате нестационарного процесса [3].

Для случая, когда распределение давления заранее неизвестно и должно определяться в результате решения, существует дополнительный механизм распространения возмущений, связанный с распространением волн давления. Возможность распространения таких волн вверх по потоку в сверхзвуковых и гиперзвуковых пограничных слоях обусловлена существованием области дозвукового течения вблизи поверхности. Неизвестное заранее индуцированное распределение давления характерно для процессов вязко-невязкого взаимодействия. Линейные процессы сильного взаимодействия при отражении скачка уплотнения от пограничного слоя исследованы в [4]. Их роль оказалась существенной также для отрывных течений, течений с большими локальными градиентами [5, 6] и течений в гиперзвуковых пограничных слоях [7, 8].

Анализ распространения возмущений в трехмерных пограничных слоях для режима сильного гиперзвукового вязко-невязкого взаимодействия [9] позволил определить субха-

ракетистические поверхности, отделяющие области докритического (в среднем дозвукового) течения от закритического (в среднем сверхзвукового). Согласно [10] докритически называются течения, где возмущения могут распространяться вверх по потоку на расстояния, значительно превышающие толщины пограничного слоя, а закритическими — на расстояния, сравнимые с толщиной пограничного слоя.

Двумерные нестационарные течения исследованы в работах [11–13]. Пространственные нестационарные процессы распространения возмущений рассматриваются в настоящей работе. Изучены два состояния, соответствующие глобальному и локальному режимам сильного взаимодействия. В первом случае возмущения распространяются на расстояния, сравнимые с характерной длиной тела. Такой режим реализуется, когда параметр гиперзвукового взаимодействия [14] принимает большие значения [7]. Второй режим характерен для малых значений параметра гиперзвукового взаимодействия. Возмущения в этом случае распространяются на малые по сравнению с длиной тела расстояния, но превышающие характерную толщину пограничного слоя.

1. Глобальное сильное взаимодействие. Рассматривается обтекание плоской поверхности, расположенной под нулевым углом атаки, гиперзвуковым потоком вязкого газа в режиме сильного гиперзвукового вязко-невязкого взаимодействия [14] при условиях

$$M_\infty \rightarrow \infty, \quad M_\infty \tau \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

где M_∞ — число Маха невозмущенного невязкого потока; τ — безразмерная толщина пограничного слоя.

Для декартовых координат, отсчитываемых в направлении набегающего потока, по нормали к поверхности и в трансверсальном направлении, времени, соответствующих компонент вектора скорости, плотности, давления, полной энтальпии, динамического коэффициента вязкости приняты следующие обозначения: $lx, ly, lz, lt/u_\infty, u_\infty u, u_\infty v, u_\infty w, \rho_\infty \rho, \rho_\infty u_\infty^2 p, u_\infty^2 H/2, \mu_0 \mu$. Параметр l — некоторая характерная длина (например, длина образующей поверхности в продольном направлении); $\tau = (\rho_\infty u_\infty l / \mu_0)^{-1/4}$, где индексом « ∞ » отмечены размерные величины в набегающем потоке; μ_0 — величина динамического коэффициента вязкости, определенного при температуре торможения. Предполагается, что газ является термодинамически совершенным и характеризуется постоянным отношением удельных теплоемкостей γ . Хотя в гиперзвуковых потоках эффекты реального газа существенны, в данной работе они не рассматриваются, поскольку их учет в принципе не меняет соотношений, полученных ниже. Число Рейнольдса велико, но не превышает критической величины, при которой происходит ламинарно-турбулентный переход. Известно, что для сверхзвуковых и гиперзвуковых течений число Рейнольдса перехода достаточно велико [15].

В соответствии с теорией сильного взаимодействия [14] возмущенную область течения можно разделить на две подобласти: I — ударный слой и II — пограничный слой (рис. 1). Особые области около передней кромки и в температурном переходном слое вблизи внешней границы пограничного слоя в настоящей работе не рассматриваются, так как течение в этих областях не влияет в первом приближении на течение в пограничном слое.

В подобласти I функции течения и координат [14] представлены следующим образом:

$$(x, y, z, t) = (x_1, \tau y_1, z_1, t_1), \quad (u, v, w) = (1 + \dots, \tau v_1 + \dots, w_1 + \dots), \\ (p, \rho, H) = (\tau^2 p_1 + \dots, \rho_1 + \dots, H_1 + \dots).$$

Подстановка указанных разложений в систему уравнений Навье — Стокса и предельный переход (1.1) приводят к системе нелинейных уравнений, описывающей возмущенное невязкое течение в ударном слое [14]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t_1} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho_1 v_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial \eta_1}{\partial t_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \right) + v_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{p_1}{\rho_1^\gamma} \right) = 0$$

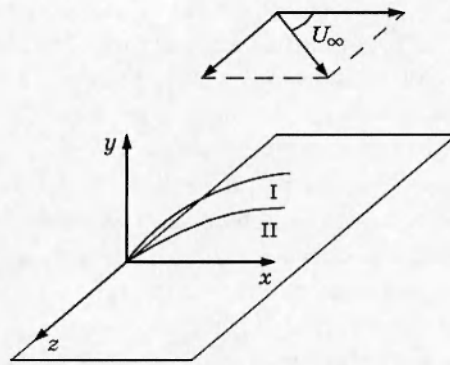


Рис. 1

с граничными условиями на ударной волне

$$y_1 = g_1(x_1, t_1), \quad \rho_1 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \quad p_1 = \frac{(\gamma + 1)v_1^2}{2}, \quad v_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_1}{\partial t_1} \right)$$

и внешней границе пограничного слоя

$$y_1 = \delta_1(x_1, t_1), \quad v_1 = \frac{2}{\gamma + 1} \left(\frac{\partial \delta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta_1}{\partial t_1} \right).$$

Для последующего анализа необходимо установить связь между толщиной пограничного слоя (или вертикальной скоростью на внешней границе пограничного слоя) и индуцированным возмущением давления. Используем приближенное соотношение

$$p_1 = \frac{\gamma + 1}{2} v_1^2, \quad (1.2)$$

которое представляет собой обобщение формулы касательного клина на нестационарный случай.

Для подобласти II характерны следующие асимптотические представления:

$$(x, y, z, t) = (x_1, \tau y_1, z_1, t_1). \quad (1.3)$$

$$(u, v, w) = (u_2 + \dots, \tau v_2 + \dots, w_2 + \dots), \quad (p, \rho, H) = (\tau^2 p_2 + \dots, \tau^2 \rho_2 + \dots, H_2 + \dots). \quad (1.4)$$

Подстановка (1.3) и (1.4) в систему уравнений Навье — Стокса и предельный переход (1.1) приводят к системе уравнений нестационарного трехмерного пограничного слоя

$$\begin{aligned} X \frac{\partial U}{\partial T} + X \left(U \frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial U}{\partial Y} \right) - \frac{F}{4} \frac{\partial U}{\partial Y} + \beta \frac{\gamma - 1}{4\gamma} Q &= \frac{P}{C_0} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ X \frac{\partial W}{\partial T} + X \left(U \frac{\partial W}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial W}{\partial Y} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial W}{\partial Y} \right) - \frac{F}{4} \frac{\partial W}{\partial Y} + \beta \frac{\gamma - 1}{4\gamma} Q &= \frac{P}{C_0} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2}, \\ X \frac{\partial G}{\partial T} + X \left(U \frac{\partial G}{\partial X} - \frac{\partial F}{\partial X} \frac{\partial G}{\partial Y} - \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \frac{\partial G}{\partial Y} \right) - \frac{F}{4} \frac{\partial G}{\partial Y} &= X Q \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{P}{C_0} \frac{\partial^2 G}{\partial Y^2}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = 0, \quad \beta = -1 + \frac{2X}{P} \frac{\partial P}{\partial X}, \quad \Delta = \left[\frac{(\gamma - 1)C_0}{2\gamma P^2} \right]^{1/2} \int_0^\infty Q^2 dY,$$

$$P = \frac{\gamma + 1}{2} \left[\frac{3\Delta}{4} + X \left(\frac{\partial \Delta}{\partial X} + \frac{\partial \Delta}{\partial T} \right) \right]^2, \quad Q = G - U^2 - W^2,$$

где $Y = \left[\frac{\gamma - 1}{2\gamma C_0} \right]^{1/2} x_1^{-1/4} \int_0^{\bar{y}_1} R dy_1$; $\delta_1 = x_1^{3/4} \Delta$; $u_2 = U = \frac{\partial F}{\partial Y}$; $w_2 = W = \frac{\partial \Phi}{\partial Y}$; $X = x_1$; $Z = z_1$;
 $T = t_1$; $p_2 = x_1^{-1/2} P$; $\rho_2 = x_1^{-1/2} R$; $C_0 = P(0, T)$; $G = H_2$.

Отметим, что в приближении пограничного слоя уравнение для поперечной компоненты импульса вырождается, из чего следует независимость функций P и β от поперечной координаты Y . Без ограничения общности предполагается, что коэффициент вязкости линейно зависит от температуры, а число Прандтля равно единице. Решение этой системы уравнений должно удовлетворять граничным условиям на поверхности и внешней границе пограничного слоя:

$$U = F = \Phi = 0, \quad G = g_w, \quad Y = 0, \quad U = \cos \alpha, \quad W = \sin \alpha, \quad G = 1, \quad Y = \infty \quad (1.6)$$

(α — угол между направлением набегающего потока и осью OX). Для определения единственного решения необходимо задать дополнительное условие на некоторой линии ниже по течению от передней кромки, например донное давление на задней кромке [7]. Появление дополнительного условия связано с возможным распространением возмущений вверх по потоку и их влиянием на течение в пограничном слое:

$$P[X, Z = \lambda(X), T] = \varphi(X, T). \quad (1.7)$$

Это возмущение давления находится из решения задачи, описывающей течение в донной области. Вместе с тем в случае обтекания пластины нулевой толщины единственное решение рассматриваемой задачи определяется из условия гладкости при переходе от в среднем дозвукового течения к в среднем сверхзвуковому течению в следе [16, 17].

2. Определение субхарактеристических поверхностей. Характеристическая (субхарактеристическая) поверхность $\Omega(X, Z, T)$, связанная с функцией $P(X, Z, T)$, является поверхностью, на которой не определена производная $\partial P / \partial \Omega$. Процедура, используемая ниже, применима лишь в условиях, когда распределение давления в системе уравнений пограничного слоя заранее неизвестно и определяется в процессе решения. Для этого система уравнений должна содержать дополнительное условие взаимодействия (1.2) и дополнительные граничные условия (1.7). К задачам такого типа относится также проблема описания распространения возмущений в каналах, где для определения распределения давления используется уравнение неразрывности, записанное в интегральном виде.

После введения новых переменных $X, Y, Z, T \rightarrow \Omega(X, Z, T), Y, Z, T$ краевая задача (1.5)–(1.7) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial \Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + W \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right) - \frac{\partial U}{\partial Y} \left(\frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right) + A_1 \frac{\partial P}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X} = B_u,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + W \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right) - \frac{\partial W}{\partial Y} \left(\frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right) + A_2 \frac{\partial P}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial Z} = B_w, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + W \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right) - \frac{\partial G}{\partial Y} \left(\frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right) + A_3 \frac{\partial P}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial T} = B_g;$$

$$P = \frac{\gamma + 1}{2} \left[X \frac{\partial \Delta}{\partial \Omega} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} + \frac{\partial \Omega}{\partial T} \right) + \frac{3\Delta}{4} + X \frac{\delta \Delta}{\partial T} \right]^2, \quad (2.2)$$

$$A_1 = A_2 = \frac{(\gamma - 1)Q}{2\gamma P}, \quad A_3 = \frac{(\gamma - 1)Q}{\gamma P}.$$

Выражения для правых частей уравнений (2.1) ниже не применяются. Используя определение толщины вытеснения пограничного слоя, производную в правой части выражения (2.2) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \Omega} = \left[\frac{(\gamma - 1)C_0}{2\gamma P^2} \right]^{1/2} \left[\int_0^\infty \frac{\partial Q}{\partial \Omega} dY - \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \Omega} \int_0^\infty Q dY \right].$$

Для нахождения производной $\partial Q/\partial \Omega$ преобразуем систему уравнений (2.1) к одному уравнению для функции

$$D = \frac{\partial F}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X} + \frac{\partial \Phi}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial Z}.$$

Сложением первого уравнения, умноженного на $\partial \Omega/\partial X$, и второго, умноженного на $\partial \Omega/\partial Z$, получаем уравнение

$$A_0 \frac{\partial D}{\partial Y} + \bar{D} \frac{\partial A_0}{\partial Y} + B_1 Q \frac{\gamma - 1}{2\gamma P} \frac{\partial P}{\partial \Omega} = B_0, \quad (2.3)$$

где $A_0 = \frac{\partial \Omega}{\partial T} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + W \frac{\partial \Omega}{\partial Z}$; $B_1 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right)^2$.

Уравнение (2.3) имеет решение

$$D = -B_1 A_0 \frac{\gamma - 1}{2\gamma P} \frac{\partial P}{\partial \Omega} \int_0^Y \frac{Q}{A_0^2} dY + A_0 \int_0^Y \frac{B_0}{A_0^2} dY,$$

которое приводит к следующим выражениям для производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \Omega} &= \frac{1}{A_0} \left(\bar{D} \frac{\partial U}{\partial Y} - A_1 \frac{\partial P}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial X} + B_u \right), & \frac{\partial W}{\partial \Omega} &= \frac{1}{A_0} \left(\bar{D} \frac{\partial W}{\partial Y} - A_2 \frac{\partial P}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial Z} + B_w \right), \\ \frac{\partial G}{\partial \Omega} &= \frac{1}{A_0} \left(D \frac{\partial G}{\partial Y} + A_3 \frac{\partial P}{\partial \Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial T} + B_g \right). \end{aligned}$$

Окончательно получим выражение для производной индуцированного давления в направлении, перпендикулярном к субхарактеристической поверхности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \Omega} &= P B_p / \left(N \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} + \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right) \right), & N &= \frac{\gamma - 1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right)^2 \right] I_1 - I_0, \\ I_0 &= \int_0^\infty (G - U^2 - W^2) dY, & I_1 &= \int_0^\infty (G - U^2 - W^2)^2 / \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U \frac{\partial \Omega}{\partial X} + W \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right)^2 dY. \end{aligned} \quad (2.4)$$

После введения скорости перемещения субхарактеристической поверхности

$$a_x = a \cos \omega = -\frac{1}{B_1} \frac{\partial \Omega}{\partial X} \frac{\partial \Omega}{\partial T}, \quad a_z = a \sin \omega = -\frac{1}{B_1} \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \frac{\partial \Omega}{\partial T},$$

где ω — угол между осью OX и направлением распространения возмущений в плоскости XZ , выражение для N в (2.4) принимает вид

$$N = \frac{\gamma - 1}{2} \int_0^\infty \frac{(G - U^2 - W^2)^2}{(a - U \cos \omega - W \sin \omega)^2} dY - \int_0^\infty (G - U^2 - W^2) dY.$$

Субхарактеристическая поверхность $\Omega(X, Z, T)$ определяется условием

$$N = 0. \quad (2.5)$$

В частном случае это условие приводит к выражениям, полученным в [18, 9, 11] соответственно для двумерных стационарных, трехмерных стационарных и двумерных нестационарных течений. Уравнение (2.5) определяет среднюю скорость распространения возмущений, если известны профили вектора скорости и энтальпии. Хотя формула (2.5) выведена при ряде предположений об условиях взаимодействия, можно показать, что она справедлива и для других режимов взаимодействия. Кроме того, данное выражение определяет и скорость распространения возмущений в турбулентных пограничных слоях.

Таким образом, если поверхность $\Omega(X, Z, T)$ существует, то она разделяет течение на области, в которых возмущения распространяются вверх по потоку (область докритического течения) и не распространяются (области закритического течения). Просматривается прямая аналогия рассматриваемых проблем с проблемами газовой динамики. Известно, что переход от сверхзвукового течения к дозвуковому может сопровождаться образованием скачка уплотнения. Формирование разрывных структур может происходить и при переходе от закритического течения к докритическому. Такой переход проанализирован для стационарных [16, 17, 19] и нестационарных двумерных течений [13].

Отметим, что общая субхарактеристическая поверхность для всех неизвестных функций $\Omega_1(X, Y, Z, T)$ может быть определена на основе анализа системы уравнений (2.1), (2.2), (2.5), записанной в виде $\|E\| \frac{\partial S}{\partial \Omega} = B$, где матрица $\|E\|$ и вектор S имеют вид

$$\|E\| = \begin{pmatrix} A_0 & 0 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & A_0 & 0 & 0 & A_2 \\ C_1 & C_2 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_0 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_4 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} U \\ W \\ V \\ G \\ P \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \frac{\partial \Omega}{\partial X}, \quad C_2 = \frac{\partial \Omega}{\partial Z}, \quad C_3 = \frac{\partial \Omega}{\partial Y}, \quad A_4 = N \left(\frac{\partial \Omega}{\partial X} + \frac{\partial \Omega}{\partial Z} \right).$$

Тогда субхарактеристическая поверхность определяется уравнением $\det \|E\| = 0$.

3. Результаты численного анализа. Для определения скорости распространения возмущений необходимо знать профили скоростей и энтальпии в пограничном слое. Если амплитуда нестационарных возмущений мала, а невозмущенное течение в пограничном слое стационарное, то для определения скорости распространения возмущений можно использовать (2.5), где профили вектора скорости и энтальпии могут быть найдены в результате решения стационарных дву- или трехмерных уравнений пограничного слоя. В общем случае такое решение можно получить численно.

Рассмотрим течения в дву- и трехмерном пограничных слоях для случаев, когда эти течения описываются автомодельными решениями. Примером таких течений служит обтекание плоской пластины бесконечного размаха с острой кромкой, расположенной под нулевым углом атаки к набегающему гиперзвуковому потоку вязкого теплопроводного газа, при условии, что распределение давления во внешнем невязком гиперзвуковом потоке задано и зависит только от продольной координаты X . Предполагается, что или пластина является полубесконечной в продольном направлении, или на задней кромке пластины конечной длины задано давление, соответствующее автомодельному решению. После введения переменных Дородницына — Лиза

$$\xi(X) = \int_0^X \rho_w \mu_w d\tilde{x}, \quad \eta(X, y_1) = \frac{i}{\sqrt{2\xi \cos \alpha}} \int_0^{y_1} \rho d\tilde{y},$$

$$f = \int_0^{\eta} u d\eta, \quad \varphi = \int_0^{\eta} w d\eta, \quad g = H \quad (3.1)$$

получаем автомодельную систему уравнений трехмерного пограничного слоя

$$f_{\eta\eta\eta} + f f_{\eta\eta} + \beta(g - f_{\eta}^2 \cos^2 \alpha - \varphi_{\eta}^2 \sin^2 \alpha) = 0, \quad (3.2)$$

$$\beta = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{n}{n + 1} \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \tilde{\varphi}_{\eta\eta} + f \tilde{\varphi}_{\eta} = 0,$$

где $\tilde{\varphi} = \varphi_{\eta}$; $g_{\eta\eta} + f g_{\eta} = 0$, с граничными условиями

$$\eta = 0: \quad f = f_w, \quad f_{\eta} = \tilde{\varphi} = 0, \quad g = g_w,$$

$$\eta = \infty: \quad f_{\eta} = \tilde{\varphi} = 1, \quad g = 1.$$

Здесь γ — показатель адиабаты; n — показатель степени в законе распределения давления $p = c_1 X^n$. В работе исследованы два вида течений, соответствующих индуцированному распределению давления ($n = -0,5$) и заданному во внешнем потоке неблагоприятному градиенту давления ($n > 0$). Система уравнений (3.2) записывалась в линеаризованном виде

$$f_k''' + f_{k-1} f_k'' + \beta(g_{k-1} - f_{k-1} f_k \cos^2 \alpha - \varphi_{k-1}^2 \sin^2 \alpha) = 0,$$

$$\tilde{\varphi}_{k-1}'' + f_{k-1} \tilde{\varphi}_{k-1}' = 0, \quad g_{k-1}'' + f_{k-1} g_{k-1}' = 0$$

(k — номер приближения) и аппроксимировалась разностной схемой второго порядка точности.

В случае $n = -0,5$ первое уравнение при заданных граничных условиях решалось методом 4-диагональной прогонки. Последние два уравнения имеют решения, записываемые в аналитическом виде:

$$\tilde{\varphi}_{k-1}(\eta) = I(\eta)/I(\infty),$$

$$\text{где } I(\eta) = \int_0^{\eta} \exp\left(-\int_0^{\tilde{\eta}} f_{k-1} d\tilde{\eta}\right) d\tilde{\eta}; \quad g_{k-1}(\eta) = g_w + (1 - g_w) \tilde{\varphi}_{k-1}(\eta).$$

В случае $n > 0$ область определения искомых функций разбивалась на два отрезка $[0, \eta^*]$ и $[\eta^*, \eta_{\infty}]$ (рис. 2) и общая задача распадалась на две задачи: нижнюю краевую задачу I с верхним граничным условием $f' = 0$ для функции f в точке η^* и верхнюю

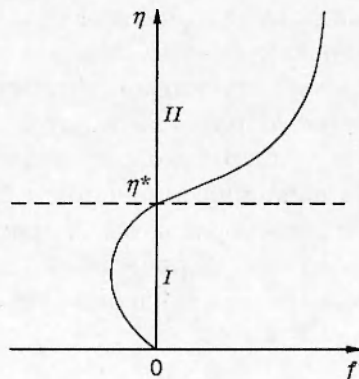


Рис. 2

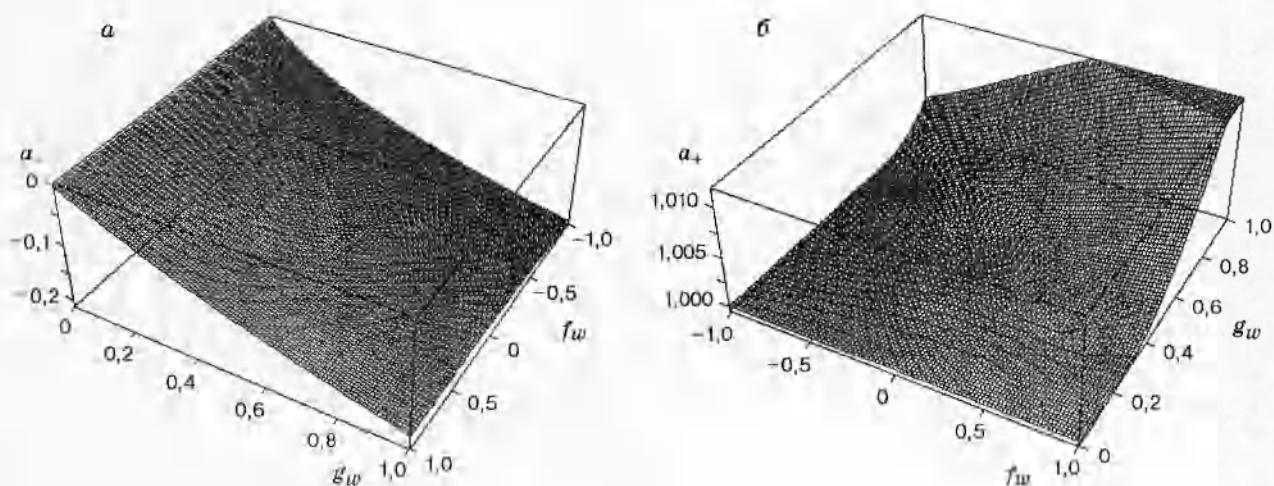


Рис. 3

краевую задачу II с нижним граничным условием $f' = 0$, $f = f_I(\eta^*)$ для функции f , где $f_I(\eta^*)$ — значение решения на отрезке I в точке η^* .

Далее определялась разность односторонних вторых производных в точке η^* : $\Delta = f''_I(\eta^*) - f''_{II}(\eta^*)$. С помощью какого-либо итерационного процесса (например, деления отрезка пополам) точка η^* подбиралась таким образом, чтобы минимизировать величину $|\Delta|$ с заданной точностью. Определенный описанным выше способом профиль скорости соответствует одной из ветвей решения — возвратному течению с $f''_{\infty} < 0$ [20].

После определения профилей скорости и энтальпии для нахождения скорости распространения возмущений использовалось соотношение (2.5), записанное для переменных (3.1)

$$\frac{\gamma - 1}{2} \int_0^{\infty} \frac{(G - U^2 - W^2)^2}{(a - U \cos \omega - W \sin \omega)^2} d\eta - \int_0^{\infty} (G - U^2 - W^2) d\eta = 0,$$

где $G = g$; $U = f_{\eta} \cos \alpha$; $W = \dot{\varphi} \sin \alpha$.

Ниже приведены результаты численного и теоретического анализа распространения возмущений при изменении характерных параметров задачи для дву- и трехмерных течений.

Двумерные течения. На рис. 3, а, б приведены графики скоростей распространения возмущений соответственно вверх (a_-) и вниз (a_+) по потоку в области изменения параметров $f_w \in [-1, 1]$ и $g_w \in [0, 1]$. Ненулевая величина функции тока на поверхности ($f_w \neq 0$) соответствует степенному распределению скорости отсоса или вдува. Увеличение скорости отсоса приводит к уменьшению скорости a_- , что связано с относительным уменьшением толщины области дозвукового течения в пограничном слое. Увеличение скорости вдува приводит к противоположной тенденции. Температурный фактор g_w равен отношению температуры поверхности к температуре торможения. Нагрев поверхности приводит к увеличению толщины пограничного слоя и соответствующему увеличению относительной толщины области дозвукового течения. В результате увеличивается скорость распространения возмущений вверх по потоку. Можно видеть, что при стремлении g_w к нулю скорость распространения возмущений вверх по потоку также стремится к нулю. Таким образом, при нулевой температуре поверхности возмущения не распространяются вверх по потоку. Аналогичный результат получен в [21–23], где исследованы собственные решения двумерной стационарной краевой задачи (1.5).

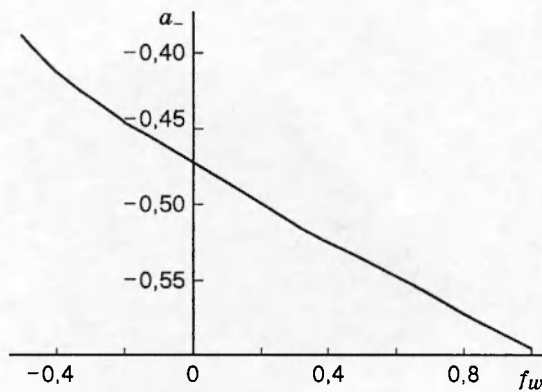


Рис. 4

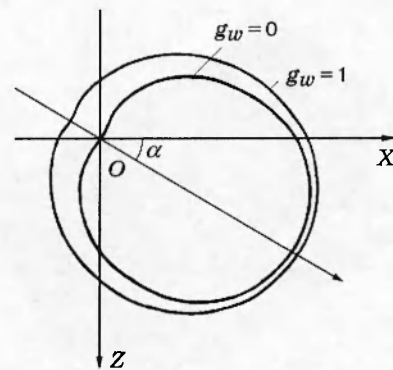


Рис. 5

Отрицательным значениям параметра β в системе уравнений (3.1) соответствует автомодельное решение для ламинарного пограничного слоя при росте давления во внешнем потоке. Как известно [20], решение задачи при этих условиях неединственно, причем одна из ветвей описывает течение с возвратными токами. Появление возвратных токов в пограничном слое обеспечивает дополнительный конвективный механизм распространения возмущений вверх по потоку. Существенно, что при этом меняются и характеристики распространения возмущений давления. Этот факт подтверждается результатами расчетов. На рис. 4 представлена зависимость скорости распространения возмущений вверх по потоку в гиперзвуковом пограничном слое a_- от параметра f_w для $g_w = 1$ при степенном распределении давления во внешнем потоке $p = c_1 X^{0,1}$ для ветви решения уравнений (3.1), соответствующей отрицательному поверхностному трению. Следует отметить, что появление области возвратных токов существенно увеличивает скорость распространения возмущений вверх по потоку.

Трехмерный пограничный слой. Автомодельное решение уравнений (3.1) описывает течение в пограничном слое на скользящем крыле бесконечного размаха. Это решение использовано для нахождения вектора $\mathbf{a} = (a_x, a_z)$ как функции температурного фактора g_w и угла скольжения α (угол между осью OX и направлением невозмущенного набегающего потока). На рис. 5 приведена диаграмма направленности скоростей распространения возмущений в ламинарном пограничном слое на скользящем крыле в режиме сильного гиперзвукового вязко-невязкого взаимодействия при $g_w = 0$, $\alpha = 30^\circ$ (качественно диаграмма подобна диаграмме для нулевого угла скольжения [12]).

4. Локальное сильное взаимодействие. В данной работе термин «сильное взаимодействие» соответствует такому режиму, при котором течение в пограничном слое вносит малые индуцированные возмущения во внешнее невязкое течение. В то же время предполагается, что индуцированные возмущения влияют на течение в пограничном слое уже в первом приближении. Режим сильного взаимодействия может быть глобальным (проявляться на всей длине тела) или локальным (проявляться на малых расстояниях по сравнению с характерной длиной). Режим локального сильного взаимодействия течения в пограничном слое с внешним гиперзвуковым потоком характеризуется предельными соотношениями $M_\infty \rightarrow \infty$, $M_\infty \tau_1 \rightarrow 0$, $\tau_1 = O((\rho_0 u_\infty l / \mu_0)^{-1/2})$. При этом влияние возмущений проявляется в короткой области, размеры которой превышают толщину пограничного слоя [17]. Рассмотрим течение около пластины (или поверхности клина) в предположении, что на конечном расстоянии от передней кромки на течение в пограничном слое

воздействует источник возмущений (например, переменное донное давление или скачок с переменной интенсивностью). Предполагается выполнение следующих предельных соотношений [19, 24]:

$$g_w \rightarrow 0, \quad \varepsilon_0 g_w^{2+\omega} M_\infty^{-1} = O(1), \quad \Delta p M_\infty g_w^{\omega/2} = O(1), \quad \varepsilon_0 = (\rho_0 u_\infty l / \mu_0)^{-1/2}, \quad (4.1)$$

где Δp — амплитуда возмущений и $\mu = C_\mu T^\omega$. Как показано в работах [19, 24], для данного режима взаимодействия может реализовываться трехслойная схема, аналогичная схеме, возникающей при сверхзвуковом взаимодействии [5, 6]. При этом возможно проявление новых эффектов, связанных с формированием суммарной толщины вытеснения. Так, при сильном охлаждении поверхности изменение толщины вытеснения пограничного слоя формируется не только в пристеночной, но и в основной области течения в пограничном слое, если выполнены условия (4.1). Если предположить, что течения во внешнем невязком потоке и основной части пограничного слоя двумерные, то краевая задача, описывающая течение в пристеночной области, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_0}{\partial T_0} + U_0 \frac{\partial U_0}{\partial X_0} + V_0 \frac{\partial U_0}{\partial Y_0} + W_0 \frac{\partial U_0}{\partial Z_0} + \frac{\partial P_0}{\partial X_0} &= \frac{\partial^2 U_0}{\partial Y_0^2}, \\ \frac{\partial W_0}{\partial T_0} + U_0 \frac{\partial W_0}{\partial X_0} + V_0 \frac{\partial W_0}{\partial Y_0} + W_0 \frac{\partial W_0}{\partial Z_0} + \frac{\partial P_0}{\partial Z_0} - \frac{\partial^2 W_0}{\partial Y_0^2}, & \quad \frac{\partial U_0}{\partial X_0} + \frac{\partial V_0}{\partial Y_0} + \frac{\partial W_0}{\partial Z_0} = 0, \\ Y_0 = 0, \quad U_0 = W_0 = 0, \quad Y_0 \rightarrow \infty, \quad U_0 = Y_0 + A + o(1), \quad W_0 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} X_0 &= (x-1)(a_0^5 g_w^{(2+\omega)/4} \varepsilon_0^{-3} M_\infty^3)^{1/4}, & Y_0 &= y(a_0^3 g_w^{-(2+\omega)/4} \varepsilon_0^{-5} M_\infty)^{1/4}, \\ Z_0 &= z(a_0^5 g_w^{(2+\omega)/4} \varepsilon_0^{-5} M_\infty^3)^{1/4}, & T_0 &= t(a_0^2 g_w^{(2+\omega)/2} \varepsilon_0^{-2} M_\infty^2)^{1/4}, \\ U_0 &= u(a_0 g_w^{-(2+\omega)/4} \varepsilon_0^{-1} M_\infty)^{1/4}, & P_0 &= \left(p - \frac{1}{\gamma M_\infty^2}\right)(a_0 g_w^\omega \varepsilon_0 M_\infty^{-1})^{-1/2}. \end{aligned}$$

После введения новых переменных $X_0, Y_0, Z_0, T_0 \rightarrow \Omega_0(X_0, Z_0, T_0), Y_0, Z_0, T_0$ и ряда преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_0}{\partial \Omega_0} &= \frac{P_0}{N_0}, & N_0 &= \frac{\partial \Omega_0}{\partial X_0} \left\{ L + \left[\left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial X_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial Z_0} \right)^2 \right] I_2 \right\}, \\ I_2 &= \int_0^\infty \left(\frac{\partial \Omega_0}{\partial T_0} + U_0 \frac{\partial \Omega_0}{\partial X_0} + W_0 \frac{\partial \Omega_0}{\partial Z_0} \right)^{-2} dY_0, \end{aligned}$$

где $L = (d\tau_1/dp) a_0^{5/4} g_w^{(2+\omega)/2} \varepsilon_0 M_\infty^{-1/4}$.

Условие $N_0 = 0$, определяющее субхарактеристическую поверхность, после введения компонент вектора скорости распространения возмущений $a_z = a \sin \omega$, $a_x = a \cos \omega$ принимает вид

$$L + \int_0^\infty \frac{dY_0}{(a - U_0 \cos \omega - W_0 \sin \omega)^2} = 0. \quad (4.2)$$

Таким образом, если известно решение стационарной задачи, описывающей трехмерное возмущенное течение в пристеночной области, то с помощью формулы (4.2) можно определить скорость распространения возмущений в условиях локального сильного гиперзвукового взаимодействия.

Выводы. Роль эффектов распространения возмущений важна в задачах восприимчивости и устойчивости (обычно они не принимаются во внимание). Возмущения давления могут приводить к изменению характеристик исходного пограничного слоя. Кроме того, в принципе возможны условия, при которых будет происходить взаимодействие волн, распространяющихся вверх и вниз по потоку. Следует подчеркнуть, что в дозвуковых течениях указанные эффекты незначительны. Это, по-видимому, связано с тем, что гиперзвуковой пограничный слой действует как волновод, в котором амплитуда возмущений, распространяющихся вверх по потоку, затухает гораздо слабее, чем в сверхзвуковых и дозвуковых пограничных слоях. Важную роль в процессах развития возмущений играет дозвуковой подслой вблизи поверхности, в котором собственно и распространяются возмущения. Полученные результаты показывают, что при численном моделировании гиперзвуковых течений вязкого газа важно правильно воспроизводить течение не только собственно в пограничном слое, но и в дозвуковом подслое. Неучет эффектов распространения возмущений может приводить к качественно неправильным результатам, вычислительной неустойчивости и т. д.

Кроме того, при развитии возмущений достаточной большой амплитуды возможно формирование «скачка», разделяющего области закритического и докритического течений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wang K. C. On the determination of the zones of influence and dependence for three-dimensional boundary layer equations // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 48. P. 397–404.
2. Wang K. C. Aspects of multitime initial-value problem originating from boundary layer equations // *Phys. Fluids.* 1975. V. 18, N 8. P. 951–955.
3. Войткова Г. В., Лунев В. В. О разрывных решениях уравнений пограничного слоя с положительным градиентом давления // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1991. № 5. С. 53–62.
4. Lighthill M. J. On boundary layers and upstream influence. Pt 2. Supersonic flows without separation // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1953. V. 217, N 1131. P. 478–507.
5. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1969. № 4. С. 53–57.
6. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1969. V. 312, N 1509. P. 181–206.
7. Нейланд В. Я. Распространение возмущений вверх по течению при взаимодействии гиперзвукового потока с пограничным слоем // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа.* 1970. № 4. С. 40–49.
8. Mikhailov V. V., Neiland V. Y., Sychev V. V. The theory of viscous hypersonic flow // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 1971. V. 3. P. 371–396.
9. Нейланд В. Я. К теории взаимодействия с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений. Ч. 1. Пространственные течения // *Учен. зап. ЦАГИ.* 1974. Т. 5, № 2. С. 70–79.
10. Crocco L. Considerations on the shock-boundary layer interactions // *Proc. Conf. High-Speed Aeron.* Brooklyn: Polytechn. Inst. Brooklyn, 1955. P. 75–112.
11. Липатов И. И. О распространении возмущений в сверхзвуковых пограничных слоях // *Прикл. математика и механика.* 1996. Т. 60, вып. 3. С. 457–464.
12. Lipatov I. I. Disturbances propagation in supersonic boundary layers // *IUTAM Symp. on Nonlinear Instability and Transition in Three-Dimensional Boundary Layers: Proc. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.*, 1996. P. 369–378.

13. Lipatov I. I. Internal Shock Formation in the Laminar Boundary Layer Due to Supercritical Subcritical Transition. N. Y., 1995. (Paper / AIAA; N 95-2217).
14. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений газа. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
15. Chapman D. R., Kuehn D., Larson H. Investigation of Separated Flows with Emphasis on the Effect of Transition. N. Y., 1958. (Rep. / NASA; N 1356).
16. Коваленко А. А., Липатов И. И. Гиперзвуковое обтекание пластины конечной длины // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991. № 5. С. 66–73.
17. Коваленко А. А., Липатов И. И. Исследование перехода от закритического к докритическому режиму вязко-невязкого взаимодействия в следе за пластиной // ПМТФ. 1991. № 3. С. 72–78.
18. Pearson H., Holliday J. B., Smith S. F. A theory of the cylindrical ejector propelling nozzle // J. Roy. Aeron. Soc. 1958. V. 62, N 574. P. 746–751.
19. Нейланд В. Я. Особенности взаимодействия и отрыва трансзвукового пограничного слоя // Учен. зап. ЦАГИ. 1987. Т. 18, № 2. С. 30–45.
20. Stewartson K. Further solution of the falkner-skam equation // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1954. V. 50. P. 454–465.
21. Нейланд В. Я. Некоторые задачи асимптотической теории сверхзвуковых течений вязкого газа // Тр. ЦАГИ. 1977. № 1529. С. 1–125.
22. Коваленко А. А. Исследование отрыва пограничного слоя при сильном взаимодействии с гиперзвуковым потоком // Учен. зап. ЦАГИ. 1974. Т. 5, № 6. С. 39–47.
23. Brown S., Stewartson K. A non-uniqueness of the hypersonic boundary layer // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1975. V. 28. P. 75–90.
24. Brown S. N., Cheng H. K., Lee C. J. Inviscid-viscous interaction on triple deck scales in a hypersonic flow with strong wall cooling // J. Fluid Mech. 1990. V. 220. P. 309–337.

*Поступила в редакцию 19/III 1997 г.,
в окончательном варианте — 24/VI 1997 г.*
