

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

O. Ya. Viro, Real plane algebraic curves: constructions with controlled topology,  
*Algebra i Analiz*, 1989, Volume 1, Issue 5, 1–73

<https://www.mathnet.ru/eng/aa41>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 17, 2025, 12:21:35



О. Я. Виро

## ПЛОСКИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИВЫЕ: ПОСТРОЕНИЯ С КОНТРОЛИРУЕМОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Обзор топологии вещественных плоских алгебраических кривых, в котором центральная тема — конструктивный аспект этой теории, т. е. проблемы построения кривых заданной степени с предписанным расположением компонент. Значительное место занимает вводная часть, содержащая постановку основных задач и рассказ о начальном этапе развития предмета, что делает изложение практически замкнутым. Подробно излагается техника возмущения особых кривых с контролируемым изменением топологии. В следующем номере предполагается опубликование окончания обзора.

### ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Предварительный обзор .....	2
§ 1. Начало топологии плоских вещественных алгебраических кривых .....	2
§ 2. Запреты .....	22
Глава 2. Построения с участием кривых со сложными особенностями и их возмущений .....	27
§ 3. Возмущения кривых с полуквазиоднородными особенностями .....	27
§ 4. Распускания конкретных особенностей кривых .....	38
§ 5. Построение неособых кривых .....	61
Список литературы .....	72

Связь между алгебраическими свойствами уравнения с двумя переменными и геометрическими свойствами кривой, определяемой этим уравнением, — предмет, постоянно привлекающий внимание и усилия математиков со времен Декарта. Наиболее качественными и в то же время наиболее грубыми из геометрических свойств кривой являются ее топологические свойства. В их исследовании привлекают как несомненные значительность и фундаментальность предмета, так и то обстоятельство, что простота вопросов позволяет охватить более широкий круг объектов, чем при изучении более тонких свойств.

Ключевые слова: плоская вещественная алгебраическая кривая, 16-я проблема Гильберта, особенности плоских кривых, возмущение особой кривой.

В изучении топологии вещественных алгебраических кривых можно выделить два естественных направления: во-первых, поиск ограничений, налагаемых на топологию кривой ее алгебраической природой, и, во-вторых, доказательство существования кривых, удовлетворяющих этим ограничениям. В течение последних 18 лет топология вещественных алгебраических кривых развивалась особенно интенсивно, причем если в начале этого периода основные достижения относились к первому направлению, то в последние 10 лет значительный прогресс был связан и со вторым. Имеющиеся обзоры [2, 8, 12, 23, 25, 26, 43, 47] освещают главным образом первое, хотя в последних двух затрагивается и второе. Настоящая статья представляет собой попытку изложить основные понятия, методы и результаты, относящиеся ко второму направлению.

Запреты и конструкции (так условно называются результаты, относящиеся к первому и второму направлениям) невозможно рассматривать по отдельности. Это необходимые дополняющие друг друга средства ответа на один и тот же вопрос: какой может быть топология вещественной алгебраической кривой заданного класса? Поэтому и в настоящей статье значительное место отводится запретам, но по поводу их доказательств читатель, как правило, отсылается к имеющимся обзорам и оригинальным статьям. Автор не удержался, однако, от соблазна писать *ab ovo*, и статью можно, по-видимому, читать, и не обращаясь к другим сочинениям по вещественной алгебраической геометрии. Во всяком случае, все, что относится к центральной теме — технике, которая позволяет конструировать одно за другим уравнения, следя за топологией кривых, задаваемых ими, — излагается со всеми деталями. Опыт общения со специалистами, работающими в других областях математики, показывает, что эта техника бывает полезной далеко за пределами топологии вещественных алгебраических кривых.

Главными объектами в этой статье являются кривые. Только в тех ситуациях, когда размерность несущественна, рассматриваются многообразия произвольной размерности. Ограниченность объема не позволила рассмотреть здесь явления, специфические для многообразий старших размерностей. Кое-что об этом можно узнать из обзоров Д.А. Гудкова [12] и В.М. Харламова [25] и из работ автора [4, 5, 8].

## Глава 1

### ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЙ ОБЗОР

#### § 1. Начало топологии плоских вещественных алгебраических кривых

**1.1. Первые определения и проблемы.** Кривая — по крайней мере алгебраическая кривая — есть нечто большее, чем просто множество принадлежащих ей точек. Имеется много правильных способов ввести алгебраические кривые. В элементарной ситуации вещественных плоских проективных кривых самым простым и удобным оказывается следующий способ, который, на первый взгляд, кажется чересчур алгебраичным.

*Вещественная плоская проективная алгебраическая кривая степени  $m^1$  есть однородный вещественный многочлен степени  $m$  от трех переменных, рассматриваемый с точностью до постоянного множителя. Если  $a$  — такой многочлен,*

<sup>1</sup> Столь длинный титул, конечно, употребляется только в торжественных случаях. Обычно он редуцируется. В контексте, исключающем недоразумения, от него остается лишь слово *кривая*.

то уравнение  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$  определяет в вещественной проективной плоскости  $\mathbf{RP}^2$  множество вещественных точек кривой. Множество вещественных точек кривой  $A$  обозначается через  $\mathbf{RA}$ . Следуя традиции, будем его тоже называть кривой, избегая делать это лишь в случаях, когда возможны недоразумения.

Точка  $(x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbf{RP}^2$  называется (вещественной) *особой точкой* кривой  $A$ , если  $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbf{R}^3$  есть критическая точка многочлена  $a$ , определяющего эту кривую. Кривая  $A$  называется (*вещественно*) *неособой*, если она не имеет вещественных особых точек. Множество вещественных точек неособой вещественной плоской проективной кривой является гладким замкнутым одномерным подмногообразием проективной плоскости.

В топологии неособых вещественных плоских проективных алгебраических кривых, как и в других областях такого рода, в качестве первых естественных проблем возникают классификационные проблемы.

**1.1.A.** Проблема топологической классификации: *каким с точностью до гомеоморфизма может быть множество вещественных точек неособой плоской проективной вещественной алгебраической кривой степени  $m$ ?*

**1.1.B.** Проблема изотопической классификации: *какой с точностью до гомеоморфизма может быть пара  $(\mathbf{RP}^2, \mathbf{RA})$ , где  $A$  — неособая вещественная плоская проективная алгебраическая кривая степени  $m$ ?*

Как известно, компоненты замкнутого одномерного многообразия гомеоморфны окружности и его топологический тип определяется числом компонент, так что первая проблема сводится к вопросу о количестве компонент кривой степени  $m$ . Ответ на него был найден Харнаком [35] в 1876 г. и излагается ниже в п. 1.6 и 1.8.

Смысл второй проблемы более наивно можно выразить вопросом, как неособая кривая степени  $m$  может располагаться в  $\mathbf{RP}^2$ . Здесь речь идет действительно об изотопической классификации, поскольку всякий гомеоморфизм  $\mathbf{RP}^2 \rightarrow \mathbf{RP}^2$  изотопен тождественному. К настоящему времени вторая проблема решена лишь для  $m \leq 7$ . Для  $m \leq 5$  ее решение вполне элементарно, было известно еще в прошлом веке и также излагается в этом параграфе. Однако прежде чем приступать к изложению этих исторически первых достижений топологии вещественных алгебраических кривых, напомним изотопическую классификацию замкнутых одномерных подмногообразий проективной плоскости.

**1.2. Отступление: топология замкнутых одномерных подмногообразий проективной плоскости.** Замкнутые одномерные подмногообразия проективной плоскости будем для краткости называть *плоскими топологическими кривыми*, а где исключены сомнения, — просто кривыми.

Связная кривая может располагаться в  $\mathbf{RP}^2$  двумя топологически различными способами: *двусторонне*, как граница вложенного в  $\mathbf{RP}^2$  круга, и *односторонне*, как проективная прямая. Двусторонние связные кривые называются *овалами*. Дополнение овала в  $\mathbf{RP}^2$  состоит из двух компонент, одна из которых гомеоморфна кругу, другая — ленте Мебиуса; первая называется *внутренней*, вторая — *внешней*. Дополнение связной односторонней кривой гомеоморфно кругу.

Любые две односторонние связные кривые пересекаются, поскольку каждая из них реализует ненулевой элемент группы  $H_1(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2)$ , обладающий ненулевым самопересечением. Поэтому плоская топологическая кривая имеет не более одной односторонней компоненты. Ее наличие можно выразить в гомологических терминах: она есть тогда и только тогда, когда кривая реализует ненулевой элемент группы  $H_1(\mathbf{RP}^2; \mathbf{Z}_2)$ . Если она есть, то вся кривая называется *односторонней*, а если нет, то *двусторонней*.

Два непересекающихся овала могут располагаться двумя топологически различными способами: они могут лежать вне друг друга — это значит, что каждый

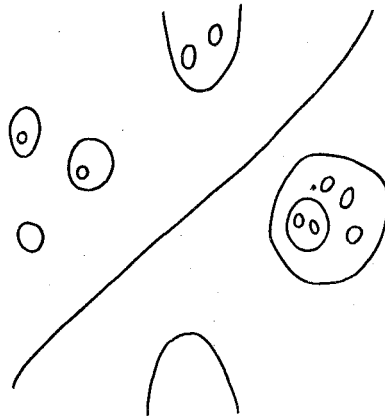


Рис. 1.

из них лежит во внешней компоненте дополнения другого, и могут образовывать *инъективную пару* — это значит, что один из них лежит во внутренней компоненте дополнения другого, тогда первый называется *внутренним* овалом этой пары, а второй — *внешним*. О втором овале говорят, что он *охватывает* первый.

Совокупность  $h$  овалов кривой, любые два из которых образуют инъективную пару, называется *гнездом глубины  $h$* .

Пара  $(\mathbb{R}P^2, X)$ , где  $X$  — плоская топологическая кривая, определяется с точностью до гомеоморфизма наличием у  $X$  односторонней компоненты и схемой парного взаимного расположения овалов. Для ее описания применяется следующая система обозначений. Кривая, состоящая из одного овала, кодируется символом  $\langle 1 \rangle$ . Пустая кривая — символом  $\langle 0 \rangle$ . Связная односторонняя кривая — символом  $\langle J \rangle$ . Если символом  $\langle A \rangle$  кодируется некоторая двусторонняя кривая, то кривая, получающаяся из нее добавлением нового овала, охватывающего все старые, кодируется символом  $\langle 1 \langle A \rangle \rangle$ . Кривая, представляющаяся в виде объединения двух непересекающихся кривых, которые кодируются символами  $\langle A \rangle$  и  $\langle B \rangle$  и таковы, что ни один овал одной из них не охватывается овалом другой, кодируется символом  $\langle A \parallel B \rangle$ . Кроме того, допускаются два сокращения: во-первых, если  $\langle A \rangle$  — код некоторой кривой, то фрагмент другого кода, имеющий вид  $A \parallel \dots \parallel A$ , где  $A$  повторяется  $n$  раз, сокращается через  $n \times A$ , и, во-вторых, фрагменты кода, имеющие вид  $n \times 1$ , сокращенно обозначаются через  $n$ .

Для изображения плоской топологической кривой обычно пользуются представлением проективной плоскости либо в виде круга с отождествленными диаметрально противоположными точками граничной окружности, либо в виде компактификации плоскости  $\mathbb{R}^2$ , т. е. изображают прообраз кривой либо при проекции  $D^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ , либо при включении  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ . В настоящей статье применяется второй способ. Например, на рис. 1 изображена кривая со схемой  $\langle J \parallel 1 \parallel 2 \langle 1 \rangle \parallel 1 \parallel \langle 2 \rangle \parallel 1 \langle 3 \parallel 1 \langle 2 \rangle \rangle \rangle$ .

**1.3. Запреты Безу и неравенство Харнака.** По-видимому, наиболее элементарными запретами являются топологические следствия теоремы Безу. Во всяком случае, эти запреты были обнаружены раньше других.

**1.3.A. Теорема Безу** (см., например, [24, 30]) Если  $A_1, A_2$  — неособые кривые степеней  $m_1, m_2$  и множество  $RA_1 \cap RA_2$  конечно, то оно содержит не более  $m_1 m_2$  точек. Если, кроме того,  $RA_1, RA_2$  трансверсальны друг другу, то число точек пересечения  $RA_1 \cap RA_2$  сравнимо с  $m_1 m_2$  по модулю 2.

**1.3.Б.** Следствие 1. *Неособая плоская кривая степени  $t$  является одно-сторонней тогда и только тогда, когда  $t$  нечетно. В частности, кривая нечетной степени пуста.*

Действительно, для того чтобы неособая плоская кривая была двусторонней, т. е. гомотопичной нулю mod 2, необходимо и достаточно, чтобы индекс ее пересечения с проективной прямой mod 2 был равен нулю, что в силу теоремы Безу равносильно четности степени. ●

**1.3.В.** Следствие 2. *Число овалов, входящих в объединение двух гнезд неособой плоской кривой степени  $t$ , не превосходит  $t/2$ . В частности, глубина гнезда кривой степени  $t$  не превосходит  $t/2$ , и если кривая степени  $t$  имеет гнездо глубины  $[t/2]$ , то она не может иметь овалов, не входящих в это гнездо.*

Для доказательства следствия 2 достаточно применить теорему Безу к рассматриваемой кривой и прямой, пересекающей самые внутренние овалы гнезд. ●

**1.3.Г.** Следствие 3. *Совокупность овалов, содержащаяся в объединении  $\leq 5$  гнезд неособой плоской кривой степени  $t$  и не содержащая овала, который охватывал бы все остальные овалы этой совокупности, состоит не более чем из  $t$  овалов.*

Для доказательства следствия 3 достаточно применить теорему Безу к рассматриваемой кривой и конике, пересекающей самые внутренние овалы гнезд. ●

Можно указать и формулировки, в доказательстве которых вместо прямых и коник участвуют кривые больших степеней (см. п. 2.5). Наиболее важная из них — неравенство Харнака.

**1.3.Д.** Следствие 4. *Неравенство Харнака [35]. Число компонент неособой плоской кривой степени  $t$  не превосходит  $(t^2 - 3t + 4)/2$ .*

Вывод неравенства Харнака из теоремы Безу см. в [35], а также в [12]. Имеются, впрочем, и не связанные с теоремой Безу доказательства; см., например, [12, 47].

**1.4.** *Кривые степени  $\leq 5$ .* При  $t \leq 5$  запретам предыдущего пункта, как легко видеть, удовлетворяют только следующие изотопические типы.

Таблица 1

$t$	Изотопические типы неособых плоских кривых степени $t$
1	$\langle J \rangle$
2	$\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle$
3	$\langle J \rangle, \langle J \cup 1 \rangle$
4	$\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle$
5	$\langle J \rangle, \langle J \cup 1 \rangle, \langle J \cup 2 \rangle, \langle J \cup 1 \langle 1 \rangle \rangle, \langle J \cup 3 \rangle, \langle J \cup 5 \rangle, \langle J \cup 6 \rangle$

При  $t \leq 3$  отсутствие других типов вытекает из 1.3.Б и 1.3.В, при  $t = 4$  — из 1.3.Б, 1.3.В и 1.3.Г или из 1.3.Б, 1.3.В и 1.3.Д и при  $t = 5$  — из 1.3.Б, 1.3.В и 1.3.Д. Оказывается, все возможности, перечисленные в табл. 1, реализуются, так что имеет место следующая теорема.

**1.4.А.** *Изотопическая классификация неособых плоских кривых степени  $\leq 5$ . Класс изотопных плоских топологических кривых содержит неособую кривую степени  $\leq 5$ , если и только если он указан в  $t$ -й строке табл. 1.*

Кривые степени  $\leq 2$  общеизвестны. Оба изотопических типа неособых кривых степени 3 реализуются кривыми, получающимися в результате малых возмущений объединения прямой и коники, пересекающихся в двух вещественных

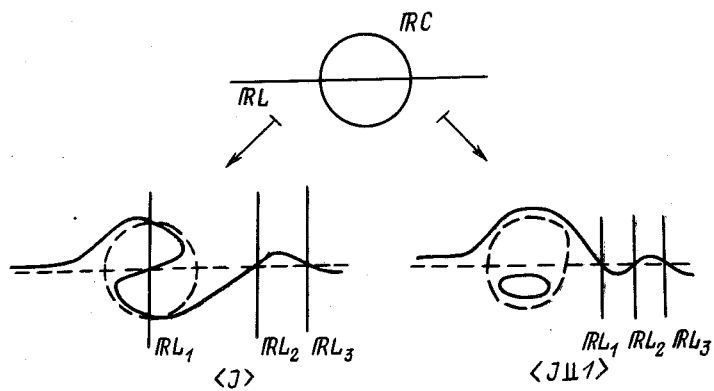


Рис. 2.

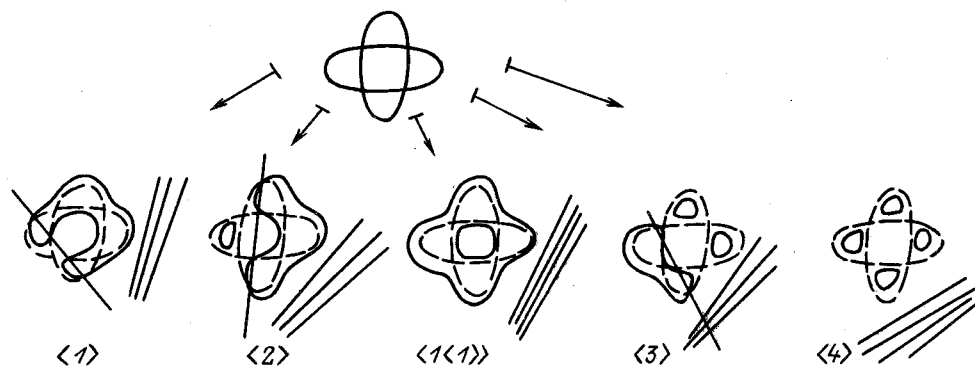


Рис. 3.

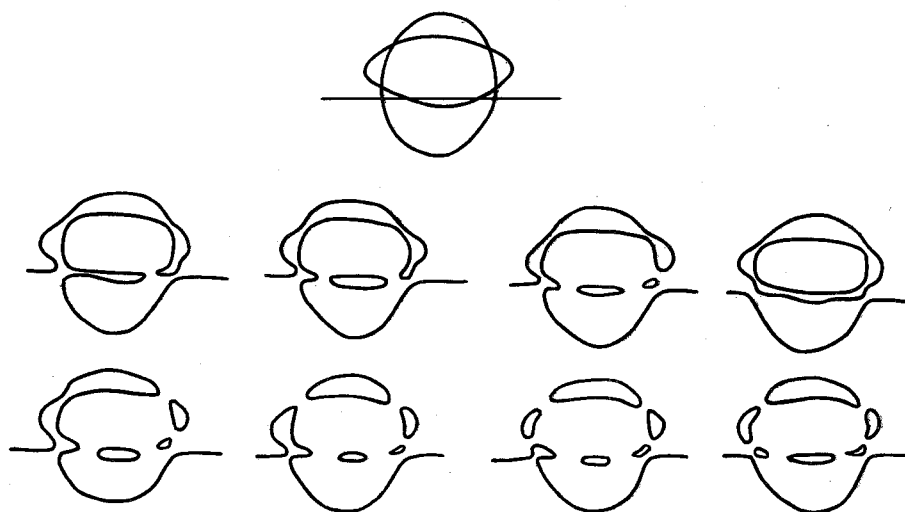


Рис. 4.

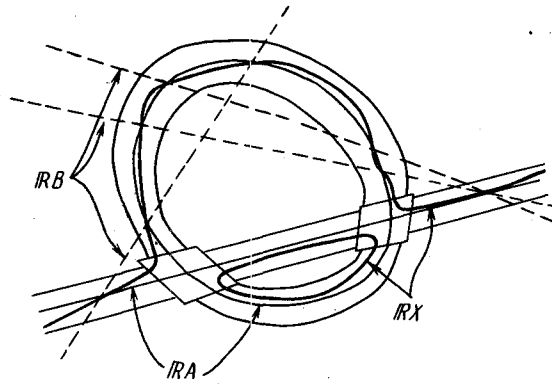


Рис. 5.

точках (рис. 2). Для построения этих возмущений нужно правую часть уравнения  $cl=0$ , задающего объединение коники  $C$  и прямой  $L$ , заменить многочленом  $cl + \epsilon l_1 l_2 l_3$ , где  $l_i = 0$  с  $i=1, 2, 3$  — уравнения прямых, показанных на рис. 2, а  $\epsilon$  — некоторое отличное от нуля достаточно малое по абсолютной величине вещественное число.

Доказательство того, что в результате действительно получаются кривые, изображенные на рис. 2, читатель либо легко найдет сам, либо извлечет из теоремы следующего пункта.

Изотопические типы непустых неособых кривых степени 4 реализуются аналогичными малыми возмущениями объединения двух коник, пересекающихся в четырех вещественных точках (рис. 3). Пустая кривая степени 4 задается, например, уравнением  $x_0^4 + x_1^4 + x_2^4 = 0$ .

Все изотопические типы неособых кривых степени 5 реализуются аналогичными малыми возмущениями объединения двух коник и прямой, изображенных на рис. 4. ●

Для изотопической классификации неособых кривых степени 6 уже недостаточно ни конструкций этого типа, ни запретов, изложенных в предыдущем пункте. См. п. 1.13 и 5.1.

**1.5. Классический способ построения неособых плоских кривых.** Все классические конструкции топологии неособых плоских кривых основаны на одной конструкции, которую я буду называть *классическим малым возмущением*. Ее специальные случаи появились в предыдущем пункте. Здесь я детально опишу условия ее применения и результат.

Вещественная особая точка  $\xi = (\xi_0 : \xi_1 : \xi_2)$  кривой  $A$  называется *точкой трансверсального пересечения двух вещественных ветвей* или, коротко, *крестом*,<sup>2</sup> если в точке  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$  матрица вторых частных многочлена  $a$ , задающего кривую, имеет и положительное и отрицательное собственные числа, или, что то же, если точка  $\xi$  является невырожденной критической точкой индекса 1 функций  $\{x \in \mathbb{R}P^2 \mid x_i \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a(x)/x_i$  для  $i$  с  $\xi_i \neq 0$ . В силу леммы Морса кривая в окрестности такой точки устроена как объединение двух вещественных прямых. Наоборот, если  $RA_1, \dots, RA_k$  — неособые трансверсальные друг другу кривые, никакие три из которых не проходят через одну точку, то все особые точки объединения  $RA_1 \cup \dots \cup RA_k$  (а это в точности все точки попарных пересечений) являются крестами.

<sup>2</sup> Употребляются и другие названия. Например, узел, точка типа  $A_1$  с двумя вещественными ветвями и неугнетенная невырожденная двойная точка.



**1.5.A. Теорема о классическом малом возмущении.** См. рис.5. Пусть  $A$  – плоская кривая степени  $t$ , все особые точки которой являются крестами, и  $B$  – плоская кривая степени  $t$ , не проходящая через особые точки кривой  $A$ . Пусть  $U$  – регулярная окрестность кривой  $RA$  в  $RP^2$ , представляющаяся в виде объединения окрестности  $U_0$  множества особых точек кривой  $A$  и трубчатой окрестности  $U_1$  подмногообразия  $RA \setminus U_0$  в  $RP^2 \setminus U_0$ .

Тогда существует такая неособая плоская кривая  $X$  степени  $t$ , что:

- (1)  $RX \subset U$ ;
- (2) для каждой компоненты  $V$  окрестности  $U_0$  существует такой гомеоморфизм  $h: V \rightarrow D^1 \times D^1$ , что  $h(RA \cap V) = D^1 \times 0 \cup 0 \times D^1$  и  $h(RX \cap V) = \{(x, y) \in D^1 \times D^1 \mid xy = \frac{1}{2}\}$ ;
- (3)  $RX \setminus U_0$  есть сечение трубчатого расслоения  $U_1 \rightarrow RA \setminus U_0$ ;
- (4)  $RX \subset \{(x_0 : x_1 : x_2) \in RP^2 \mid a(x_0, x_1, x_2)b(x_0, x_1, x_2) \leq 0\}$ , где  $a$  и  $b$  – многочлены, задающие кривые  $A$  и  $B$ ;
- (5)  $RX \cap RA = RX \cap RB = RA \cap RB$ ;
- (6) если  $p \in RA \cap RB$  есть неособая точка кривой  $B$  и в ней  $RB$  трансверсальна  $RA$ , то в ней и  $RX$  трансверсальна  $RA$ .

Существует такое  $\epsilon > 0$ , что для любого  $t \in (0, \epsilon]$  всем требованиям, предъявленным в этой формулировке к  $X$ , удовлетворяет кривая, задаваемая многочленом  $a + tb$ .

Как это следует из условий (1)–(3), при фиксированной кривой  $A$  изотопический тип кривой  $RX$  зависит от того, каким из двух возможных способов она ведет себя в окрестности каждого креста кривой  $A$ , а это определяется условием (4). Таким образом, условия (1)–(4) описывают изотопический тип кривой  $RX$ . Условия (4)–(6) характеризуют ее положение относительно  $RA$ .

Говорят, что кривые, задаваемые многочленами  $a + tb$  с  $t \in (0, \epsilon]$ , получаются малым возмущением кривой  $A$  посредством  $B$ . Впрочем, указание кривых  $A$  и  $B$  не определяет изотопического типа этих кривых: так как многочлены  $b$  и  $-b$  оба определяют кривую  $B$ , то малым возмущением кривой  $A$  посредством  $B$  получаются и кривые, задаваемые многочленами  $a - tb$  с малыми  $t$ , большими нуля. Они неизотопны кривым, задаваемым многочленами  $a + tb$  (по крайней мере в  $U$ ), если кривая  $A$  действительно имеет особенности.

Доказательство теоремы 1.5.A. Положим  $x_t = a + tb$ . Ясно, что для любого  $t \neq 0$  кривая  $X_t$ , задаваемая многочленом  $x_t$ , удовлетворяет условиям (5) и (6) и для любого  $t > 0$  – условию (4). Для малых  $|t|$ , очевидно,  $RX_t \subset U$ . Далее, для малых  $|t|$  кривая  $RX_t$  в точках пересечения  $RX_t \cap RB = RA \cap RB$  неособа ввиду того, что градиент многочлена  $x_t$  при малых  $|t|$  мало отличается от градиента многочлена  $a$ , а этот градиент в  $RA \cap RB$  отличен от нуля, поскольку, согласно условию, кривая  $B$  не проходит через особые точки кривой  $A$ . Вне  $RB$  кривая  $RX_t$  есть линия уровня функции  $a/b$ . Последняя на  $RA \setminus RB$  имеет критические точки только в особых точках кривой  $RA$ , и эти критические точки невырождены. Поэтому поведение кривой  $RX_t$  вне  $RB$  при малых  $t$  описывается теоремой о неявной функции и леммой Морса (см., например, [14]); в частности, при малых  $t \neq 0$  она неособа и удовлетворяет условиям (2) и (3). Следовательно, существует такое  $\epsilon > 0$ , что для любого  $t \in (0, \epsilon]$  кривая  $RX_t$  неособа и удовлетворяет условиям (1)–(6). ●

**1.6. Кривые Харнака.** Харнак [35] в 1876 г. не только доказал сформулированное в п.1.3 неравенство 1.3.Д, но и завершил топологическую классификацию неособых плоских кривых, доказав следующую теорему.

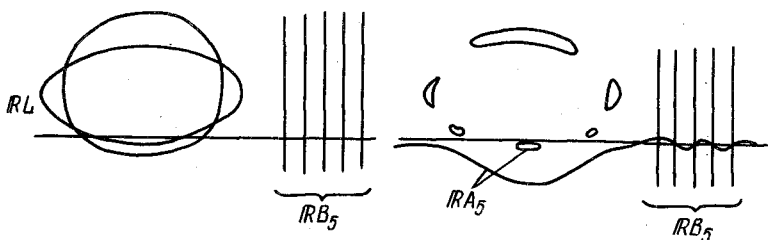


Рис. 6.

**1.6.A. Теорема Харнака.** Для любого натурального  $m$  и любого целого  $c$ , удовлетворяющего неравенствам

$$\frac{1 - (-1)^m}{2} \leq c \leq \frac{m^2 - 3m + 4}{2}, \quad (1)$$

существует неособая плоская кривая степени  $m$ , состоящая из  $c$  компонент.

Правое неравенство (1) есть неравенство Харнака. Левое неравенство (1) входит в следствие 1 теоремы Безу (см. 1.3.Б). Таким образом, вместе с 1.3.Б и 1.3.Д теорема Харнака действительно полностью описывает совокупность топологических типов неособых плоских кривых степени  $m$ , т. е. решает проблему 1.1.A.

Кривые с максимальным числом компонент (т. е. с  $(m^2 - 3m + 4)/2$  компонентами, где  $m$  — степень) называются  $M$ -кривыми. Кривые степени  $m$  с  $(m^2 - 3m + 4)/2 - a$  компонентами называются  $(M - a)$ -кривыми. Доказательство теоремы 1.6.A начнем с доказательства точности неравенства Харнака 1.3.Б.

**1.6.Б.** Для любого натурального  $m$  существует  $M$ -кривая степени  $m$ .

Доказательство. На самом деле будет строиться последовательность  $M$ -кривых. На каждом шаге построения к только что построенной  $M$ -кривой будет добавляться прямая, и объединение будет подвергаться малому возмущению. Начать построение можно с прямой или, как это сделал Харнак [35], с окружности, но, поскольку мы уже изучили кривые степени  $\leq 5$  и для этих степеней  $M$ -кривые уже построены (см. п.1.4), начнем с построенной в п.1.4  $M$ -кривой степени 5, чтобы сразу добраться до кривых, не встречающихся выше.

Напомним, что  $M$ -кривая степени 5 получается в результате малого возмущения объединения двух коник и прямой. Это возмущение могло быть выполнено посредством разных кривых. Для последующего существенно, чтобы вспомогательная кривая пересекала прямую  $L$ , входящую в возмущаемую кривую, в пяти точках, расположенных вне коник, которые входят в возмущаемую кривую. Пусть, например, в качестве вспомогательной кривой было выбрано объединение пяти прямых, удовлетворяющее этому условию (рис. 6). Обозначим это объединение через  $B_5$ , а полученную с его помощью  $M$ -кривую степени 5 — через  $A_5$ .

Построим теперь последовательность вспомогательных кривых  $B_m$  с  $m > 5$ . В качестве  $B_m$  возьмем объединение  $m$  прямых, которые пересекают  $L$  в  $m$  различных точках, расположенных в случае четного  $m$  в произвольной компоненте множества  $RL \setminus RB_{m-1}$ , а в случае нечетного  $m$  — в компоненте множества  $RL \setminus RB_{m-1}$ , содержащей  $RL \cap RB_{m-2}$ .

$M$ -кривую  $A_m$  степени  $m$  построим малым возмущением объединения  $A_{m-1} \cup L$  посредством  $B_m$ . Пусть  $M$ -кривая  $A_{m-1}$  степени  $m-1$  уже построена, и пусть  $RA_{m-1}$  трансверсально пересекается с  $RL$  в  $m-1$  точках пересечения  $RL \cap RB_{m-1}$ , лежащих на одной компоненте кривой  $RA_{m-1}$  в том же порядке,

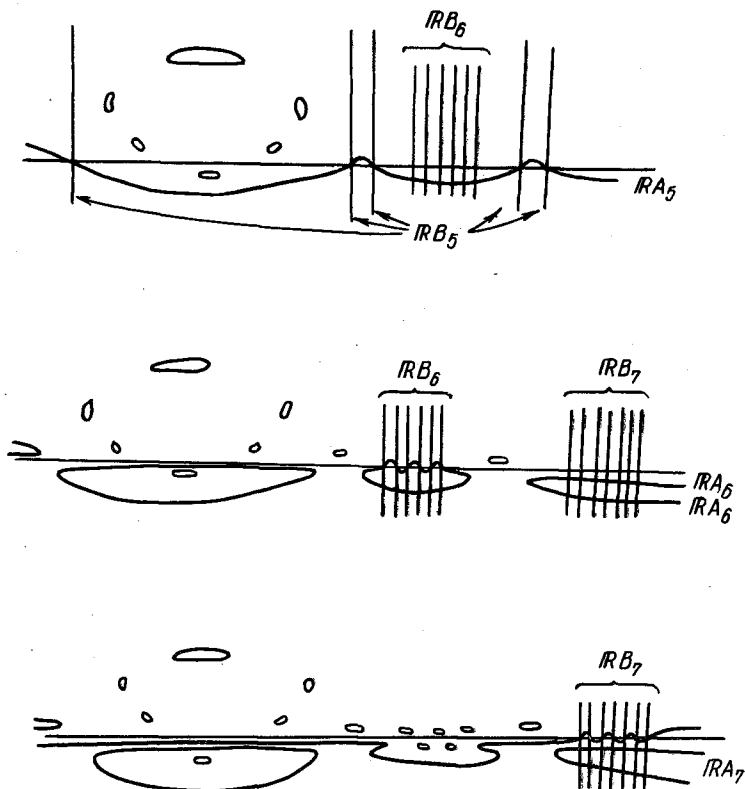


Рис. 7.

что и на  $RL$ . Нетрудно видеть, что при одном из двух возможных направлений малого возмущения кривой  $A_{m-1} \cup L$  посредством  $B_m$  прямая  $RL$  и пересекающая ее компонента кривой  $RA_{m-1}$  дают  $m-1$  компонент, а остальные компоненты кривой  $RA_{m-1}$ , число которых по предположению равно  $((m-1)^2 - 3(m-1) + 4)/2 - 1 = (m^2 - 5m + 6)/2$ , лишь немного деформируются, так что число компонент кривой  $RA_m$  оказывается равным  $(m^2 - 5m + 6)/2 + m - 1 = (m^2 - 3m + 4)/2$ . Таким образом, мы получили  $M$ -кривую степени  $m$ . Она трансверсальна  $RL$ , пересекается с  $RL$  по  $RL \cap RB_m$  (см. 1.5.A), и так как  $RL \cap RB_m$  содержится в одной компоненте множества  $RL \setminus RB_{m-1}$ , то точки пересечения полученной кривой с  $RL$  лежат на одной ее компоненте и в том же порядке, что и на  $RL$  (рис. 7). ●

Доказать точность левого неравенства (1), т. е. предъявить кривую с минимальным числом компонент, значительно проще. Такой кривой является, например, кривая, определяемая уравнением  $x_0^m + x_1^m + x_2^m = 0$ . Очевидно, она имеет пустое множество вещественных точек в случае четного  $m$ , а в случае нечетного  $m$  ее множество вещественных точек гомеоморфно  $RP^1$  — гомеоморфизмом на  $RP^1$  является, например, проектирование из точки  $(0 : 0 : 1)$ .

Если в построении  $M$ -кривых, которое было изложено в доказательстве теоремы 1.6.Б, вспомогательные кривые  $B_m$  выбирать по-другому, то получатся кривые с любым промежуточным числом компонент. Однако завершение доказательства теоремы 1.6.А, получающееся на этом пути, довольно канонично, хотя и не содержит новых идей. Обратимся поэтому к менее явному, но более концептуальному и простому доказательству, связанному с объектами и явлениями, не упоминавшимися выше.

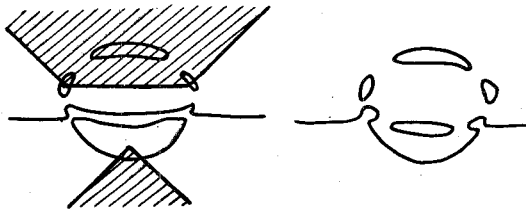


Рис. 8.

**1.7. Отступление: пространства вещественных плоских проективных кривых.** Множество всех вещественных плоских проективных алгебраических кривых степени  $m$  в силу определения этих кривых представляет собой вещественное проективное пространство размерности  $m(m+3)/2$ . Однородными координатами кривой в нем являются коэффициенты задающего ее многочлена. Это пространство обозначается символом  $RC_m$ . От стандартного пространства  $RP^{m(m+3)/2}$  оно отличается только необычной нумерацией однородных координат. Дело в том, что коэффициенты однородного многочлена от трех переменных имеют естественную двойную нумерацию показателями соответствующих мономов:

$$a(x_0, x_1, x_2) = \sum_{\substack{i, j \geq 0 \\ i+j < m}} a_{ij} x_0^{m-i-j} x_1^i x_2^j.$$

Множество, которое заполняют в  $RC_m$  вещественно неособые кривые, обозначим через  $RNC_m$ . Очевидно, оно открыто в  $RC_m$ . Более того, каждая неособая кривая степени  $m$  обладает в  $RNC_m$  окрестностью, состоящей из изотопных ей неособых кривых. Действительно, при малых изменениях коэффициентов многочлена, задающего неособую кривую, получаются многочлены, задающие гладкие сечения трубчатого расслоения исходной кривой. Это легко выводится из теоремы о неявной функции, ср. 1.5.А, условие (3).

Кривые, принадлежащие одной компоненте пространства  $RNC_m$  неособых кривых степени  $m$ , изотопны — это следует из изотопности близких неособых кривых. Путь в пространстве  $RNC_m$  определяет изотопию множества вещественных точек кривой в  $RP^2$ , составленную из множества вещественных точек кривых степени  $m$ . Такие изотопии называются *жесткими*. С ними естественно связана следующая классификационная проблема, столь же классическая, как и проблемы 1.1.А и 1.1.Б.

**1.7.А.** Проблема классификации относительно жестких изотопий: *расклассифицировать неособые кривые степени  $m$  с точностью до жестких изотопий, т. е. изучить разбиение пространства  $RNC_m$  неособых кривых степени  $m$  на компоненты.*

Для  $m \leq 2$  решение этой проблемы, как хорошо известно, совпадает с решением проблемы 1.1.Б. Из изотопности кривых следует жесткая изотопность и для степеней 3 и 4. Это было известно в прошлом веке, но здесь излагаться не будет, поскольку слабо связано с предметом настоящей работы. К настоящему времени проблема 1.7.А решена для  $m \leq 6$ .

Хотя этот параграф посвящен началам теории, не могу удержаться от более подробного упоминания об одном не столь уж давнем результате. Как обнаружил в 1978 г. В. А. Рохлин [23], для  $m \geq 5$  из изотопности неособых кривых степени  $m$  уже не следует их жесткая изотопность. Простейший пример показан на рис. 8. Это две кривые степени 5. Они получаются в результате малых возмущений все

той же кривой рис. 4, распадающейся на две коники и прямую. То, что эти кривые не являются жестко изотопными, становится ясно, если заметить, что у первой из них один овал лежит внутри треугольника, не пересекающегося с односторонней компонентой, вершины которого лежат внутри трех других овалов, у второй кривой такого овала нет, а при жесткой изотопии овал не может выйти из треугольника, так как при выходе оказалась бы нарушена теорема Безу.

Посмотрим теперь, какое множество составляют в  $\mathbf{RC}_m$  вещественно особые кривые.

Ясно, что кривая степени  $m$  имеет особенность в точке  $(1:0:0)$  тогда и только тогда, когда задающий ее многочлен имеет нулевые коэффициенты при  $x_0^m$ ,  $x_0^{m-1}x_1$ ,  $x_0^{m-1}x_2$ . Таким образом, множество вещественных плоских проективных кривых степени  $m$ , имеющих особенность в фиксированной точке, представляет собой проективное подпространство коразмерности 3 пространства  $\mathbf{RC}_m$ .

Рассмотрим теперь пространство  $S$  пар вида  $(p, C)$ , где  $p \in \mathbf{RP}^2$ ,  $C \in \mathbf{RC}_m$  и  $p$  — особая точка кривой  $C$ . Ясно, что  $S$  есть алгебраическое подмногообразие произведения  $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{RC}_m$ . Сужение на  $S$  проекции  $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{RC}_m \rightarrow \mathbf{RP}^2$  является локально тривиальным расслоением, слоем которого служит пространство кривых степени  $m$  с особенностью в соответствующей точке, т. е. проективное пространство размерности  $m(m+3)/2 - 3$ . Таким образом,  $S$  представляет собой гладкое многообразие размерности  $m(m+3)/2 - 1$ . Сужение  $S \rightarrow \mathbf{RC}_m$  проекции  $\mathbf{RP}^2 \times \mathbf{RC}_m \rightarrow \mathbf{RC}_m$  имеет в качестве образа в точности множество всех вещественно особых кривых степени  $m$ , т. е.  $\mathbf{RC}_m \setminus \mathbf{RNC}_m$ . Обозначим его через  $\mathbf{RSC}_m$ . Поскольку оно является образом многообразия размерности  $m(m+3)/2 - 1$  при гладком отображении, его размерность не превосходит  $m(m+3)/2 - 1$ . С другой стороны, его размерность не меньше  $m(m+3)/2 - 1$ , так как в противном случае оно, будучи подпространством коразмерности  $\leq 2$ , не разбивало бы пространства  $\mathbf{RC}_m$ , и все неособые кривые степени  $m$  были бы изотопны.

Рассуждения, аналогичные приведенному выше доказательству неравенства  $\dim \mathbf{RSC}_m \leq m(m+3)/2 - 1$ , позволяют показать, что размерности множества кривых, имеющих не менее двух особых точек, и множества кривых, имеющих особую точку, в которой матрица вторых производных многочлена, задающего кривую, имеет ранг  $\leq 1$ , не превосходят  $m(m+3)/2 - 2$ . Таким образом, в множестве  $\mathbf{RSC}_m$  открытое всюду плотное подмножество заполняют кривые с одной особой точкой, у которых эта особая точка является невырожденной двойной точкой (последнее означает, что в этой точке матрица вторых производных многочлена, задающего кривую, имеет ранг 2). Это подмножество называется *главной частью* множества  $\mathbf{RSC}_m$ . Оно является гладким подмногообразием коразмерности 1 многообразия  $\mathbf{RC}_m$ . Действительно, его прообраз при естественном отображении  $S \rightarrow \mathbf{RC}_m$  очевидно, есть открытое всюду плотное подмножество многообразия  $S$ , и сужение этого отображения на этот прообраз является, как легко проверить, взаимно однозначным погружением и, значит, гладким вложением.

Вещественные невырожденные двойные точки плоских кривых бывают двух типов. Вещественная невырожденная двойная точка  $(\xi_0 : \xi_1 : \xi_2)$  кривой  $A$  называется *уединенной*, если в точке  $(\xi_0, \xi_1, \xi_2)$  матрица вторых частных производных многочлена, задающего кривую  $A$ , имеет только неотрицательные или только неположительные собственные числа. Уединенная невырожденная двойная точка кривой  $A$  является изолированной точкой множества  $\mathbf{RA}$ . Вообще, условимся особые точки кривой  $A$ , являющиеся изолированными точками множества  $\mathbf{RA}$ , называть *уединенными* вещественными особыми точками. Другой тип вещественных невырожденных двойных точек — кресты; они рассматривались выше, в п. 1.5. В соответствии с этим делением вещественных невырожденных двойных

точек на уединенные точки и кресты главная часть множества вещественно особых кривых степени  $m$  разбивается на два открытых множества.

Если кривая степени  $m$ , двигаясь как точка пространства  $RC_m$  по дуге, трансверсально пересекает половину главной части множества вещественно особых кривых, состоящую из кривых с уединенной особой точкой, то множество вещественных точек этой кривой претерпевает морсовскую перестройку индекса 0 или 2 (т. е. либо у кривой появляется уединенная двойная точка, которая затем превращается в новый овал, либо один из овалов стягивается в точку (уединенную невырожденную двойную) и пропадает). При трансверсальном пересечении другой половины главной части множества вещественных особых кривых происходит морсовская перестройка индекса 1 (т. е. две дуги кривой подходят друг к другу, сливаются с появлением креста в точке слияния и тут же расходятся уже перестроенными, как это происходит с гиперболой в семействе аффинных кривых степени 2, задаваемых уравнениями  $xy = t$ , в момент  $t = 0$ ).

Прямая в пространстве  $RC_m$  называется (вещественным) пучком кривых степени  $m$ . Если  $a$  и  $b$  — многочлены, задающие две кривые пучка, то остальные кривые пучка задаются многочленами вида  $\lambda a + \mu b$  с  $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus 0$ .

В множестве всех вещественных пучков кривых степени  $m$  открытое всюду плотное подмножество составляют в силу теоремы трансверсальности пучки, пересекающие множество вещественно особых кривых только в точках его главной части и только трансверсально.

**1.8. Завершение доказательства теоремы 1.6.A.** Как было показано в п.1.6, для любого  $m$  существуют неособые кривые степени  $m$  с минимальным числом компонент, равным  $(1 - (-1)^m)/2$ , и с максимальным числом компонент, равным  $(m^2 - 3m + 4)/2$ . Неособые кривые, изотопные друг другу, составляют открытое множество в пространстве  $RC_m$  вещественных плоских проективных кривых степени  $m$ , см. п.1.7. Поэтому существует вещественный пучок кривых степени  $m$ , соединяющий некоторую кривую с минимальным числом компонент и некоторую кривую с максимальным числом компонент и пересекающий множество вещественно особых кривых только в его главной части и только трансверсально. При движении по этому пучку от кривой с минимальным числом компонент к кривой с максимальным числом компонент кривая претерпевает только морсовские перестройки; каждая из них изменяет число компонент кривой не более чем на 1. Следовательно, в этом пучке встретятся неособые кривые с любым промежуточным числом компонент. •

**1.9. Изотопические типы  $M$ -кривых Харнака.** Харнаковское построение  $M$ -кривых [35] отличалось от построения, описанного в доказательстве теоремы 1.6.B, тем, что в качестве исходной кривой Харнак использовал не кривую степени 5, а конику. На рис. 9 показаны  $M$ -кривые степеней  $\leq 5$ , которые получаются при построении Харнака [35]. Для степеней  $\geq 6$  построение Харнака дает  $M$ -кривые тех же изотопических типов, какие получаются при построении, описанном в п.1.6.

В зависимости от выбора вспомогательных кривых (точнее, в зависимости от взаимного расположения пересечений  $RB_m \cap RL$ ) при этих построениях получаются  $M$ -кривые разных изотопических типов. Напомню, что, для того чтобы получались  $M$ -кривые, необходимо, чтобы пересечение  $RB_m \cap RL$  состояло из  $m$  точек и лежало в одной компоненте множества  $RL \setminus RB_{m-1}$ , которая в случае нечетного  $m$  должна содержать  $RB_{m-2} \cap RL$ . Изотопический тип получающейся  $M$ -кривой степени  $m$  зависит, как легко видеть, только от выбора компонент множеств  $RL \setminus RB_r$  с четными  $r < m$ , в которых размещаются пересечения  $RL \cap RB_r$ . Если и при четных  $r$  брать компоненты, содержащие  $RL \cap RB_r$ ,

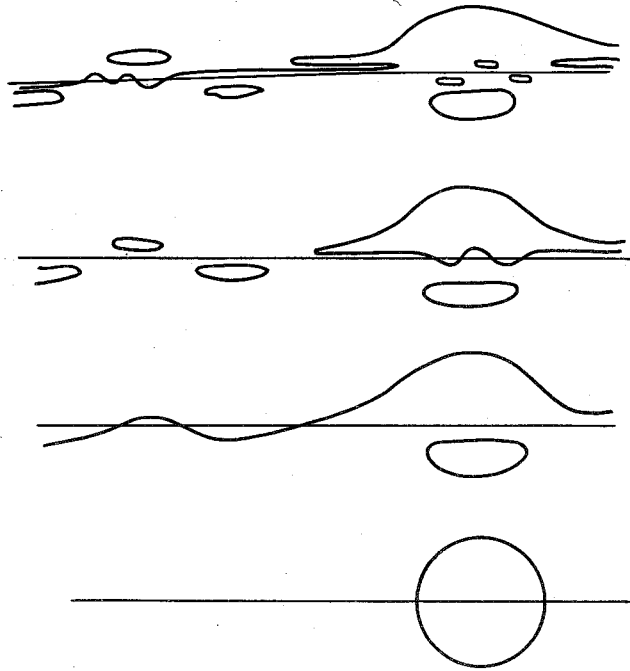


Рис. 9.

то  $M$ -кривая степени  $m$ , получаемая в результате построения, будет иметь изотопический тип  $\langle J \parallel (m^2 - 3m + 2)/2 \rangle$  при нечетных  $m$  и  $\langle (3m^2 - 6m)/8 \parallel \parallel 1 \langle (m^2 - 6m + 8)/8 \rangle \rangle$  при четных  $m$ . В табл. 2 перечислены изотопические типы  $M$ -кривых степеней  $\leq 10$ , которые получаются при построении Харнака со всевозможными  $B_m$ .

В заключение сформулирую два любопытных свойства  $M$ -кривых Харнака, которые читатель без труда докажет самостоятельно.

Таблица 2

$m$	Изотопические типы $M$ -кривых Харнака степени $m$			
2	(1)			
3	(J $\parallel$ 1)			
4	(4)			
5	(J $\parallel$ 6)			
6	(9 $\parallel$ 1(1))			
7	(J $\parallel$ 15)		(J $\parallel$ 13 $\parallel$ 1(1))	
8	(18 $\parallel$ 1(3))		(17 $\parallel$ 1(1) $\parallel$ 1(2))	
9	(J $\parallel$ 28)	(J $\parallel$ 24 $\parallel$ 1(3))	(J $\parallel$ 26 $\parallel$ 1(1))	(J $\parallel$ 23 $\parallel$ 1(1) $\parallel$ 1(2))
10	(30 $\parallel$ 1(6))	(29 $\parallel$ 2(3))	(29 $\parallel$ 1(1) $\parallel$ 1(5))	(28 $\parallel$ 1(1) $\parallel$ 1(2) $\parallel$ 1(3))

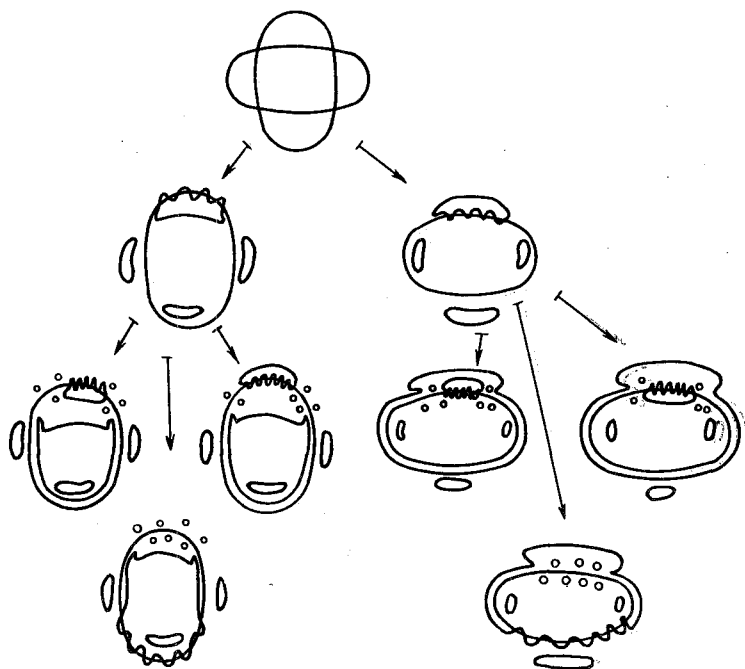


Рис. 10. Построение кривых четных степеней методом Гильберта. Степени 4 и 6.

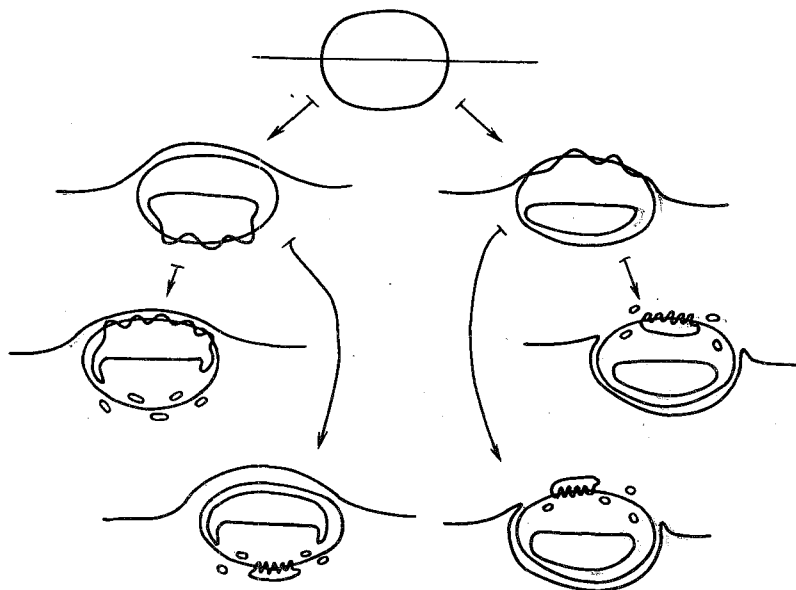
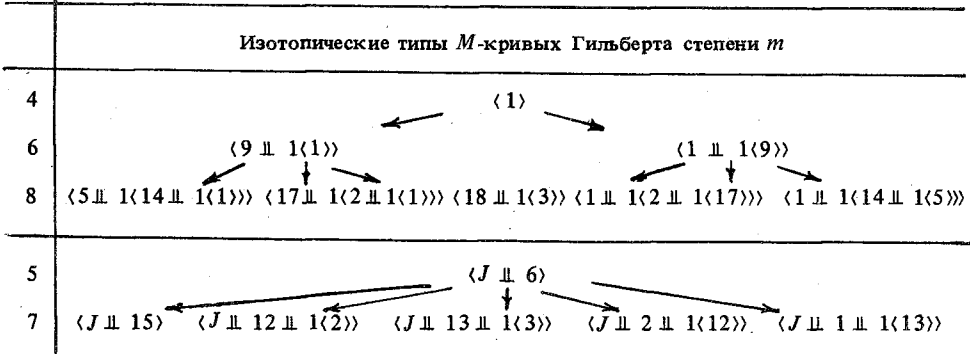


Рис. 11. Построение кривых четных степеней методом Гильберта. Степени 3 и 5.

1.9.А. Глубина гнезда  $M$ -кривой Харнака не превосходит 2.

1.9.Б. Любая  $M$ -кривая Харнака четной степени  $t$  имеет  $(3t^2 - 6t + 8)/8$  внешних овалов и  $(t^2 - 6t + 8)/8$  - внутренних.





**1.10. Кривые Гильберта.** В 1891 г. Гильберт [36], по-видимому, впервые отчетливо сформулировал проблему изотопической классификации неособых кривых. При этом он особо выделил случай  $M$ -кривых. Изотопические типы  $M$ -кривых Харнака, как мы видели, очень специальные. В частности, между свойством 1.9.A  $M$ -кривых Харнака и соответствующим запретом 1.3.B — огромный разрыв. Гильберт [36] показал, что этот разрыв объясняется особенностями конструкции, а не общим свойством  $M$ -кривых. Он предложил новый способ построения  $M$ -кривых, близкий к харнаковскому, но дающий  $M$ -кривые с гнездами любой глубины, разрешаемой теоремой 1.3.B. В этом способе роль, которую в построении Харнака играет прямая, исполняется неособой коникой, а в качестве исходной кривой используется прямая или коника. На рис. 10–11 показано построение  $M$ -кривых по методу Гильберта.

В табл. 3 перечислены изотопические типы  $M$ -кривых степени  $\leq 8$ , которые получаются при построении Гильберта.

**1.11. Анализ результатов построений. Работа Рэгсдейл.** В 1906 г. В. Рэгсдейл [44] сделала замечательную попытку угадать новые запреты, опираясь на результаты построений, произведенных методами Харнака и Гильберта. Она сосредоточила внимание на случае кривых четной степени, мотивируя это следующими отличительными их свойствами. Кривая четной степени, будучи двусторонней, разбивает  $RP^2$  на две части, общим краем которых она служит. Одна из этих частей содержит неориентируемую компоненту и обозначается через  $RP_-^2$ , другая, ориентируемая, обозначается через  $RP_+^2$ . Овалы кривой четной степени делятся на внешние и внутренние по отношению к  $RP_+^2$  (т. е. на ограничивающие компоненту множества  $RP_+^2$  снаружи и изнутри). Следуя Петровскому [42], внешние по отношению к  $RP_+^2$  овалы теперь называют *четными* (поскольку такой овал охватывается четным числом других овалов), а остальные — *нечетными*. Число четных овалов обозначается через  $p$ , число нечетных — через  $n$ . Эти числа содержат важнейшую информацию о топологии множеств  $RP_+^2$  и  $RP_-^2$ . Число компонент множества  $RP_+^2$  равно  $p$ , число компонент множества  $RP_-^2$  равно  $n + 1$ ; эйлеровы характеристики:  $\chi(RP_+^2) = p - n$ ,  $\chi(RP_-^2) = n - p + 1$ . Поэтому числам  $p$  и  $n$  следует уделить особое внимание. (Удивительно, но по существу именно эти соображения были высказаны в работе 1906 г.!)

Анализируя построения, В. Рэгсдейл [44] сделала следующие наблюдения.

**1.11.A (ср. 1.9.A и Б).** Для любой  $M$ -кривой Харнака четной степени  $m$

$$p = (3m^2 - 6m + 8)/8 \text{ и } n = (m^2 - 6m + 8)/8.$$

1.11.Б. Для любой  $M$ -кривой Гильберта четной степени  $m$

$$(m^2 - 6m + 16)/8 \leq p \leq (3m^2 - 6m + 8)/8,$$

$$(m^2 - 6m + 8)/8 \leq n \leq (3m^2 - 6m)/8.$$

Это дало ей основание высказать следующую гипотезу.

1.11.В. Гипотеза Рэгсдейл. Для любой кривой четной степени  $m$

$$p \leq (3m^2 - 6m + 8)/8 \text{ и } n \leq (3m^2 - 6m)/8.$$

К этой самой первой гипотезе общего характера топологии вещественных алгебраических кривых мы вернемся в § 5. Забегая вперед, скажу только, что был доказан ряд более слабых утверждений и были построены примеры, заставившие ослабить второе неравенство на 1; в этом ослабленном виде гипотеза Рэгсдейл до сих пор не доказана и не опровергнута.

Числа  $p$  и  $n$ , введенные Рэгсдейл, участвуют во многих найденных с тех пор запретах. Отдавая должное проницательности Рэгсдейл, теперь мы должны констатировать, что при более внимательном отношении к имевшемуся у нее экспериментальному материалу она могла бы нащупать некоторые из них. Например, сейчас неясно, что помешало ей сформулировать гипотезу, которую в конце шестидесятых годов сформулировал Д. А. Гудков [9] и с доказательства которой начался современный этап развития топологии вещественных алгебраических кривых.

1.12. Обобщение методов Харнака и Гильберта. Брюзотти. Виман. Отчасти работа Рэгсдейл [44] была вдохновлена ошибочной работой Халбрата, в которой доказывалось неверное утверждение, что  $M$ -кривая может быть получена при помощи классического малого возмущения (см. п.1.5) только из двух  $M$ -кривых, одна из которых должна быть степени  $\leq 2$ . Будь это утверждение верно, оно означало бы, что индуктивное построение  $M$ -кривых, основанное на классическом малом возмущении и начинающееся с кривых малых степеней, есть по существу построение методом Харнака или методом Гильберта.

В 1910–1917 гг. Л. Брюзотти показал, что это не так, и предложил отличные от способов Харнака и Гильберта индуктивные способы построения  $M$ -кривых, основанные на классическом малом возмущении.

Описанию построений Брюзотти придется предпослать несколько определений. Простая дуга  $X$  множества вещественных точек кривой  $A$  степени  $m$  называется базой ранга  $\rho$ , если существует кривая степени  $\rho$ , пересекающая эту дугу в  $\rho m$  (различных) точках. Ясно, что база ранга  $\rho$  является базой всех рангов, кратных  $\rho$  (пересекающие ее кривые соответствующих степеней можно получить, например, как объединения нескольких слегка пошевеленных кривых степени  $\rho$ ).

$M$ -кривая  $A$  называется порождающей, если она имеет непересекающиеся базы  $X$  и  $Y$  рангов, делящих удвоенную ее степень.  $M$ -кривая  $A_0$  степени  $m_0$  называется вспомогательной по отношению к порождающей кривой  $A$  степени  $m$  и ее базам  $X$  и  $Y$ , если выполнены следующие условия:

а) пересечение  $RA \cap RA_0$  состоит из  $mm_0$  различных точек и лежит на одной компоненте  $K$  кривой  $RA$  и на одной компоненте  $K_0$  кривой  $RA_0$ ;

б) циклические порядки, определяемые в пересечении  $RA \cap RA_0$  его расположением в окружностях  $K$  и  $K_0$ , совпадают;

в)  $X \subset RA \setminus RA_0$ ;

г) если  $K$  — односторонняя кривая и  $m_0 \equiv 0 \pmod{2}$ , то база  $X$  лежит вне овала  $K_0$ ;

д) ранг базы  $X$  является делителем чисел  $m + m_0$  и  $2m$ , а ранг базы  $Y$  — делителем чисел  $2m + m_0$  и  $2m$ .

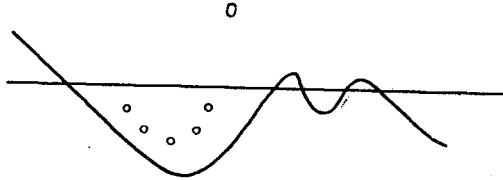
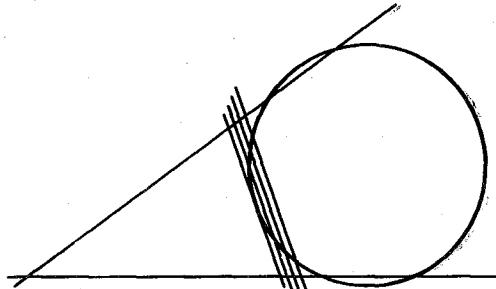
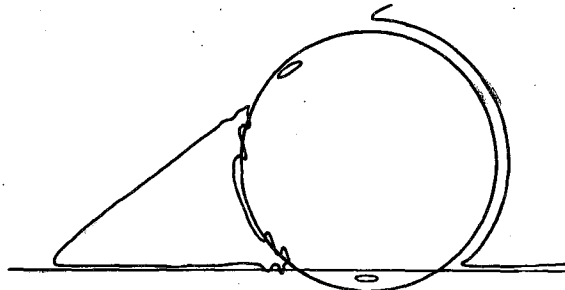


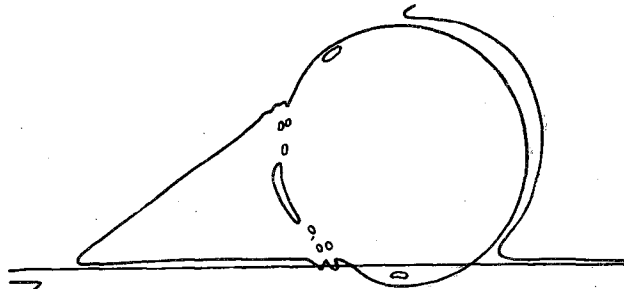
Рис. 12.



*Объединение коники и двух прямых возмущается посредством четверки прямых*



*Получается кривая степени 4*



*К ней добавляется та же коника и объединение возмущается*

Рис. 13.

Вспомогательной кривой может быть и пустая кривая степени 0. В этом случае ранг базы  $X$  должен быть делителем степени порождающей кривой.

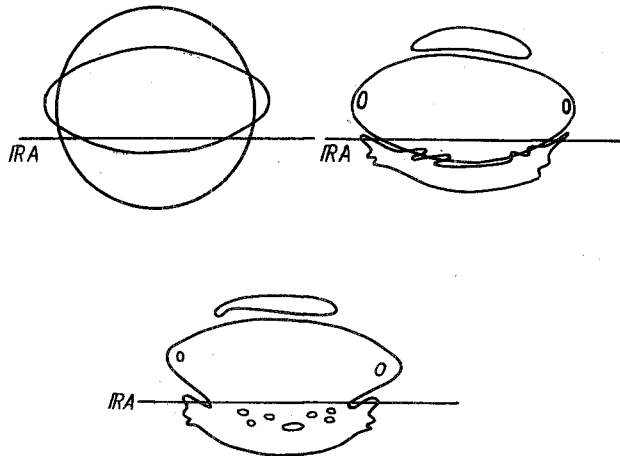


Рис. 14. При построении способом Гильберта следили за расположением относительно фиксированной прямой  $A$ . Объединение двух коник возмущается посредством четверки прямых. Получается кривая степени 4. К ней добавляется одна из исходных коник, и объединение возмущается.

Пусть  $A$  — порождающая кривая степени  $m$  и  $A_0$  — кривая степени  $m_0$ , вспомогательная по отношению к  $A$  и ее базам  $X$  и  $Y$ . Так как ранг базы  $X$  делит  $m + m_0$ , то можно считать, что он равен  $m + m_0$ . Пусть  $C$  — вещественная кривая степени  $m + m_0$ , пересекающая базу  $X$  в  $m(m + m_0)$  различных точках. Нетрудно проверить, что классическое малое возмущение кривой  $A \cup A_0$  посредством  $L$  дает  $M$ -кривую степени  $m + m_0$  и что последняя кривая является вспомогательной по отношению к  $A$  и базам, получающимся из  $Y$  и  $X$  (базы нужно поменять местами). Это построение теперь можно повторить, заменив  $A_0$  построенную кривую. Поступая так же еще и еще, мы получим последовательности  $M$ -кривых со степенями, образующими арифметическую прогрессию  $km + m_0$  с  $k = 1, 2, \dots$ . Такое построение и называется построением по способу Брюзотти, а последовательность получающихся  $M$ -кривых называется *серией Брюзотти*.

Произвольная простая дуга кривой степени  $\leq 2$  является базой ранга 1 (и, значит, любого ранга). Для кривых степеней  $\leq 3$  это уже не так. Например, дуга кривой степени 3 является базой ранга 1, если и только если она содержит точку перегиба. (Замечу, что база ранга 2 на кривой степени 3 может не содержать точку перегиба и располагаться не на односторонней компоненте, где, очевидно, лежат все точки перегиба, а на овале. Кривая степени 3 с такой базой ранга 2 строится классическим малым возмущением объединения трех прямых).

Если порождающая кривая имеет степень 1, а вспомогательная — степень 2, то построение по Брюзотти оказывается харнаковским построением. То же получится, если взять вспомогательную кривую степени 1 или 0. Если порождающая имеет степень 2, а вспомогательная — степень 1 или 2 (или 0), то построение по Брюзотти оказывается гильбертовским.

Вообще говоря, не все построения по Харнаку и Гильберту укладываются в схему Брюзотти, но последнюю легко расширить так, чтобы она действительно стала их обобщением. Для этого нужно предусмотреть в ней возможность использования любого количества баз порождающей кривой. Это расширение особенно существенно в случае порождающей кривой степени  $\leq 2$ , когда баз сколько угодно.

Можно показать, что построение по Брюзотти с порождающей кривой степени 1 и вспомогательной кривой степени  $\leq 4$  дает те же типы  $M$ -кривых, что и построение по Харнаку. Однако уже вспомогательную кривую степени 5 можно выбрать таким образом, что последующее применение построения Брюзотти даст новые изотопические типы. Такая вспомогательная степени 5 была построена только в 1971 г. Д. А. Гудковым [11]. Ее построение довольно сложно, и поэтому я ограничусь ссылками [11, 12, 33] и рис. 12, на котором показано расположение этой кривой относительно порождающей прямой. Уже первый шаг конструкции Брюзотти, т. е. классическое малое возмущение объединения этих кривой и прямой, дает  $M$ -кривую (степени 6) изотопического типа  $\langle 5 \perp 1 \langle 5 \rangle \rangle$ , которая не получается при построениях Харнака и Гильберта. Впервые такая  $M$ -кривая степени 6 была построена значительно более сложным путем в конце шестидесятых годов Д. А. Гудковым [9, 10].

На рис. 13 и 14 показано построение двух кривых степени 6, вспомогательных по отношению к прямой. Построение Брюзотти дает в случае этих кривых новые изотопические типы, начиная со степени 8.

При построении способом Гильберта следим за расположением относительно фиксированной прямой  $A$ . Объединение двух коник возмущается посредством четверки прямых. Получается кривая степени 4. К ней добавляется одна из исходных коник, и объединение возмущается.

В многочисленных работах Брюзотти и его учеников было найдено много серий  $M$ -кривых Брюзотти. Новые изотопические типы в них появляются, как правило, начиная со степеней 9–10. При этих построениях основное внимание уделялось сочетаниям гнезд различной глубины — предмету, представляющемуся сейчас не очень интересным. Некоторое представление о характере результатов этих работ можно почерпнуть из обзора Гудкова [12], дальнейшие подробности см. в обзоре Брюзотти [34] и в процитированных там работах.

Один важный вариант классических построений  $M$ -кривых, к которому нам придется прибегнуть в следующем параграфе, не укладывается в схему Брюзотти даже в ее расширенном варианте. Он был предложен Виманом [48] и состоит в следующем. Берется  $M$ -кривая  $A$  степени  $k$ , имеющая базу  $X$  ранга, делящего  $k$ ; строится близкая к ней кривая  $A'$ , трансверсально пересекающая  $A$  в  $k^2$  точках из  $X$ , после чего объединение  $A \cup A'$  можно подвергнуть классическому малому возмущению, дающему  $M$ -кривую степени  $2k$  (например, посредством пустой кривой степени  $2k$ ). Топологически полученная  $M$ -кривая устроена так: все компоненты кривой  $A$ , кроме одной (а именно, кроме компоненты, содержащей  $X$ ), удаляются, т. е. заменяются парами овалов, каждый из которых близок к овалу исходной кривой, а компонента, содержащая  $X$ , дает цепочку из  $k^2$  овалов. На этой кривой уже не обязательно имеется база, так что серию  $M$ -кривых этим способом, вообще говоря, не построить.

**1.13. Первые запреты, полученные не из теоремы Безу.** Средства, обсуждавшиеся выше, по существу вполне элементарны, и их, как мы видели (п. 1.4), достаточно для решения проблемы изотопической классификации неособых проективных кривых степени  $\leq 5$ . Однако уже в случае кривых степени 6 необходимы более глубокие соображения. Неудачи попыток построения  $M$ -кривых степени 6 новых изотопических типов (после работы Гильберта [36] 1891 г. их было реализовано два:  $\langle 9 \perp 1 \langle 1 \rangle \rangle$  и  $\langle 1 \perp 1 \langle 9 \rangle \rangle$ ) не удавалось объяснить, исходя из теоремы Безу. Гильберт предпринял атаку на  $M$ -кривые степени 6. Ему удалось нащупать путь к доказательству нереализуемости изотопических типов кривыми степени 6, правда, требующий очень трудоемкого исследования естественной стратификации пространства  $RC_6$  вещественных кривых степени 6. К. Роон [45], развивая подход Гильберта, доказал (оставив, однако, ряд верных

технических утверждений, использованных при этом, без доказательства), что схемы  $\langle 11 \rangle$  и  $\langle 1 \langle 10 \rangle$  кривыми степени 6 не реализуются. Полностью возможности этого подхода были раскрыты только в шестидесятые годы Д. А. Гудковым. Перейдя от работы Роона [45] 1913 г. сразу к этим работам Гудкова, я нарушил бы хронологический порядок изложения истории запретов. Однако при этом оказалось бы пропущено всего одно существенное событие, правда, весьма замечательное: знаменитая работа И. Г. Петровского [41, 42], в которой был доказан первый запрет, относящийся к кривым любой четной степени и не являющийся прямым следствием теоремы Безу.

**1.13.A.** Теорема Петровского [41, 42]. Для любой неособой плоской проективной вещественной алгебраической кривой четной степени  $t = 2k$

$$-\frac{3}{2}k(k-1) \leq p-n \leq \frac{3}{2}k(k-1) + 1.$$

(Напомню, что через  $p$  обозначается число четных овалов кривой (т. е. овалов, каждый из которых охватывается четным числом других овалов, см. п.1.11), а через  $n$  — число нечетных овалов).

Доказательство Петровского было основано на новом для топологии вещественных кривых средстве — на интерполяционной формуле Эйлера–Якоби. Теорема Петровского была обобщена в работе Петровского и Олейник [18] на случай многообразий произвольной размерности и в работе Олейник [17] на случай кривых на поверхности. По поводу доказательств и влияния работы Петровского на последующее развитие предмета см. обзор Харламова [26] в собрании сочинений Петровского. Замечу только, что применительно к неособым плоским проективным кривым Петровский, насколько сейчас можно об этом судить, сразу полностью реализовал возможности открытого им метода.

Вернемся теперь к работам Д. А. Гудкова. В ряде работ пятидесятых и шестидесятых годов он завершил разработку всей техники, необходимой для реализации подхода Гильберта к задаче классификации кривых степени 6 (эту технику и сам подход Гудков назвал методом Гильберта–Роона), и с ее помощью решил эту задачу (см. [9]). Ответ оказался красивым и стимулирующим.

**1.13.B.** Теорема Гудкова [9]. Следующие 56 изотопических типов и только они реализуются неособыми плоскими проективными вещественными алгебраическими кривыми степени 6:

(9 ш 1 (1))	(5 ш 1 (5))	(1 ш 1 (9))
(10) (8 ш 1 (1))	(5 ш 1 (4)) (4 ш 1 (5))	(1 ш 1 (8)) (1 (9))
(9) (7 ш 1 (1)) (6 ш 1 (2)) (5 ш 1 (3)) (4 ш 1 (4)) (3 ш 1 (5)) (2 ш 1 (6)) (1 ш 1 (7)) (1 (8))		
(8) (6 ш 1 (1)) (5 ш 1 (2)) (4 ш 1 (3)) (3 ш 1 (4)) (2 ш 1 (5)) (1 ш 1 (6)) (1 (7))		
(7) (5 ш 1 (1)) (4 ш 1 (2)) (3 ш 1 (3)) (2 ш 1 (4)) (1 ш 1 (5)) (1 (6))		
(6) (4 ш 1 (1)) (3 ш 1 (2)) (2 ш 1 (3)) (1 ш 1 (4)) (1 (5))		
(5) (3 ш 1 (1)) (2 ш 1 (2)) (1 ш 1 (3)) (1 (4))		
(4) (2 ш 1 (1)) (1 ш 1 (2)) (1 (3))		
(3) (1 ш 1 (1)) (1 (2))		(1 (1 (1)))
(2) (1 (1))		
(1)		
(0)		

Этот результат, подкреплённый имевшимися примерами кривых старших степеней, привел Гудкова к следующим гипотезам.

1.13.В. Гипотезы Гудкова [9]. (i) Для любой  $M$ -кривой четной степени  $m = 2k$

$$p - n \equiv k^2 \pmod{8}.$$

(ii) Для любой  $(M - 1)$ -кривой четной степени  $m = 2k$

$$p - n \equiv k^2 \pm 1 \pmod{8}.$$

Пытаясь доказать гипотезу 1.13.В (i), В. И. Арнольд [1] обнаружил замечательные связи между топологией вещественной плоской алгебраической кривой и топологией ее комплексификации. Хотя саму гипотезу он доказал лишь в ослабленном виде (по модулю 4, а не 8), найденная им новая точка зрения на предмет открыла замечательные перспективы да и принесла немедленные плоды: в той же работе [1] Арнольд доказал ряд новых запретов (в частности, усиливающих неравенства Петровского 1.13.А). В полной мере гипотеза 1.13.В (i) и ее многомерные обобщения были доказаны В. А. Рохлиным [21], разумеется, на основе связей, открытых Арнольдом [1]. Эту историю я здесь упоминаю кратко и лишь для того, чтобы завершить предварительную экспозицию. Подробности и непосредственное продолжение см. в обзоре Гудкова [12]. С многочисленными результатами, полученными при помощи средств современной топологии многообразий и комплексной алгебраической геометрии (привлечение которых было начато Арнольдом [1]), можно познакомиться по обзорам [47, 23, 2, 25, 26, 8].

## § 2. Запреты

В этом параграфе рассказывается о современном состоянии запретов на топологию вещественных алгебраических плоских проективных кривых заданной степени. Делается это скорее для создания общего впечатления, чем всерьез: хотя формулировки излагаются тщательно и по возможности полно, доказательства, насколько это возможно, не упоминаются. См. перечисленные выше обзоры и цитированные там работы.

2.1. **Вещественные алгебраические кривые с комплексной точки зрения.** Согласно традиции, восходящей к Гильберту, главным вопросом топологии вещественных алгебраических кривых долгое время считался вопрос о том, каковы изотопические типы неособых вещественных плоских проективных алгебраических кривых данной степени (т. е. сформулированная выше проблема 1.1.Б). Однако уже Ф. Кляйн [39] более 100 лет назад ставил вопрос шире. Он интересовался также тем, как изотопический тип кривой связан с расположением множества  $RA$  ее вещественных точек в множестве  $CA$  ее комплексных точек (т. е. в множестве точек комплексной проективной плоскости, однородные координаты которых удовлетворяют уравнению, задающему эту кривую  $A$ ).

Множество  $CA$  является ориентированным гладким двумерным подмногообразием комплексной проективной плоскости  $CP^2$ , инвариантным относительно инволюции комплексного сопряжения  $\text{conj} : CP^2 \rightarrow CP^2 : (z_0 : z_1 : z_2) \mapsto (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$ . Кривая  $RA$  есть множество неподвижных точек сужения

этой инволюции на  $SA$ . Она может разбивать или не разбивать  $SA$ . В первом случае кривая  $A$  называется *разбивающей* или кривой *типа I*, во втором случае — *неразбивающей* или кривой *типа II*. В первом случае  $RA$  разбивает  $SA$  на две связанные половины. Естественные ориентации этих половинок определяют на  $RA$  (как на общем крае) две противоположные ориентации, которые называются *комплексными ориентациями* кривой.

Схему взаимного расположения овалов кривой называют ее *вещественной схемой*. Вещественная схема, обогащенная указанием типа кривой и, в случае типа I, описанием комплексных ориентаций, называется *комплексной схемой* кривой.

Говорят, что вещественная схема кривой степени  $m$  принадлежит *типу I* (*типу II*), если любая кривая степени  $m$  с этой вещественной схемой принадлежит типу I (*типу II*). В противном случае (т. е. если существуют и кривые типа I и кривые типа II такой степени с такой вещественной схемой) говорят, что вещественная схема принадлежит *неопределенному типу*.

Деление кривых на типы ввел Ф. Кляйн [39]. Комплексные ориентации в топологию вещественных алгебраических кривых ввел В. А. Рохлин [22]. Комплексные схемы и их типы были также введены В. А. Рохлиным [23]. В новейшем развитии предмета они занимают центральное положение. В последние годы распространилось более широкое понимание задач топологии вещественных алгебраических многообразий, при котором в качестве основного объекта выступают не вещественные многообразия сами по себе, а вещественные многообразия вместе с их расположением в комплексификации. Этим пониманием мы тоже обязаны главным образом В. А. Рохлину.

**2.2. Гибкие кривые.** Значительная часть известных запретов следует из сравнительно небольшого числа чисто топологических свойств алгебраических кривых. Поэтому наряду с алгебраическими кривыми полезно рассмотреть объекты, топологически имитирующие их.

Ориентированное гладкое связанное замкнутое двумерное подмногообразие  $M$  комплексной проективной плоскости  $CP^2$  называется *гибкой кривой степени  $m$* , если:

- (i) оно реализует класс  $m [CP^1] \in H_2(CP^2)$ ;
- (ii) его род равен  $(m-1)(m-2)/2$ ;
- (iii) оно инвариантно относительно  $so(3)$ ;
- (iv) поле его касательных плоскостей на  $M \cap RP^2$  можно продеформировать в классе плоскостей, инвариантных относительно  $so(3)$ , в поле прямых пространства  $CP^2$ , касательных к  $M \cap RP^2$ .

С  $RP^2$  гибкая кривая пересекается по гладкому одномерному подмногообразию, которое называется ее *вещественной частью*. Очевидно, множество комплексных точек неособой алгебраической кривой степени  $m$  является гибкой кривой степени  $m$ . Все, сказанное в предыдущем пункте об алгебраических кривых и их схемах (вещественных и комплексных), распространяется без изменений на случай гибких кривых. Говорят, что запреты на схемы кривых степени  $m$  имеют *топологическое происхождение*, если они доказаны для схем гибких кривых степени  $m$ . Известная классификация схем кривых степени  $\leq 6$  обеспечивается запретами топологического происхождения, так что для степеней  $\leq 6$  все запреты имеют топологическое происхождение.

**2.3. Запреты топологического происхождения на вещественные схемы кривых степени  $m$ .** В этом пункте я приведу все такие запреты, известные мне сейчас, включая уже упомянутые выше, но исключая запреты, являющиеся следствиями других сформулированных здесь запретов и запретов на комплексные схемы, сформулированных в следующем пункте.



2.3.А. Кривая является односторонней тогда и только тогда, когда ее степень нечетна.

Это утверждение упоминалось выше как следствие теоремы Безу (см. п.1.3), однако оно справедливо и для гибких кривых. То же можно сказать и о неравенстве Харнака, несомненно наиболее известном и важном запрете.

2.3.Б. Неравенство Харнака. Число компонент множества вещественных точек кривой степени  $t$  не превосходит  $(t-1)(t-2)/2+1$ .

В следующих запретах 2.3.В–2.3.Н степень  $t$  кривой четна:  $t = 2k$ .

Экстремальные свойства неравенства Харнака.

2.3.В. Сравнение Гудкова–Рохлина. В случае  $M$ -кривой (т. е. если  $p+n = (t-1)(t-2)/2+1$ )

$$p-n \equiv k^2 \pmod{8}.$$

2.3.Г. Сравнение Гудкова–Крахнова–Харламова. В случае  $(M-1)$ -кривой (т. е. если  $p+n = (t-1)(t-2)/2$ )

$$p-n \equiv k^2 \pm 1 \pmod{8}.$$

Эйлерова характеристика компоненты дополнения кривой в  $\mathbb{R}P^2$  называется характеристикой овала, ограничивающего эту компоненту извне.

2.3.Д. Сравнение Фидлера. Если кривая является  $M$ -кривой,  $t \equiv 4 \pmod{8}$  и характеристика каждого четного овала четна, то

$$p-n \equiv -4 \pmod{16}.$$

2.3.Е. Сравнение Никулина. Если кривая является  $M$ -кривой,  $t \equiv 0 \pmod{8}$  и характеристика каждого четного овала делится на  $2^r$ , то

$$\text{либо } p-n \equiv 0 \pmod{2^{r+3}},$$

$$\text{либо } p-n = 4^q \chi,$$

где  $q \geq 2$  и  $\chi \equiv 1 \pmod{2}$ .

2.3.Ж. Сравнение Никулина. Если кривая является  $M$ -кривой,  $t \equiv 2 \pmod{4}$  и характеристика каждого нечетного овала делится на  $2^r$ , то

$$p-n \equiv 1 \pmod{2^{r+3}}.$$

Число четных овалов с положительной характеристикой обозначается через  $p^+$ , число четных овалов с нулевой характеристикой – через  $p^0$ , число четных овалов с отрицательной характеристикой – через  $p^-$ . Аналогичные числа нечетных овалов обозначаются через  $n^+$ ,  $n^0$  и  $n^-$ , и аналогичные числа всех овалов – через  $l^+$ ,  $l^0$  и  $l^-$ .

Усиленные неравенства Петровского.

$$2.3.З. \quad p-n^- \leq (3k^2 - 3k + 2)/2.$$

$$2.3.И. \quad n-p^- \leq (3k^2 - 3k)/2.$$

Усиленные неравенства Арнольда.

$$2.3.К. \quad p^- + p^0 \leq (k-1)(k-2)/2 + (1 + (-1)^k)/2.$$

$$2.3.Л. \quad n^- + n^0 \leq (k+1)(k-2)/2.$$

Экстремальные свойства усиленных неравенств Арнольда.

$$2.3.М. \quad \text{Если } k \text{ четно и } p^- + p^0 = (k-1)(k-2)/2 + 1, \text{ то } p^- = p^+ = 0.$$

2.3.Н. Если  $k$  нечетно и  $n^- + n^0 = (k-1)(k-2)/2$ , то  $n^- = n^+ = 0$  и имеется всего один внешний овал.

Кроме неравенства Харнака, известен только один запрет топологического происхождения, который распространяется на вещественные схемы как четных, так и нечетных степеней.

**2.3.О.** Неравенство Виро–Звонилова. Если  $h$  – делитель числа  $t$ , являющийся степенью нечетного простого числа, и  $t \neq 4$ , то

$$l^- + l^0 \leq (t-3)^2/4 + (t^2 - h^2)/4h^2.$$

Для четных  $t$  это неравенство вытекает из 2.3.К–М.

**2.3.П.** Экстремальное свойство неравенства Виро–Звонилова. Если  $l^- + l^0 = (t-3)^2/4 + (t^2 - h^2)/4h^2$ , где  $h$  есть делитель числа  $t$  и степень нечетного простого  $p$ , то существуют такие  $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z}_p$  и такие компоненты  $B_1, \dots, B_r$  дополнения  $\mathbb{R}P^2 \setminus RA$  с  $\chi(B_1) = \dots = \chi(B_r) = 0$ , что граница цепи  $\sum_{i=1}^r a_i [B_i] \in C_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_p)$  есть  $[RA] \in C_1 \mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_p$ .

**2.4.** Запреты топологического происхождения на комплексные схемы кривых степени  $t$ . Напомним, что через  $l$  обозначается число всех овалов кривой.

**2.4.А.** Если кривая разбивающая, то  $l \equiv [t/2] \pmod{2}$ .

Инъективная пара овалов (т. е. пара овалов, один из которых охватывается другим) ориентированной плоской топологической кривой называется *положительной*, если ориентации овалов, определяемые ориентацией всей кривой, индуцируются некоторой ориентацией ограничиваемого ими кольца. В противном случае пара овалов называется *отрицательной*. Ясно, что при обращении ориентации всей кривой разбиение пар овалов на положительные и отрицательные не изменяется, так что инъективные пары овалов кривой типа I делятся на положительные и отрицательные по отношению к комплексным ориентациям этой кривой. Число положительных пар обозначается через  $\Pi^+$ , число отрицательных – через  $\Pi^-$ .

**2.4.Б.** Формула Рохлина. Если степень  $t$  четна и кривая принадлежит типу I, то

$$2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - t^2/4.$$

Овалы ориентированной кривой делятся на положительные и отрицательные. Именно рассмотрим ленту Мёбиуса, остающуюся от  $\mathbb{R}P^2$  после удаления внутренней овала. Если целочисленные гомологические классы, реализуемые в ней овалом и удвоенной односторонней компонентой с ориентациями, определяемыми ориентацией всей кривой, различаются знаком, то овал называется *положительным*, в противном случае он называется *отрицательным*. В случае двусторонней ориентированной кривой на положительные и отрицательные делятся только невнешние овалы. Именно невнешний овал *положителен*, если он составляет положительную пару с охватывающим его внешним овалом, и *отрицателен* в противном случае. Как и в случае пар, при обращении ориентации разделение овалов на положительные и отрицательные не изменяется. Число положительных овалов кривой обозначается через  $\Lambda^+$ , число отрицательных – через  $\Lambda^-$ .

**2.4.В.** Формула Рохлина–Мишачева. Если  $t$  нечетно и кривая принадлежит типу I, то

$$\Lambda^+ - \Lambda^- + 2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - (t^2 - 1)/4.$$

Экстремальные свойства неравенства Харнака.

**2.4.Г.** Любая  $M$ -кривая принадлежит типу I.

**2.4.Д.** Сравнение Харламова–Марена. Любая  $(M-2)$ -кривая четной степени  $t = 2k$  с  $p-n \equiv (k^2 + 4) \pmod{8}$  принадлежит типу I.

Экстремальные свойства усиленных неравенств Арнольда.

2.4.Е. Если  $m \equiv 0 \pmod{4}$  и  $p^- + p^0 = (m^2 - 6m + 16)/8$ , то кривая принадлежит типу I.

2.4.Ж. Если  $m \equiv 0 \pmod{4}$  и  $n^- + n^0 = (m^2 - 6m + 8)/8$ , то кривая принадлежит типу I.

Сравнения.

2.4.З. Сравнение Никулина–Фидлера. Если  $m \equiv 0 \pmod{4}$ , кривая принадлежит типу I и характеристика каждого четного овала четна, то  $p - n \equiv 0 \pmod{8}$ .

Сформулирую еще два сравнения, которые являются следствиями формулы Рохлина 2.4.Б.

2.4.И. Сравнение Арнольда. Если  $m$  четно и кривая принадлежит типу I, то  $p - n \equiv m^2/4 \pmod{4}$ .

2.4.К. Сравнение Слепяна. Если  $m$  четно, кривая принадлежит типу I и характеристика каждого нечетного овала четна, то  $p - n \equiv m^2/4 \pmod{8}$ .

Обозначим через  $\pi$  и  $\nu$  числа четных и нечетных непустых овалов, ограничивающих извне такие компоненты дополнения этой кривой, что каждый из овалов, ограничивающих их изнутри, охватывает нечетное число других овалов.

Неравенства Рохлина.

2.4.Л. Если кривая принадлежит типу I и  $m \equiv 0 \pmod{4}$ , то

$$4\nu + p - n \leq (m^2 - 6m + 16)/2.$$

2.4.М. Если кривая принадлежит типу I и  $m \equiv 2 \pmod{4}$ , то

$$4\pi + n - p \leq (m^2 - 6m + 14)/2.$$

2.5. Запреты, не доказанные для гибких кривых. Эти запреты, как правило, труднообозримы в том смысле, что трудно сформулировать в полной общности результаты, доставляемые тем или другим методом. Все они в большей или меньшей степени являются следствиями теоремы Безу.

Для формулировки простейших из них введем следующие обозначения. Символом  $h_r$  обозначим наибольшее число овалов, входящих в объединение  $\leq r$  гнезд. Символом  $h'_r$  обозначим наибольшее число овалов набора, содержащегося в объединении  $\leq r$  гнезд и не содержащего овала, который охватывал бы все остальные входящие в этот набор овалы. В этих терминах теоремы 1.3.В и 1.3.Г можно сформулировать следующим образом:

2.5.А.  $h_2 \leq m/2$ ; в частности, если  $h_1 = [m/2]$ , то  $l = [m/2]$ .

2.5.Б.  $h'_5 \leq m$ ; в частности, если  $h'_4 = m$ , то  $l = m$ .

Эти формулировки открывают целый ряд аналогичных формулировок. Обозначим через  $c(q)$  наибольшее из таких чисел  $c$ , что через любые  $c$  точек плоскости  $\mathbb{R}P^2$ , находящихся в общем положении, проходит связная кривая степени  $q$ . Известно, что  $c(1) = 2$ ,  $c(2) = 5$ ,  $c(3) = 8$ ,  $c(4) = 13$ .

2.5.В (обобщение теоремы 2.5.А). Если  $r \leq c(q)$  с нечетным  $q$ , то

$$h_r + [(c(q) - r)/2] \leq qm/2.$$

В частности, если  $h_{c(q)-1} = [qm/2]$ , то  $l = [qm/2]$ .

2.5.Г. (обобщение теоремы 2.5.Б). Если  $r \leq c(q)$  и  $q$  четно, то

$$h'_r + [(c(q) - r)/2] \leq qm/2.$$

В частности, если  $h'_{c(q)-1} = qt/2$ , то  $l = qt/2$ .

Имеются следующие два ограничения на комплексные схемы, родственные теоремам 2.5.А и Б, однако я не знаю соответствующих параллелей для 2.5.В и Г.

2.5.Д. Если  $h_1 = [t/2]$ , то кривая принадлежит типу I.

2.5.Е. Если  $h'_4 = t$ , то кривая принадлежит типу I.

Я не буду здесь обсуждать способы доказательства запретов нетопологического происхождения. См. [8, 7]. Приведу только несколько формулировок, которые получились для кривых малых степеней.

2.5.Ж. Не существует кривой степени 7 с вещественной схемой  $\langle J \perp 1\langle 14 \rangle \rangle$ .

2.3.З. Если  $M$ -кривая степени 8 имеет вещественную схему  $\langle \alpha \perp 1\langle \beta \rangle \perp 1\langle \gamma \rangle \perp 1\langle \delta \rangle \rangle$  с ненулевыми  $\beta, \gamma, \delta$ , то  $\beta, \gamma$  и  $\delta$  нечетны.

2.5.И. Если  $(M-2)$ -кривая степени 8 с  $p-n \equiv 4 \pmod 8$  имеет вещественную схему  $\langle \alpha \perp 1\langle \beta \rangle \perp 1\langle \gamma \rangle \perp 1\langle \delta \rangle \rangle$  с ненулевыми  $\beta, \gamma$  и  $\delta$ , то два из чисел  $\beta, \gamma$  и  $\delta$  нечетны, а одно четно.

2.6. Точность неравенств. Арсенал построений § 1 и запас построенных там кривых, очень скромные с точки зрения классификационных задач, оказываются достаточно богатыми, если интересоваться проблемой точности неравенств, сформулированных в п. 2.3.

Кривые Харнака четной степени  $m$  со схемой  $\langle (3m^2 - 6m)/8 \perp 1\langle m^2 - 6m + 8 \rangle/8 \rangle$ , построенные в п. 1.6 (см. также 1.9), доказывают не только точность неравенства Харнака 2.3.Б, но и точность усиленного неравенства Петровского 2.3.З.

Один из наиболее простых вариантов построения Гильберта (см. п. 1.10) приводит к построению серии  $M$ -кривых степеней  $m \equiv 2 \pmod 4$  со схемой  $\langle (m^2 - 6m + 8)/8 \perp 1\langle (3m^2 - 6m)/8 \rangle \rangle$ . Это доказывает точность усиленного неравенства Петровского 2.3.И для  $m \equiv 2 \pmod 4$ . Для  $m \equiv 0 \pmod 4$  описанные в § 1 методы не дают точности этого неравенства. Она будет доказана ниже, в п. 5.4.

Усиленное неравенство Арнольда 2.3.К точно при любом четном  $m$ . Для  $m \equiv 2 \pmod 4$  это доказывается  $M$ -кривыми Вимана, см. конец п. 1.12. Для  $m \equiv 0 \pmod 4$  — кривыми, которые получаются в результате модификации конструкции Вимана: все построение делается так же, только возмущение берется противоположное, в результате чего получается кривая, которая может служить краем трубчатой окрестности  $M$ -кривой степени  $m/2$ .

Последняя конструкция (удвоение), примененная к  $M$ -кривой нечетной степени, доказывает точность усиленного неравенства Арнольда 2.3.Л при  $m \equiv 2 \pmod 4$ . При  $m \equiv 0 \pmod 4$  практически ничего о точности неравенства 2.3.Л неизвестно, кроме того, что при  $m = 8$  его правую часть можно уменьшить на 2.

## Глава 2

### ПОСТРОЕНИЯ С УЧАСТИЕМ КРИВЫХ СО СЛОЖНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ И ИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

#### § 3. Возмущения кривых с полуквазиоднородными особенностями

Классические построения топологии вещественных алгебраических кривых (т. е. построения, которые рассматривались выше) осуществляются по следующей общей схеме. Сначала строятся две неособые трансверсальные друг другу кривые, затем их объединение подвергается малому возмущению, устраняющему особенности. При классификации кривых степени 6 Д. А. Гудков вышел за рамки этой

схемы, но; как и прежде, все возмущаемые кривые имели только невырожденные двойные особенности. Появлению более сложных особенностей в построениях вещественных алгебраических кривых с предписанной топологией мешали два обстоятельства: во-первых, не очень сложные особенности не дают ничего нового по сравнению с невырожденными двойными точками — выгода от усложнения рассматриваемых особенностей появляется лишь при переходе к невырожденным пятикратным точкам и точкам касания трех ветвей; во вторых, для целенаправленного возмущения кривых со сложными особенностями необходима специальная техника.

В 1980 г. я предложил способ построения возмущений кривой с полуквазиоднородной особенностью. С топологической точки зрения при таком возмущении окрестность особой точки заменяется заранее заготовленным модельным фрагментом кривой. Эта техника позволила существенно расширить возможности построений. Удалось завершить изотопическую классификацию неособых кривых степени 8 и уточнить гипотезу Рэгсдейл.

Этот параграф и следующий посвящены развитию техники возмущения кривых с особенностями.

**3.1. Многоугольник Ньютона.** Пусть  $f$  — многочлен над  $\mathbb{C}$  или над  $\mathbb{R}$  от двух переменных,  $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ . Входящие в него одночлены естественным образом располагаются в плоскую таблицу: с одночленом  $a_{ij} x^i y^j$  ассоциируется точка  $(i, j) \in \mathbb{R}^2$ . Еще Ньютон заметил удобство такого размещения одночленов, основанное на том, что взаимное положение одночленов оказывается замечательно связанным с ролями, которые исполняются ими при различных специальных значениях переменных  $x, y$ . Большая информация о многочлене  $f$  и о геометрии определяемой им кривой  $f(x, y) = 0$  содержится уже в выпуклой оболочке множества  $\{(i, j) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{ij} \neq 0\}$ , которая обозначается через  $\Delta(f)$  и называется *многоугольником Ньютона* многочлена  $f$ .

Рассмотрим несколько очевидных связей между геометрией кривой  $f(x, y) = 0$  и свойствами многоугольника  $\Delta(f)$ .

Многоугольник  $\Delta(f)$  не содержит точку  $(0, 0)$  тогда и только тогда, когда кривая  $f(x, y) = 0$  содержит точку  $(0, 0)$ .

Многоугольник  $\Delta(f)$  не содержит точку  $(0, 0)$ , но содержит  $(1, 0)$  или  $(0, 1)$  тогда и только тогда, когда точка  $(0, 0)$  является обыкновенной точкой кривой  $f(x, y) = 0$ .

Обобщение: точка  $(0, 0)$  является  $n$ -кратной особой точкой кривой  $f(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $n$  есть наименьшее число, для которого прямая  $x + y = n$  пересекается с  $\Delta(f)$ .

Эти формулировки охватываются следующим принципом, с различными проявлениями которого мы еще неоднократно встретимся: поведение кривой  $f(x, y) = 0$  вблизи начала координат определяется в *первом приближении* одночленами многочлена  $f$ , отвечающими точкам той части границы многоугольника  $\Delta(f)$ , которая обращена к началу координат. Это объясняется тем, что при  $x$  и  $y$ , стремящихся к нулю, эти одночлены составляют главную часть многочлена  $f$ .

В терминах многоугольника  $\Delta(f)$  выражаются не только инварианты особых точек кривой  $f(x, y) = 0$ , но и ряд ее глобальных инвариантов, см. [27, 28]. В частности, если кривая  $f(x, y) = 0$  не имеет комплексных особых точек в  $(\mathbb{C} \setminus 0) \times (\mathbb{C} \setminus 0)$  (т. е. в дополнении координатных прямых), то ее род равен числу точек с целочисленными координатами, лежащих внутри  $\Delta(f)$ .

Для множества  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  и многочлена  $f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$  через  $f^\Gamma$  обозначим многочлен  $\sum_{(i,j) \in \Gamma} a_{ij} x^i y^j$ , т. е. сумму тех одночленов многочлена  $f$ , которые располагаются в множестве  $\Gamma$ ; будем называть это  $\Gamma$ -*усечением* многочлена  $f$ .

Определение многоугольника Ньютона многочлена от двух переменных очевидным образом переносится на случай произвольного многочлена (в общем случае говорят, конечно, не о многоугольнике, а о *многограннике Ньютона*). В случае однородного многочлена  $a$  степени  $m$  от трех переменных он оказывается частью треугольника, определяемого системой

$$\begin{cases} i_0 + i_1 + i_2 = m, \\ i_0 \geq 0, i_1 \geq 0, i_2 \geq 0. \end{cases}$$

Однако на практике удобно этот многоугольник заменять его проекцией на плоскость  $i_0 = 0$ , т. е. многоугольником Ньютона многочлена  $a(1, x, y)$ , и размещать одночлены, входящие в  $a$ , в плоской таблице, связывая с одночленом  $a_{ij} x_0^{m-i-j} x_1^i x_2^j$  точку  $(i, j) \in \mathbb{R}^2$ . Так мы и будем поступать (в частности, через  $\Delta(a)$  будем обозначать многоугольник Ньютона многочлена  $a(1, x, y)$ ).

Сказанное выше о связи геометрии аффинной кривой и геометрии ее многоугольника Ньютона имеет очевидные параллели в проективной ситуации. В частности, поведение кривой  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$  степени  $m$  вблизи точек  $(1:0:0)$ ,  $(0:1:0)$  и  $(0:0:1)$  определяется в первом приближении одночленами многочлена  $a$ , отвечающими точкам той части границы многоугольника  $\Delta(a)$ , которая обращена к  $(0, 0)$ ,  $(m, 0)$  и  $(0, m)$  соответственно.

**3.2. Особенности гиперповерхности.** Многое из того, что здесь говорится, можно сказать и о вещественных кривых, и о комплексных. В таких случаях я буду писать, охватывая обе ситуации, для чего буду употреблять следующее обозначение. Через  $K$  будет обозначаться основное поле ( $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ). Обсуждая особые точки алгебраических кривых, почти ничего не стоит сделать и другое расширение рассматриваемого круга явлений — перейти от особенностей кривых *алгебраических* к особенностям *аналитических* кривых. Наконец, многие формулировки без изменений переносятся на случай изолированных особенностей гиперповерхности. Можно было бы пойти еще дальше и рассмотреть не только гиперповерхности, но это привело бы к существенным усложнениям. В этом пункте мы рассмотрим некоторые общие определения и результаты об изолированных особенностях аналитических вещественных или комплексных гиперповерхностей.

Пусть  $G \subset K^n$  — открытое множество и  $\varphi: G \rightarrow K$  — аналитическая функция. Обозначим для  $U \subset G$  через  $V_U(\varphi)$  множество  $\{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$ . *Особенностью* гиперповерхности  $V_G(\varphi)$  в точке  $x_0 \in U_G(\varphi)$  называется класс ростков гиперповерхностей, диффеоморфных ростку гиперповерхности  $V_G(\varphi)$  в точке  $x_0$ . Другими словами, гиперповерхности  $V_G(\varphi)$  и  $V_H(\psi)$  в точках  $x_0$  и  $y_0$  имеют одинаковую особенность, если существуют такие окрестности  $M$  и  $N$  точек  $x_0$  и  $y_0$ , что пары  $(M, V_M(\varphi))$ ,  $(N, V_N(\psi))$  диффеоморфны.

Рассматривая особенность гиперповерхности в точке  $x_0$ , будем для простоты формул считать  $x_0 = 0$ . *Числом Милнора* гиперповерхности  $V_G(\varphi)$  в точке 0 называется размерность

$$\dim_K K[[x_1, \dots, x_n]] / (\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$$

фактор-алгебры кольца формальных степенных рядов по идеалу, порожденному частными производными  $\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n$  ряда Тейлора  $f$  функции  $\varphi$  в 0. Это число является инвариантом особенности (см. [3]). Если оно конечно, то особенность называется *конечнократной*. Для того чтобы особенность гиперповерхности  $V_G(\varphi)$  в нуле была конечнократной, необходимо, а в случае  $K = \mathbb{C}$  и достаточно, чтобы она была изолированной, т. е. чтобы существовала окрестность нуля  $U \subset K^n$ , не содержащая особых точек гиперповерхности  $V_G(\varphi)$ , отличных от нуля.

Если особенность изолированная, то для шара  $B \subset K^n$  достаточно малого радиуса с центром в нуле его граничная сфера  $\partial B$  пересекает  $V_G(\varphi)$  только в неособых точках и трансверсально и пара  $(B, V_{\partial B}(\varphi))$  гомеоморфна конусу над своим краем  $(\partial B, V_{\partial B}(\varphi))$  (см. [15], теорема 2.10). Пара  $(\partial B, V_{\partial B}(\varphi))$  называется в таком случае *линком* особенности гиперповерхности  $V_G(\varphi)$  в точке 0.

Следующая теорема показывает, что класс конечнократных особенностей совпадает с классом конечнократных особенностей алгебраических гиперповерхностей.

**3.2.A. Теорема Тужрона** (см., например, [3], п. 6.3). *Если особенность гиперповерхности  $V_G(\varphi)$  в точке 0 имеет конечное число Милнора  $\mu$ , то существует такая окрестность  $U$  точки 0 в  $K^n$  и такой диффеоморфизм  $h$  этой окрестности на некоторую окрестность точки 0 в  $K^n$ , что  $h(V_U(\varphi)) = V_h(U)(f_{(\mu+1)})$ , где  $f_{(\mu+1)}$  — многочлен Тейлора степени  $\mu+1$  функции  $\varphi$ .*

Понятие многогранника Ньютона естественно распространяется на степенные ряды: многогранником Ньютона  $\Delta(f)$  ряда  $f(x) = \sum_{\omega \in \mathbb{Z}^n} a_{\omega} x^{\omega}$  (где  $x^{\omega} = x_1^{\omega_1} x_2^{\omega_2} \dots x_n^{\omega_n}$ ) называется выпуклая оболочка множества  $\{ \sum_{\omega \in \mathbb{Z}^n} a_{\omega} \neq 0 \}$ . (Многогранник  $\Delta(f)$  в отличие от рассматривавшихся выше многогранников может иметь бесконечное число граней). Однако в теории особенностей более важным оказывается понятие диаграммы Ньютона. *Диаграммой Ньютона  $\Gamma(f)$  ряда  $f$  называется объединение обращенных к началу координат компактных граней его многогранника Ньютона.* Из определения числа Милнора следует, что если особенность гиперповерхности  $V_G(\varphi)$  в точке 0 конечнократна, то диаграмма Ньютона ряда Тейлора функции  $\varphi$  компактна и расстояние от нее до каждой координатной оси не превосходит 1. Как следует из теоремы Тужрона, в этом случае прибавление к  $\varphi$  мономов вида  $x_i^{m_i}$  с достаточно большими  $m_i$  не изменяет особенность. Таким образом можно, не изменяя особенность, добиться, чтобы диаграмма Ньютона выходила на координатные оси.

**3.3. Распускания особенности.** Пусть теперь функция  $\varphi : G \rightarrow K$  включена в качестве  $\varphi_0$  в семейство аналитических функций  $\varphi_t : G \rightarrow K$  с  $t \in [0, t_0]$ , и пусть это семейство является аналитическим в том смысле, что вещественно аналитична определяемая им функция  $G \times [0, t_0] \rightarrow K : (x, t) \mapsto \varphi_t(x)$ . Если гиперповерхность  $V_G(\varphi)$  имеет в точке  $x_0$  изолированную особенность и если существует такая окрестность  $U$  точки  $x_0$ , что гиперповерхности  $V_G(\varphi_t)$  с  $t \in [0, t_0]$  не имеют особых точек в  $U$ , то будем говорить, что семейство функций  $\varphi_t$  с  $t \in [0, t_0]$  *распускает*<sup>3</sup> особенность гиперповерхности  $V_G(\varphi)$  в точке  $x_0$ .

<sup>3</sup> Это слово ранее в литературе не употреблялось. Вместо него используются выражения „устранение особенности” и „возмущение особенности”. Первое мне кажется неудачным, поскольку происходит не только и не столько уничтожение особенности, но появление на ее месте довольно сложного образования, и поскольку есть другой способ устранения особенности — ее разрешение. Второе неудачно, потому что возмущение особенности — уже не особенность, тогда как другие возмущения (возмущения кривых, операторов и т. п.) не выводят за пределы рассматриваемого класса объектов (возмущение оператора — оператор). Оно возникло, вероятно, потому, что сопровождает возмущение особой гиперповерхности. Слово распускание близко к английскому термину *unfolding*, который переводится на русский язык, как версальная деформация (особенности). Так называется деформация, из которой можно получить все деформации этой особенности и, в частности, все распускания в нашем смысле. Поскольку для термина *unfolding* уже есть перевод, то слово распускание не занято, а его семантика (в русском языке) кажется мне более отвечающей рассматриваемому нами понятию. Буквальный перевод английского термина *smoothing* представляется менее выразительным, да и занят под сглаживания в смысле введения дифференциальной структуры.

Если семейство  $\vartheta_t$  с  $t \in [0, t_0]$  распускает особенность гиперповерхности  $V_G(\vartheta_0)$  в точке  $x_0$ , то существует такой шар  $B \subset K^n$  с центром  $x_0$ , что:

(i) для  $t \in [0, t_0]$  сфера  $\partial B$  пересекает гиперповерхность  $V_G(\vartheta_t)$  только в ее неособых точках и трансверсально;

(ii) для  $t \in (0, t_0]$  шар  $B$  не содержит особых точек гиперповерхности  $V_G(\vartheta_t)$ ;

(iii) пара  $(B, V_B(\varphi_0))$  гомеоморфна конусу над своим краем  $(\partial B, V_{\partial B}(\varphi_0))$ .

Тогда семейство пар  $(B, V_B(\vartheta_t))$  с  $t \in [0, t_0]$  называется *распусканием* ростка гиперповерхности  $V_G(\varphi_0)$  в точке  $x_0$ . (Следуя общей терминологии теории особенностей, правильнее было бы так называть не семейство пар, а семейство ростков или даже росток семейства, но с топологической точки зрения, которая более естественна в контексте топологии вещественных алгебраических многообразий, различие между семейством пар, удовлетворяющим условиям (i) и (ii), и соответствующим семейством ростков незначительно, и мы им пренебрегаем).

Из условий (i) и (ii) вытекает существование такой изотопии  $h_t : B \rightarrow B$  с  $t \in (0, t_0]$ , что  $h_{t_0} = \text{id}$  и  $h_t(V_B(\varphi_{t_0})) = V_B(\varphi_t)$ , так что пары  $(B, V_B(\varphi_t))$  с  $t \in (0, t_0]$  диффеоморфны друг другу.

Распусканию одного из двух ростков, определяющих одну особенность, очевидно, отвечает диффеоморфное распускание второго ростка, так что можно говорить не только о распусканиях ростков, но и о *распусканиях* особенностей гиперповерхности.

В связи с распусканиями возникают следующие три вопроса топологической классификации.

**3.3.А.** *Какие, с точностью до гомеоморфизма, многообразия могут появляться в качестве  $V_B(\varphi_t)$  при распусканиях данной особенности?*

**3.3.Б.** *Какие, с точностью до гомеоморфизма, пары могут появляться в качестве  $(B, V_B(\varphi_t))$  при распусканиях данной особенности?*

Распускания  $(B, V_B(\varphi_t))$  с  $t \in [0, t_0]$  и  $(B', V_{B'}(\varphi'_t))$  с  $t \in [0, t'_0]$  называются *топологически эквивалентными*, если существует такая изотопия  $h_t : B \rightarrow B'$  с  $t \in [0, \min(t_0, t'_0)]$ , что  $h_0$  — диффеоморфизм и  $V_{B'}(\varphi'_t) = h_t V_B(\varphi_t)$  для  $t \in [0, \min(t_0, t'_0)]$ .

**3.3.В.** *Какими, с точностью до топологической эквивалентности, распусканиями обладает данная особенность?*

Эти вопросы аналогичны классификационным проблемам 1.1.А и 1.1.Б, обсуждавшимся выше. Очевидно, вопрос 3.2.Б тоньше вопроса 3.3.А и в свою очередь 3.3.В тоньше 3.3.Б, поскольку в 3.3.В речь идет не только о типе пары, получающейся в результате распускания, но и о том, как эта пара прикрепляется к линку особенности.

В случае  $K = \mathbf{R}$ , который нас здесь более интересует, ответы на эти вопросы известны лишь для очень небольшого запаса особенностей. Ниже, в § 4, мы рассмотрим некоторые из этих случаев. Вообще же топология распусканий вещественных особенностей в значительной степени параллельна топологии неособых вещественных алгебраических многообразий. В частности, в ней имеются запреты, см. [38], и построения (см. ниже).

В случае  $K = \mathbf{C}$  распускание данной особенности со всех трех точек зрения единственно, а вопросам о его топологии (т. е. вопросам 3.3.А и Б) посвящена обширная литература (см., например, [15]). Впрочем, если мы хотим получить для случая  $K = \mathbf{C}$  вопросы, действительно аналогичные вопросам 3.3.А–В для  $K = \mathbf{R}$ , то мы должны заменить распускания деформациями с неособыми слоями и одномерными комплексными базами, а многообразия  $V_B(\varphi_t)$  и пары  $(B, V_B(\varphi_t))$  рассматривать вместе с преобразованиями монодромии. Можно предполагать, что имеются интересные связи между вопросами 3.3.А–В для вещественной



особенности, с одной стороны, и их аналогами для комплексификации этой особенности — с другой.

**3.4. Невырожденные  $r$ -кратные точки.** Вернемся к особенностям плоских кривых. Точка  $(x_0, y_0)$  кривой  $f(x, y) = 0$  называется *невырожденной  $r$ -кратной*, если она и в самом деле имеет кратность  $r$  (т. е. в ней частные производные функции  $f$  до порядка  $r - 1$  включительно равны нулю, а некоторая  $r$ -я не равна), и если кривая

$$f_{x^r} (x_0, y_0) x^r + r f_{x^{r-1}y} (x_0, y_0) x^{r-1} y + \dots + f_{y^r} (x_0, y_0) y^r = 0$$

является редуцированной (т. е. многочлен  $\sum_{k=0}^r C_k^r f_{x^k y^{r-k}} (x_0, y_0) x^k y^{r-k}$

не делится на квадрат какого-либо многочлена положительной степени). Ясно, что это понятие обобщает понятие невырожденной двойной точки.

В случае  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  это определение обладает следующей очевидной удобной переформулировкой в терминах коэффициентов функции  $f$ : точка  $(0, 0)$  является невырожденной  $r$ -кратной точкой кривой  $f(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда многоугольник  $\Delta(f)$  опирается частью своей границы, обращенной к началу координат, на отрезок  $\Gamma$ , соединяющий точки  $(r, 0)$  и  $(0, r)$  (т. е. диаграмма Ньютона  $\Gamma(f)$  лежит на  $\Gamma$ ), и кривая  $f^\Gamma(x, y) = 0$  состоит из попарно различных прямых.

Укажу еще и геометрическую переформулировку.

**3.4.A. Точка кривой является невырожденной  $r$ -кратной тогда и только тогда, когда через нее проходят в точности  $r$  ветвей кривой, ветви эти неособы и имеют попарно различные касательные.** Доказательству предпозволю замечание, представляющее и самостоятельный интерес.

Рассмотрим гомотегию  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 : (x, y) \mapsto (tx, ty)$ . Под ее действием кривая  $f(x, y) = 0$  переходит в кривую  $f(t^{-1}x, t^{-1}y) = 0$ . Одночлену  $a_{ij} x^i y^j$  многочлена  $f(x, y)$  отвечает одночлен  $a_{ij} t^{-i-j} x^i y^j$  многочлена  $f(t^{-1}x, t^{-1}y)$ , так что при гомотегии  $(x, y) \mapsto (tx, ty)$  одночлены, расположенные на прямой  $i + j = n$ , умножаются на  $t^{-n}$ . Кроме того, все уравнение можно умножить, не изменив кривую, на любое число, в частности на  $t^\rho$ . Таким образом, гомотегии  $(x, y) \mapsto (tx, ty)$  отвечает следующее преобразование уравнения кривой: одночлены, расположенные на прямой  $i + j = n$  (т. е. одночлены  $a_{ij} x^i y^j$  с  $i + j = n$ ), умножаются на  $t^{\rho + n}$  для некоторого фиксированного  $\rho$ .

Докажем теперь указанную выше геометрическую переформулировку 3.4.A определения невырожденной  $r$ -кратной точки. Достаточно рассмотреть случай, когда особенность находится в начале координат. Предположим, что это невырожденная  $r$ -кратная точка. Подвергнем кривую гомотегии  $(x, y) \mapsto (tx, ty)$ , сопровождаемая это описанным выше преобразованием уравнения с  $\rho = r$ . Одночлены, находящиеся на  $\Gamma$ , останутся при этом прежними, а прочие одночлены умножаются на степени коэффициента  $t$  с отрицательными показателями. Устремим  $t$  к  $\infty$ . Уравнение при этом устремится к  $f^\Gamma(x, y) = 0$ , т. е. к уравнению объединения  $r$  попарно различных прямых, проходящих через  $(0, 0)$ . Это объединение пересекается трансверсально с любой сферой пространства  $\mathbb{C}^2$  с центром  $(0, 0)$  по объединению  $r$  больших окружностей. При малом возмущении уравнения пересечение остается трансверсальным и состоящим из  $r$  незаузленных окружностей с единичными попарными коэффициентами зацепления. Следовательно, при достаточно большом  $t$  подвергнутая гомотегии кривая имеет в начале координат  $r$  ветвей, притом неособых и трансверсальных друг другу. Значит, таковы в начале координат и ветви исходной кривой.

Наоборот, предположим, что в начале координат кривая  $f(x, y) = 0$  имеет  $r$  ветвей, притом неособых и трансверсальных друг другу. Тогда начало координат является  $r$ -кратной точкой и многоугольник  $\Delta(f)$  расположен над отрезком  $\Gamma$ . При гомотетиях  $(x, y) \mapsto (tx, ty)$  с  $t \rightarrow \infty$  кривая  $f(x, y) = 0$  в окрестности начала координат устремляется к кривой  $f^\Gamma(x, y) = 0$ . С другой стороны, каждая ветвь, растягиваясь, приближается к прямой (к своей касательной). Следовательно,  $f^\Gamma(x, y) = 0$  есть объединение попарно различных прямых, проходящих через  $(0, 0)$ , т. е.  $(0, 0)$  есть невырожденная  $r$ -кратная точка кривой  $f(x, y) = 0$ .

**3.5. Распускания  $r$ -кратной невырожденной точки.** Наша ближайшая цель состоит в конструировании таких возмущений кривой с невырожденной  $r$ -кратной точкой, при которых топология кривой в окрестности этой точки изменяется контролируемым образом.

Рассмотрим сначала специальный случай — случай, когда возмущаемая кривая состоит из  $r$  различных прямых, проходящих через начало координат. Многоугольник Ньютона такой кривой есть отрезок, лежащий на отрезке  $\Gamma$ , соединяющем точки  $(r, 0)$  и  $(0, r)$ . (Ясно, что он либо совпадает с  $\Gamma$ , либо строго меньше, что может случиться из-за отсутствия одного или обоих крайних одночленов  $a_{r,0}x^r$ ,  $a_{0,r}y^r$ ).

Рассуждение, которое дало выше доказательство равносильности двух определений невырожденных  $r$ -кратных точек (3.4.A), подсказывает, как строить такие возмущения. Возьмем аффинную кривую степени  $r$ , у которой имеется  $r$  асимптот с направлениями, совпадающими с направлениями данных прямых. Многоугольник Ньютона такой кривой содержится в треугольнике с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(r, 0)$ ,  $(0, r)$ , а задающий ее многочлен можно нормировать так, чтобы его  $\Gamma$ -сечение совпадало с многочленом, задающим возмущаемую кривую. Подвергнем эту аффинную кривую гомотетии  $(x, y) \mapsto (tx, ty)$ , сопровождая это таким же, как и выше, преобразованием уравнения, вновь с  $\rho = r$ . Одночлены, находящиеся на  $\Gamma$ , остаются неизменными, а прочие одночлены умножаются на степени параметра  $t$  с положительными показателями (одночлен  $a_{ij}x^i y^j$  умножается на  $t^{r-i-j}$ ). Устремим  $t$  к нулю. Тогда в пределе получится уравнение исходной кривой — объединения  $r$  прямых, тогда как остальные кривые этого семейства являются образами одной аффинной кривой при гомотетиях. Итак, аффинную кривую степени  $r$  с  $r$  различными асимптотами можно рассматривать как результат возмущения объединения  $r$  прямых, проходящих через одну точку.

В более общем случае, когда степень возмущаемой кривой может быть больше  $r$ , а начало координат, как и выше, является ее невырожденной  $r$ -кратной точкой, вблизи начала координат одночлены степени  $> r$  не оказывают заметного влияния (ср. п. 3.4). Естественно поэтому ожидать, что такая же, как выше, добавка к уравнению приведет к близкому эффекту. Но прежде чем рассмотреть это обобщение, уточним, что мы будем понимать под близкими кривыми.

Будем говорить, что гладкое подмногообразие  $A$  многообразия  $X$  аппроксимирует в открытом подмножестве  $U \subset X$  гладкое подмногообразие  $B$  многообразия  $X$ , если для некоторой трубчатой окрестности  $T$  многообразия  $B \cap U$  в  $U$  пересечение  $A \cap U$  содержится в  $T$  и является сечением трубчатого расслоения  $T \rightarrow B \cap U$ .

Как следует из теоремы о неявной функции (ср. выше 1.5.A (3) и п. 1.7), если кривая  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$  степени  $m$  не имеет в замыкании открытого множества  $U \subset \mathbb{R}P^2$  особых точек, то она обладает в пространстве  $\mathbb{R}C_m$  вещественных кривых степени  $m$  окрестностью, все кривые из которой не имеют в  $U$  особых точек и аппроксимируют там друг друга.

Пусть  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$  — вещественная проективная кривая степени  $m$ , не имеющая особых точек, кроме точки  $(1:0:0)$ , и пусть эта точка является

ее невырожденной  $r$ -кратной точкой. Пусть  $g(x, y) = 0$  — неособая вещественная аффинная кривая степени  $r$ , и пусть усечения многочленов  $g(x, y)$  и  $a(1, x, y)$  на отрезок  $\Gamma$ , соединяющий точки  $(r, 0)$  и  $(0, r)$ , совпадают. Положим

$$f(x, y) = a(1, x, y),$$

$$h_t(x, y) = f(x, y) + t^r g(t^{-1}x, t^{-1}y) - f^\Gamma(x, y),$$

$$c_t(x_0, x_1, x_2) = a(x_0, x_1, x_2) + t^r x_0^m g(x_1, x_0^{-1}t^{-1}, x_2 x_0^{-1}t^{-1}) - a^\Gamma(x_0, x_1, x_2).$$

Ясно, что  $c_t(1, x, y) = h_t(x, y)$  и что  $c_0(x_0, x_1, x_2) = a(x_0, x_1, x_2)$ , так что семейство кривых  $c_t(x_0, x_1, x_2) = 0$  представляет собой возмущение кривой  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$ .

**3.5.A.** Существуют такие круговые окрестности  $U \supset V$  точки  $(1:0:0)$  в  $\mathbb{R}P^2$ , что для достаточно малых  $t > 0$  кривая  $c_t(x_0, x_1, x_2) = 0$  вне  $V$  аппроксимируется кривой  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$ , а в  $U$  аппроксимируется кривой  $x_0^m g(t^{-1}x_1, x_0^{-1}, t^{-1}x_2 x_0^{-1}) = 0$  (т. е. образом кривой  $g(x, y) = 0$  при композиции гомотетического сжатия  $(x, y) \mapsto (tx, ty)$  и канонического вложения  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2 : (x, y) \mapsto (1:x:y)$ ).

**Доказательство.** Включим семейство многочленов  $h_t$  в большее семейство

$$h_{s,t}(x, y) = s^{-r} f(sx, sy) + t^r g(t^{-1}x, t^{-1}y) - f^\Gamma(x, y).$$

Гомотетия  $(x, y) \mapsto (ux, uy)$  переводит кривую  $h_{s,t}(x, y) = 0$  в кривую  $u^r h_{s,t}(u^{-1}x, u^{-1}y) = 0$ , но

$$u^r h_{s,t}(u^{-1}x, u^{-1}y) = s^{-r} u^r f(su^{-1}x, su^{-1}y) + t^r u^r g(t^{-1}u^{-1}x, t^{-1}u^{-1}y) - f^\Gamma(x, y) = h_{su^{-1}, tu}(x, y).$$

Таким образом, кривые  $h_{s,t}(x, y) = 0$ , отвечающие точкам  $(s, t)$  плоскости параметров, лежащим на гиперболах  $st = \text{const}$ , получаются друг из друга посредством гомотетий.

Положим  $c_{s,t}(x_0, x_1, x_2) = x_0^m h_{s,t}(x_1 x_0^{-1}, x_2 x_0^{-1})$ . Ясно, что кривая  $c_{s,0}(x_0, x_1, x_2) = 0$  есть объединение  $(m-r)$ -кратной прямой  $x_0^{m-r} = 0$  и определяемого уравнением  $a^\Gamma(x_0, x_1, x_2) = 0$  объединения  $r$  прямых, проходящих через точку  $(1:0:0)$ . У начала координат плоскости параметров имеется такая круговая окрестность  $P$ , что для  $(s, t) \in P$  кривые  $h_{s,t}(x, y) = 0$  в кольце  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  аппроксимируются друг другом и, в частности, аппроксимируют кривую  $f^\Gamma(x, y) = 0$ .

Возьмем точку  $(s_0, 0) \in P$  с  $s_0 > 0$ . Отвечающая ей кривая  $c_{s_0,0}(x_0, x_1, x_2) = 0$  получается из кривой  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$  в результате растяжения  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : s^{-1}x_1 : s^{-1}x_2)$  (рис. 15). Как и последняя, она имеет особенность только в точке  $(1:0:0)$ . При достаточно малом отступлении от  $(s_0, 0)$  в область  $t > 0$  эта особенность возмущается, тогда как за пределами некоторой ее окрестности (скажем, вне круга  $x^2 + y^2 < 1$ ) кривая  $c_{s_0,t}(x_0, x_1, x_2) = 0$  аппроксимируется кривой  $c_{s_0,0}(x_0, x_1, x_2) = 0$ .

Точно так же, кривая  $h_{0,t_0}(x, y) = 0$ , отвечающая точке  $(0, t_0) \in P$  с  $t_0 > 0$ , получается из кривой  $g(x, y) = 0$  в результате сжатия  $(x, y) \mapsto (t_0 x, t_0 y)$ . При достаточно малом отступлении от точки  $(0, t_0)$  в область  $s > 0$  кривая  $h_{s,t_0}(x, y) = 0$  в круге  $x^2 + y^2 \leq 4$  испытывает лишь малую изотопию и аппроксимируется кривой  $h_{0,t_0}(x, y) = 0$ , т. е. кривой  $g(t_0^{-1}x, t_0^{-1}y) = 0$ .

Выберем точки  $(s_0, t_1)$ ,  $(s_1, t_0)$ , достаточно близкие в указанном только что смысле к  $(s_0, 0)$  и  $(0, t_0)$  и с  $s_0 t_1 = s_1 t_0$ , т. е. лежащие на одной гиперболе

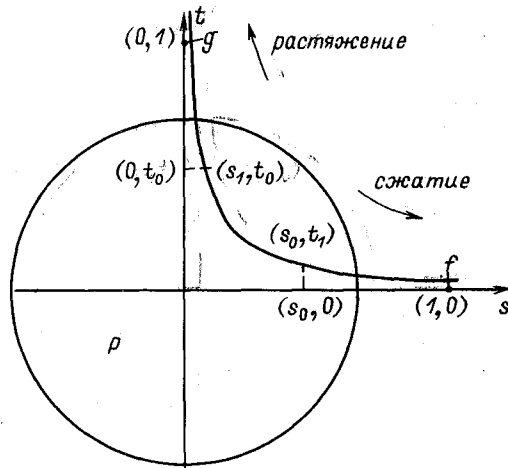


Рис. 15.

$st = \text{const}$ . При движении по этой гиперболе от  $(s_1, t_0)$  к  $(s_0, t_1)$  кривая  $c_{s, t}(x_0, x_1, x_2) = 0$  подвергается изотопии, составленной из гомотетий — сжатий в точке  $(1 : 0 : 0)$ , — и превращается в  $c_{s_0, t_1}(x_0, x_1, x_2) = 0$ . Так как в процессе этой изотопии точка  $(s, t)$  не покидала  $P$ , то в кольце  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$  кривая существенно не изменяется, а лишь скользит вдоль кривой  $f \Gamma(x, y) = 0$ , все время аппроксимируя ее. Поэтому кривая  $h_{s_0, t_1}(x, y) = 0$  аппроксимирует кривую  $h_{0, t_1}(x, y) = 0$  (т. е. образ кривой  $g(x, y) = 0$  при сжатии  $(x, y) \mapsto (t_1 x, t_1 y)$ ) не только в круге  $x^2 + y^2 \leq 4s_1^2 s_0^{-2}$  (т. е. в образе круга  $x^2 + y^2 \leq 4$  при гомотетии), но и в самом круге  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

Заметим теперь, что кривая  $c_{1, s_0 t_1}(x_0, x_1, x_2) = 0$  (т. е. кривая  $c_{1, s_0 t_1}(x_0, x_1, x_2) = 0$ ) является образом кривой  $c_{s_0, t_1}(x_0, x_1, x_2) = 0$  при гомотетии  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : s_0 x_1 : s_0 x_2)$ . Следовательно, кривая  $c_{s_0, t_1}(x_0, x_1, x_2) = 0$  вне круга  $x^2 + y^2 < s_0^2$  аппроксимируется кривой  $c_{1, 0}(x_0, x_1, x_2) = 0$ , т. е. исходной кривой  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$ , а в круге  $x^2 + y^2 \leq 4s_0^2$  аппроксимируется кривой  $c_{0, s_0 t_1}(x_0, x_1, x_2) = 0$ , т. е. образом кривой  $x_0^r g(x_1 x_0^{-1}, x_2 x_0^{-1})$  при сжатии  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : s_0 t_1 x_1 : s_0 t_1 x_2)$ . Таким образом, положив  $t = s_0 t_1$  и взяв в качестве  $U$  круг  $x^2 + y^2 \leq 4s_0^2$ , а в качестве  $V$  — круг  $x^2 + y^2 \leq s_0^2$ , получаем объекты, существование которых утверждается доказываемой теоремой. •

**3.6. Квазиоднородность.** Метод возмущения кривых с невырожденной  $r$ -кратной точкой допускает непосредственное обобщение на гораздо более широкий класс особенностей. Грубо говоря, это обобщение связано с заменой гомотетий  $(x, y) \mapsto (tx, ty)$  отображениями  $(x, y) \mapsto (t^u x, t^v y)$  с целыми взаимно-простыми  $u, v$  — эти отображения называются *квазигомотетиями*. Как и гомотетии, квазигомотетии с фиксированными показателями  $u, v$  составляют однопараметрическую группу линейных преобразований.

Под действием квазигомотетии  $(x, y) \mapsto (t^u x, t^v y)$  кривая, задаваемая уравнением  $f(x, y) = 0$   $f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$ , переходит в кривую  $f(t^{-u} x, t^{-v} y) = 0$  или, что то же, в кривую  $t^{\rho} f(t^{-u} x, t^{-v} y) = 0$ . Одночлену  $a_{ij} x^i y^j$  многочлена  $f(x, y)$  отвечает одночлен  $a_{ij} t^{\rho - ui - vj} x^i y^j$  многочлена  $t^{\rho} f(t^{-u} x, t^{-v} y)$ , так что при квазигомотетии  $(x, y) \mapsto (t^u x, t^v y)$  одночлены, расположенные на прямой  $ui + vj = n$ , умножаются на  $t^{\rho - n}$ .

Инвариантными относительно всех квазигомотетий  $(x, y) \mapsto (t^u x, t^v y)$  с фиксированными показателями  $u, v$  являются кривые, которые задаются

квазиоднородными многочленами с весами  $u, v$ , т.е. многочленами, многоугольники Ньютона которых лежат на прямых  $ui + vj = \text{const}$ . Эти кривые являются объединениями орбит действия группы квазигомотетий с показателями  $u$  и  $v$ , т.е. кривых  $\alpha x^v + \beta y^u = 0$ . Последние будем называть квазипрямыми с весами  $u, v$ .

Рассмотрим теперь соответствующие особенности плоских кривых. Будем считать, что рассматриваемая особая точка кривой  $f(x, y) = 0$  находится в начале координат. Если многоугольник  $\Delta(f)$  имеет такую сторону  $\Gamma$ , обращенную к началу координат, что усечение на  $\Gamma$  определяет кривую, не имеющую кратных компонент (т.е. если  $f^\Gamma(x, y)$  не делится на квадрат какого бы то ни было многочлена ненулевой степени), то говорят, что кривая  $f(x, y) = 0$  имеет в начале координат полуквазиоднородную особенность. Если отрезок  $\Gamma$  лежит на прямой  $ui + vj = r$  со взаимно простыми целыми  $u, v$ , то говорят, что  $u, v$  — веса этой полуквазиоднородной особенности, а  $r$  — ее степень.

Имеется одно существенное отличие полуквазиоднородных особенностей от невырожденных. В определении полуквазиоднородности, данном выше, выбор системы координат играет куда более важную роль, чем в определении невырожденной  $r$ -кратной точки. Действительно, если полуквазиоднородная особая точка не является невырожденной, то координатная ось, отвечающая меньшему из весов, играет особую роль. Относительно любой аффинной системы координат, в которой эта прямая не является осью, эта особая точка не является полуквазиоднородной.

Таким образом, полуквазиоднородность особенности тесно связана с координатной системой. Обычно, говоря о том, что особенность полуквазиоднородна, имеют в виду ее полуквазиоднородность относительно подходящей системы координат. Чтобы подчеркнуть, что определение полуквазиоднородности выполнено применительно к данной аффинной системе координат или к одной из трех аффинных систем координат, канонически связанных с данной проективной системой координат, будем говорить, что особенность полуквазиоднородна относительно этой системы координат.

Другое, быть может еще более фундаментальное, отличие полуквазиоднородности от невырожденности состоит в том, что полуквазиоднородность, даже понимаемая в указанном более широком смысле, т.е. как полуквазиоднородность относительно какой-нибудь аффинной системы координат, не сохраняется, вообще говоря, при локальных диффеоморфизмах. Например, кривая  $x^5 - y^2 = 0$  имеет полуквазиоднородную особенность в начале координат, тогда как ее образ при диффеоморфизме  $(x, y) \mapsto (x, y - x^2)$ , т.е. кривая  $x^5 - x^4 - 2x^2y - y^2 = 0$ , имеет в начале координат особенность, не являющуюся полуквазиоднородной относительно какой бы то ни было аффинной системы координат.

Для наших целей, однако, гораздо важнее то, что многие черты невырожденных  $r$ -кратных особых точек присущи и всем полуквазиоднородным особым точкам. Теорема 3.4.A обобщается на полуквазиоднородный случай следующим образом. В некоторой окрестности полуквазиоднородной особой точки кривая устроена как объединение нескольких квазипрямых. Слово „устроена” здесь означает, что существует гомеоморфизм этой окрестности, переводящий кривую в объединение квазипрямых. Последнее есть кривая, определяемая усечением уравнения исходной кривой на обращенную к началу координат сторону его многоугольника Ньютона. Доказывается все это так же, как теорема 3.4.A.

**3.7. Примеры полуквазиоднородных особенностей.** Простейшие особенности являются полуквазиоднородными (точнее говоря, становятся полуквазиоднородными после подходящей замены локальной системы координат). Иерархия особенностей начинается с простых или, что то же, нульмодальных особенностей, т.е. с особенностей  $A_k, D_k, E_6, E_7, E_8$ , которые все приводятся локальными диффеоморфизмами к полуквазиоднородной форме.

Особенности  $A_k$  (с  $k \geq 1$ ). Здесь случай нечетного и четного  $k$  отличаются друг от друга. Если  $k$  нечетно, то через точку типа  $A_k$  проходят две неособые ветви, которые касаются друг друга с кратностью  $k - 1$  (т. е. локальный индекс пересечения равен  $k$ ), причем либо обе ветви вещественны (нормальная форма  $x^{k+1} - y^2 = 0$ ), либо они мнимые сопряженные (нормальная форма  $x^{k+1} + y^2 = 0$ ). Если  $k$  четно, то ветвь одна и на ней имеется острие. Для  $k = 2$  это обычная точка возврата, в случае  $k > 2$  это более „острые“ точки. Нормальная форма  $x^{k+1} - y^2 = 0$ .

Особенности  $D_k$  ( $k \geq 4$ ). Топологически особенность  $D_k$  устроена как особенность  $A_{k-3}$ , через которую проходит еще одна неособая ветвь кривой, находящаяся в общем положении к остальным ветвям. В частности,  $D_4$  — невырожденная тройная точка.

Особенности  $E_6, E_7, E_8$ . Нормальная форма особенности  $E_6: x^4 - y^3 = 0$ . Особенность  $E_7: (x^3 - y^2)y = 0$ . Особенность  $E_8: x^5 - y^3 = 0$ .

Однако нам понадобятся более сложные особенности. Первые из них — это особенности, которые Арнольд [3] обозначил символом  $J_{10}$ . В окрестности такой точки кривая состоит из трех неособых ветвей, которые квадратично касаются друг друга в этой точке. Это полуквазиоднородная особенность весов (2, 1) степени 6. Нам понадобится только та вещественная форма особенности, в которой все три ветви вещественны. Особенность  $J_{10}$  удобна в построениях вещественных кривых тем, что кривые с особенностью  $J_{10}$  легко строятся при помощи очевидных модификаций классических способов построения, с другой стороны, она уже достаточно сложна, чтобы при возмущениях кривых с  $J_{10}$  появлялись новые интересные кривые. По этой причине хороши особенности типов  $N_{16}$  (невырожденные 5-кратные точки),  $X_{21}$  (точка квадратичного касания четырех неособых ветвей — полуквазиоднородная особенность весов 2, 1 степени 8),  $Z_{15}$  (точка квадратичного касания трех неособых ветвей, через которую проходит еще одна неособая ветвь, трансверсальная остальным трем, — полуквазиоднородная особенность весов 1, 2 степени 7). (Символы  $N_{16}, X_{21}, Z_{15}$  — из той же системы обозначений Арнольда [3].)

**3.8. Распускания полуквазиоднородной особенности.** Пусть  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$  — вещественная проективная кривая степени  $m$ , не имеющая особых точек, кроме точки  $(1:0:0)$ , и пусть эта точка является полуквазиоднородной особой точкой с весами  $u, v$  степени  $r$ , и положение кривой (относительно канонической системы координат) таково, что многоугольник Ньютона  $\Delta(a)$  имеет сторону  $\Gamma$ , обращенную к началу координат, лежащую на прямой  $ui + vj = r$ , и такую, что кривая  $a^\Gamma(1, x, y) = 0$  не имеет кратных компонент. Пусть  $g(x, y) = 0$  — кривая, не имеющая особенностей в  $\mathbb{R}^2$ . Пусть  $\Delta(g)$  содержится между началом координат и прямой  $ui + vj = r$  и сечение  $g^\Gamma$  совпадает с  $\Gamma$ -сечением члена  $f(x, y) = a(1, x, y)$ . Положим

$$h_t(x, y) = f(x, y) + t^r g(t^{-u}x, t^{-v}y) - f^\Gamma(x, y),$$

$$c_t(x_0, x_1, x_2) = a(x_0, x_1, x_2) + t^r x_0^m g(x_1 x_0^{-1} t^{-1}, x_2 x_0^{-1} t^{-1}) - a^\Gamma(x_0, x_1, x_2).$$

Ясно, что  $c_t(1, x, y) = h_t(x, y)$  и что  $c_0(x_0, x_1, x_2) = a(x_0, x_1, x_2)$ .

**3.8.A.** *Существуют такие окрестности  $U \supset V$  точки  $(1:0:0)$  в  $\mathbb{RP}^2$ , что для достаточно малых  $t > 0$  кривая  $c_t(x_0, x_1, x_2) = 0$  вне  $V$  аппроксимируется кривой  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$ , а в  $U$  аппроксимируется образом кривой  $g(x, y) = 0$  при композиции квазигомотетии  $(x, y) \mapsto (t^u x, t^v y)$  и канонического вложения  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2: (x, y) \mapsto (1: x: y)$ .*

Эта теорема обобщает теорему 3.5.А; ее доказательство есть непосредственное обобщение доказательства теоремы 3.5.А, и мы оставляем его читателю в качестве упражнения.

Распускания полуквазиоднородной особой точки, доставляемые конструкцией этого пункта, будем называть *квазиоднородными*.

**3.9. Возмущения кривых с несколькими особыми точками.** В теоремах 3.5.А и 3.8.А кривые, подвергающиеся возмущению, имели только одну особую точку — именно ту, которая распускалась и изменение топологии в окрестности которой описывалось. Если в условиях теоремы 3.8.А допустить, что кривая  $a(x_0, x_1, x_2)$  имеет и другие особые точки, то в семействе  $c_t(x_0, x_1, x_2) = 0$  эти особенности, вообще говоря, будут тоже распускаться, и для того чтобы описать топологию этого распускания, необходима дополнительная информация о многочлене  $g$ .

Имеется, однако, важный частный случай, когда при описанном выше способе распускания независимо от многочлена  $g$  особые точки кривой  $a(x_0, x_1, x_2) = 0$ , отличные от  $(1:0:0)$ , при возмущении сохраняются. Это случай, когда особыми точками являются  $(0:1:0)$  или  $(0:0:1)$  или  $(0:1:0)$ , и  $(0:0:1)$ , и особенности в них полуквазиоднородны относительно этой проективной системы координат.

В самом деле, многоугольники Ньютона многочленов  $a = c_0$  и  $c_t$  при  $t > 0$  со стороны точек  $(t, 0)$  и  $(0, t)$  совпадают, как и одночлены, отвечающие точкам, находящимся на этих частях границы многоугольников.

Следовательно, описанные в предыдущем пункте (т. е. квазиоднородные) распускания можно производить независимо в двух или трех полуквазиоднородных особых точках, если они все полуквазиоднородны относительно одной и той же проективной системы координат.

**3.10. Многомерное обобщение.** Данные в п. 3.6 определения квазигомететий, квазиоднородных многочленов, квазипрямых и полуквазиоднородных особенностей очевидным образом обобщаются на случай пространства любой размерности. Способ распускания полуквазиоднородных особенностей, описанный в п. 3.8, теорема 3.8.А и сказанное в п. 3.9 — то же. Точные формулировки оставляю в качестве упражнения.

#### § 4. Распускания конкретных особенностей кривых

Этот параграф посвящен обсуждению распусканий конкретных особенностей плоских кривых. Топологическая классификация распусканий завершена лишь для особенностей некоторых простейших типов. Мы начнем с простых особенностей, о распусканиях которых все известно, но информация эта почти никакого интереса для построений не представляет. Затем рассмотрим два типа унимодальных особенностей:  $J_{10}$  (три неособые ветви, квадратично касающиеся друг друга в одной точке) и  $X_9$  (невырожденные четырехкратные особенности). Распускания особенности  $X_9$ , как и распускания простых особенностей, почти ничего не дают для построений кривых. Наоборот,  $J_{10}$ , точнее ее вещественная форма с тремя вещественными ветвями, очень полезна, и мы детально обсудим построение ее распусканий всех возможных топологических типов. Затем будут рассмотрены распускания невырожденных пятикратных точек и более сложных особенностей.

Результаты о топологии распусканий особенностей некоторого типа можно разбить на три группы. Первую группу составляют запреты на топологию распусканий. Они родственны запретам на топологию неособых кривых, и я ограничусь лишь формулировками результатов для конкретных особенностей. Ко второй

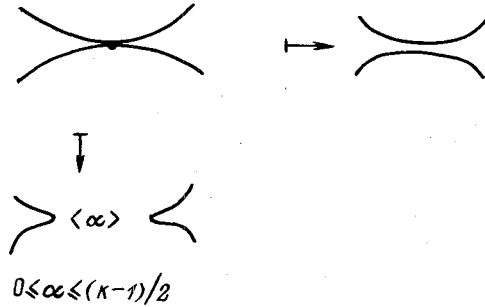


Рис. 16.

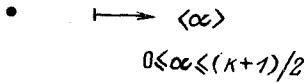


Рис. 17.

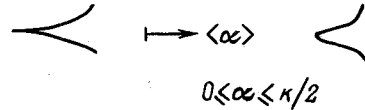


Рис. 18.

относятся построения конкретных распусканий. Теорема 3.8.A в случае полуквазиоднородной особенности сводит задачу построения распусканий к задаче построения кривых. Результаты этой группы иногда будут сопровождаться доказательствами, но их цель, как правило, — лишь служить иллюстрацией новых методов и дать представление о характере доказательств. Наконец, третью группу составляют результаты о зависимости топологии распусканий особенностей того или иного семейства от параметров, задающих особенность в этом семействе. Например, рассматриваются все невырожденные  $r$ -кратные особые точки, в которых все ветви вещественны, и доказывается, что при данном  $r$  запас распусканий данной особенности не зависит от расположения ветвей (т. е. от углов между ними, их кривизн и т. п.). Во всех случаях, кроме первого нетривиального и важного случая  $J_{10}^-$ , я ограничусь лишь формулировками результатов этого направления.

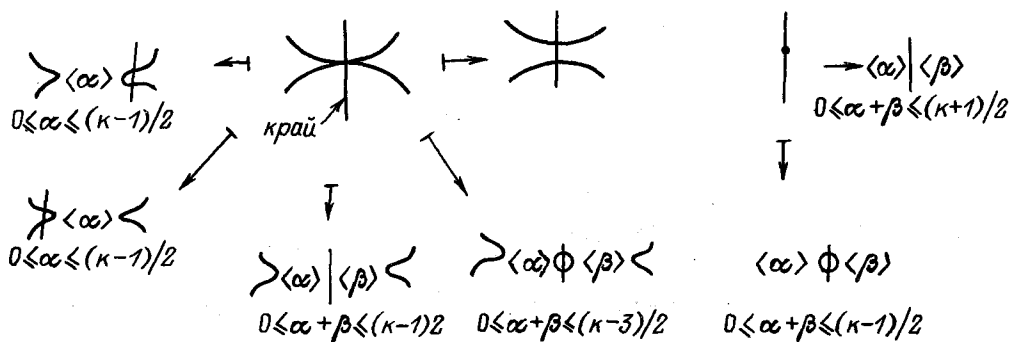
**4.1. Нульмодальные особенности.** Особенности серии  $A_k$  с нечетными  $k$  и с двумя вещественными ветвями ( $A_k^-$ ). Локальным диффеоморфизмом всякая такая особенность приводится к нормальной форме  $y^2 - x^{k+1} = 0$ . Любое распускание такой особенности топологически эквивалентно одному из распусканий, показанных на рис. 16. На этом и на последующих рисунках символ  $\langle a \rangle$  заменяет группу из  $a$  лежащих вне друг друга овалов. Построение распусканий рис. 16: правое распускание определяется формулой  $y^2 - x^{k+1} - t = 0$  с  $t > 0$ ; распускания, изображенные снизу от исходной особенности, определяются формулами  $y^2 - (x - tx_1)(x - tx_2) \dots (x - tx_{2a+2})(x^2 + t^2)^{(k-1)/2 - a} = 0$ , где  $x_1, \dots, x_{2a+2}$  — попарно разные вещественные числа ( $a$  — как обычно, параметр, пробегающий в данном распускании некоторый отрезок вида  $[0, t_0]$ ).

Особенности серии  $A_k$  с нечетным  $k$  и с мнимыми сопряженными ветвями ( $A_k^+$ ). Локальным диффеоморфизмом всякая такая особенность приводится к нормальной форме  $y^2 + x^{k+1} = 0$ . Любое ее распускание топологически эквивалентно одному из распусканий, показанных на рис. 17.

Эти распускания задаются формулой  $y^2 + (x - tx_1) \dots (x - tx_{2a})(x^2 + t^2)^{(k+1)/2 - a} = 0$ , где  $x_1, \dots, x_{2a}$  — попарно разные вещественные числа.

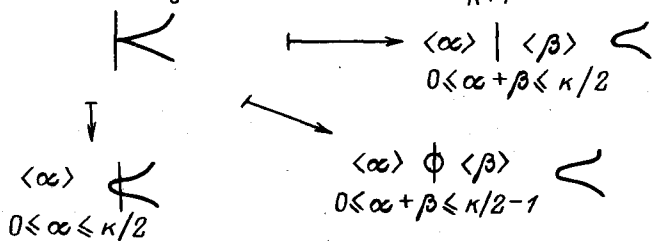
Отмечу, что в число особенностей, распускания которых мы описали, входят особенности типа  $A_1$ , т. е. невырожденные двойные точки (кресты  $A_1^-$  и уединенные двойные точки  $A_1^+$ ). Их устранения рассматривались выше в § 1.





(а) вещественные ветви ( $V_{k+1}^-$ )    (б) мнимые ветви ( $V_{k+1}^+$ )

Распускания особенности  $V_{k+1}$  с нечетным  $k$



Распускания особенности  $V_{k+1}$  с четным  $k$

Рис. 19.

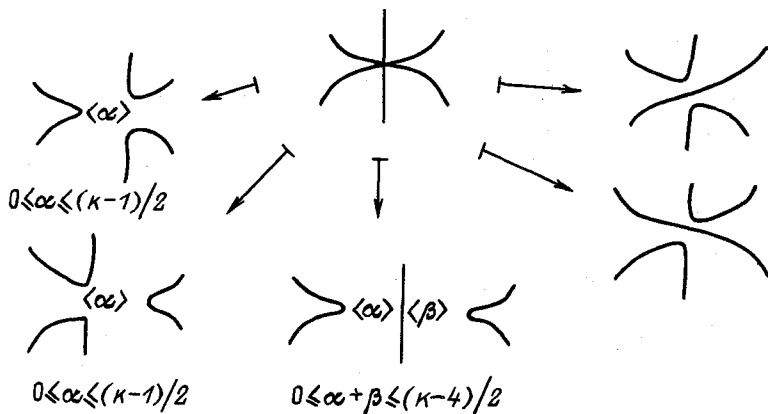


Рис. 20.

Особенности серии  $A_k$  с четным  $k$ . Локальным диффеоморфизмом всякая такая особенность приводится к нормальной форме  $y^2 - x^{k+1} = 0$ . Любое ее распускание топологически эквивалентно одному из распусканий, показанных на рис. 18. Они задаются формулой  $y^2 - (x - tx_1) \dots (x - tx_{2a+1}) (x^2 + t^2)^{k/2 - a} = 0$ , где  $x_1, \dots, x_{2a+1}$  — попарно разные вещественные числа.

В частности, при  $k=2$  получаем два типа распусканий обыкновенной точки возврата.

Замечание. Выбирая подходящим образом числа  $x_i$ , можно добиться, чтобы кривые, которые определяются построенными выше многочленами,

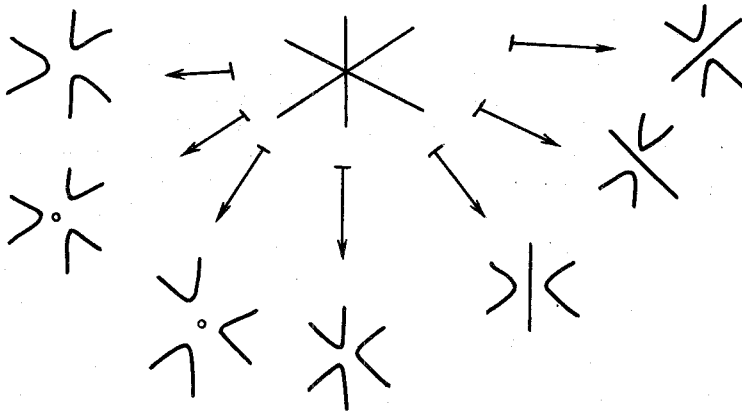


Рис. 21.

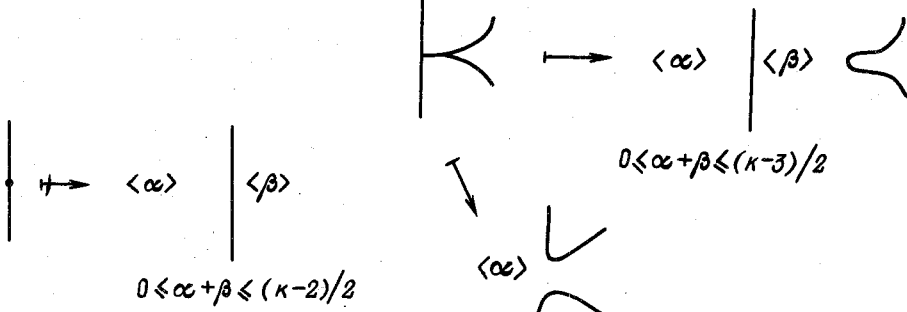


Рис. 22.

$0 \leq \alpha \leq (\kappa - 1)/2$

Рис. 23.

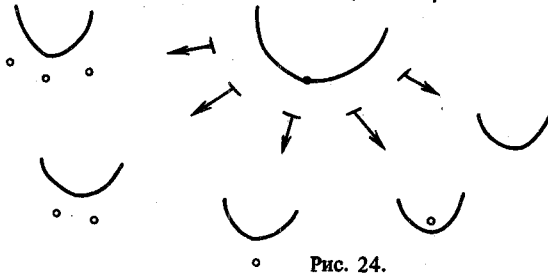


Рис. 24.

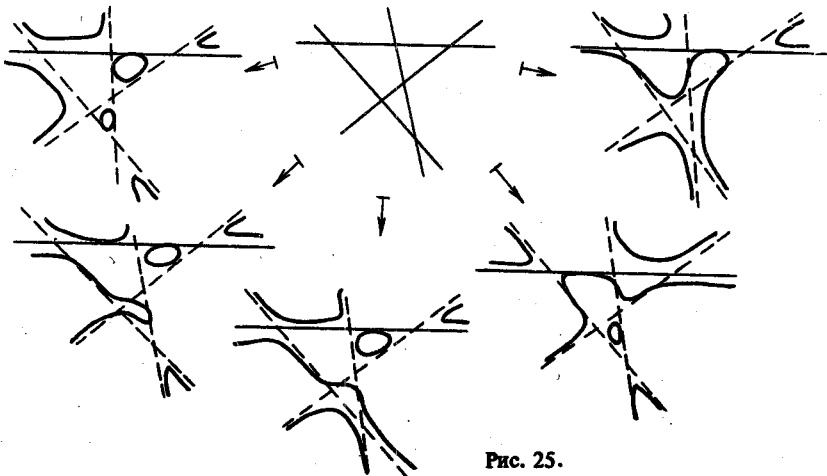


Рис. 25.

располагались относительно оси ординат всеми способами, показанными на рис. 19. Это можно интерпретировать как построение всевозможных (с точностью до топологической эквивалентности) распусканий *краевых* особенностей серии  $V_{k+1}$  (см. по поводу краевых особенностей [3], п. 17.4). Под распусканием краевой особенности здесь понимается распускание особенности с забытым краем, в процессе которого возмущаемая гиперповерхность (в нашем случае кривая) трансверсальна краю (т. е. фиксированной гиперплоскости, в нашем случае — прямой  $x = 0$ ).

*Особенности серии  $D_k$  с четными  $k \geq 4$  и с тремя вещественными ветвями ( $D_k^-$ ).* Локальным диффеоморфизмом такая особенность приводится к нормальной форме  $xy^2 - x^{k-1} = 0$ . Любое ее распускание топологически эквивалентно одному из распусканий, показанных на рис. 20.

В частности, при  $k = 4$  (случай, когда  $D_4$  есть невырожденная тройная точка) имеются следующие семь распусканий (рис. 21). Для построения распусканий рис. 20 заметим, что поскольку росток типа  $D_k^-$  можно получить из ростка типа  $A_{k-3}^-$  добавлением одной прямой общего положения, то распускание ростка типа  $D_k^-$  можно получить из распускания ростка краевой особенности  $B_{k-2}^-$  добавлением краевой прямой и последующим возмущением. Именно так можно получить все распускания рис. 20 из распусканий верхней левой части рис. 19.

*Особенности серии  $D_k$  с четными  $k \geq 4$  и с одной вещественной ветвью ( $D_k^+$ ).* Локальным диффеоморфизмом такая особенность приводится к нормальной форме  $xy^2 + x^{k-1} = 0$ . Любое ее распускание топологически эквивалентно одному из распусканий, показанных на рис. 22. Строятся эти распускания тоже из распусканий рис. 19 (верхней правой его части).

*Особенности серии  $D_k$  с нечетными  $k \geq 5$ .* Локальным диффеоморфизмом такая особенность приводится к нормальной форме  $xy^2 - x^{k-1} = 0$ . Любое ее распускание топологически эквивалентно одному из распусканий, показанных на рис. 23. Строятся они тем же способом по распусканиям нижней части рис. 19.

*Особенность  $E_6$ .* Локальным диффеоморфизмом приводится к нормальной форме  $x^4 - y^3 = 0$ . Замечу, что все ростки особенности  $E_6$  полуквазиоднородны, так что диаграмма Ньютона делается отрезком, соединяющим точки  $(4, 0)$  и  $(0, 3)$ , при помощи поворота координатных осей. Любое ее распускание топологически эквивалентно одному из пяти распусканий, показанных на рис. 24. Все распускания рис. 24 получаются как квазиоднородные. Необходимые для построения квазиоднородных распусканий кривые являются в этом случае неособыми кривыми степени 4, касающимися с максимальной возможной кратностью (т. е. биквадратично) бесконечно удаленной прямой в точке  $(0:0:1)$ . Такие кривые можно получить, например, посредством малых возмущений кривой, распадающейся на четыре прямые. Построение показано на рис. 25. Возмущение состоит каждый раз в добавлении к уравнению объединения четырех прямых, в число которых входит  $x_0 = 0$ , произведения четырех линейных форм, определяющих прямые, которые проходят через точку  $(0:0:1)$ .

*Особенность  $E_7$ .* Локальным диффеоморфизмом приводится к нормальной форме  $y^3 - x^2y = 0$ . Как и  $E_6$ , всегда полуквазиоднородна. Любое распускание топологически эквивалентно одному из 10 распусканий, показанных на рис. 26. Все распускания рис. 26 получаются как квазиоднородные. Необходимые для построения кривые — неособые кривые степени 4, которые кубически касаются прямой  $x_0 = 0$  в точке  $(0:0:1)$ . Например, их можно получить, как и в случае  $E_6$ , посредством малых возмущений кривой, распадающейся на 4 прямые. На рис. 27 показано построение одной из этих кривых, дающей верхние распускания рис. 26.

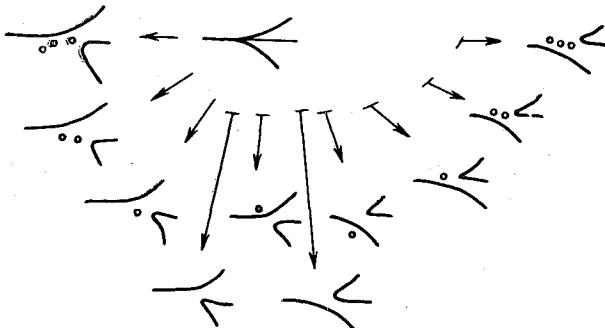


Рис. 26.

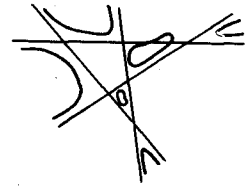


Рис. 27.

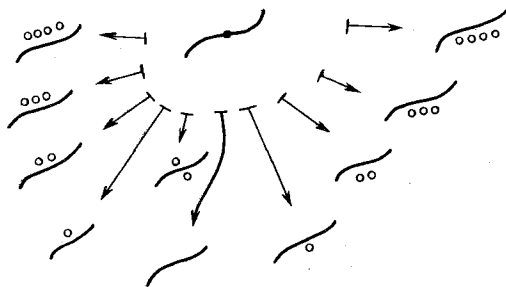
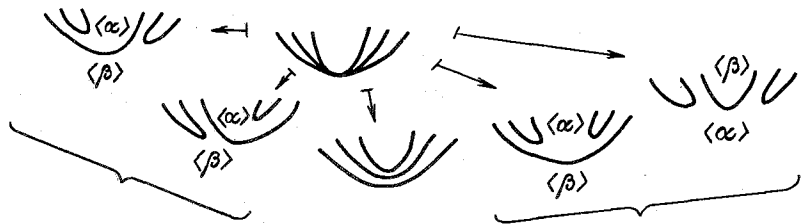


Рис. 28.



$\alpha$	=	4	0	3	0	2	1	0	1	0	0
$\beta$	=	0	4	0	3	0	1	2	0	1	0

$\alpha$	=	3	2	1	0	0
$\beta$	=	0	0	0	1	0

Рис. 29.

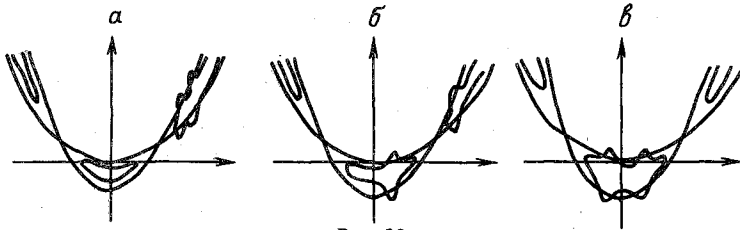


Рис. 30.

Особенность  $E_8$ . Локальным диффеоморфизмом приводится к нормальной форме  $x^5 - y^3 = 0$ . Всегда полуквазиоднородна. Любое ее распускание топологически эквивалентно одному из распусканий, показанных на рис. 28. Все распускания рис. 28 получаются как квазиоднородные. Необходимые для их построения кривые — кривые степени 5 с единственной особенностью, расположенной в  $(0:0:1)$ , имеющей тип  $A_4$  и полуквазиоднородной относительно канонической системы координат. Такие кривые можно получить, например, посредством малых

возмущений кривых, распадающихся на прямую  $x_0=0$ , и кривых степени 4, построенных для распусканий особенности  $E_7$ . Возмущение состоит в прибавлении к уравнению распадающейся кривой произведения уравнений пяти прямых, отличных от  $x_0=0$  и проходящих через  $(0:0:1)$ .

**4.2. Три квадратично касающиеся ветви ( $J_{10}$ ).** Росток кривой типа  $J_{10}$  представляет собой три неособые ветви, квадратично касающиеся друг друга. Любой росток этого типа полуквазиоднороден. Его диаграмма Ньютона лежит на отрезке  $\Gamma$ , соединяющем точки  $(6, 0)$  и  $(0, 3)$ , если ось абсцисс касается в начале координат всех трех ветвей. С вещественной точки зрения особенности типа  $J_{10}$  бывают двух сортов: особенности типа  $J_{10}^-$ , в которых все три ветви вещественны, и особенности типа  $J_{10}^+$ , в которых одна ветвь вещественная, а две другие — мнимые сопряженные друг другу. Пусть  $f(x, y)=0$  — уравнение кривой с особенностью  $J_{10}^-$  в начале координат, и пусть ось абсцисс касается в начале координат проходящих через него ветвей кривой  $f(x, y)=0$ . Тогда  $f^\Gamma(x, y) = \beta(y - a_1x^2) \times X(y - a_2x^2)(y - a_3x^2)$  для некоторых вещественных  $\beta \neq 0, a_1 > a_2 > a_3$ . Кривые  $y = a_i x^2$  аппроксимируют вблизи начала координат ветви кривой  $f(x, y)=0$ . Числа  $a_i$  имеют следующий геометрический смысл:  $2a_i$  есть кривизна  $i$ -й ветви кривой  $f(x, y)=0$  в  $(0, 0)$ . Диффеоморфизм аффинной плоскости, определяемый формулой  $(x, y) \mapsto (x, ky + lx^2)$ , сохраняет полуквазиоднородность ростка кривой  $f(x, y)$  относительно стандартной системы координат, но изменяет кривизны ветвей: кривую  $y = a_i x^2$  это преобразование переводит в  $y = (ka_i + l)x^2$ . Таким образом, оно позволяет сделать две кривизны равными 1 и 2. Более того, можно показать, что любой росток типа  $J_{10}^-$  диффеоморфен ростку кривой, определяемой уравнением

$$(y - x^2)(y - 2x^2)(y - ax^2) = 0$$

с  $a > 2$ . Ростки типа  $J_{10}^+$  диффеоморфны росткам, определяемым уравнениями

$$(y - x^2)(y^2 + ax^4) = 0$$

с  $a > 0$ .

Следующие две теоремы дают полную топологическую классификацию распусканий особенностей типа  $J_{10}^-$ .

**4.2.A. Любое распускание ростка кривой, принадлежащего типу  $J_{10}^-$ , топологически эквивалентно одному из 31 квазиоднородных распусканий, показанных на рис. 29.**

**4.2.B. Любой росток кривой, принадлежащий типу  $J_{10}^-$ , допускает квазиоднородные распускания всех 31 топологических типов, показанных на рис. 29.**

Теорема 4.2.A по существу относится к запретам; она здесь доказываться не будет, но мы вернемся к ней, когда займемся построениями неособых кривых степени 6 (см. п. 5.1). Там она будет выведена из топологических запретов на топологию неособых кривых.

Для доказательства теоремы 4.2.B нужно построить такие кривые  $g(x, y) = 0$  с многоугольником Ньютона, содержащимся в треугольнике с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$  и  $(0, 3)$ , чтобы усечение  $g^\Gamma(x, y)$  было равно  $(y - a_1x^2)(y - a_2x^2)(y - a_3x^2)$ , где  $a_1 > a_2 > a_3$  — любые наперед заданные вещественные числа, и чтобы множество вещественных точек кривой  $g(x, y) = 0$  было расположено в  $\mathbb{R}P^2$  так, как показано на рис. 29.

Кривую, изображенную в середине рис. 29 под изображением распускаемой особенности, можно получить, взяв уравнение  $(y - a_1(x^2 + 1))(y - a_2(x^2 + 1)) \times X(y - a_3(x^2 + 1)) = 0$  или близкое к нему неприводимое уравнение. Остальные кривые строятся способом, который можно считать версией способа Гильберта

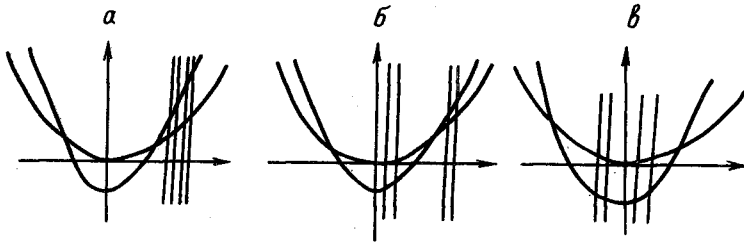


Рис. 31.

(см. п.1.10). Берем объединение парабол  $y = kx^2 - 1$  и  $y = lx^2$  с  $k > l > 0$  и возмущаем так, как показано на рис. 30, а затем добавляем к тому, что получилось, одну из исходных парабол и производим малое возмущение объединения (кривой степени шесть). Легко видеть, что при различных малых возмущениях получаются оставшиеся 30 кривых рис. 29.

Теперь осталось проследить за  $g\Gamma$ . При этом построение, намеченное выше, придется повторить фактически заново.

**4.2.В. Л е м м а.** Для любых четырех чисел  $a_0 > a_1 > a_2 > a_3 > 0$  с  $a_0 + a_3 = a_1 + a_2$  и для каждого из рис. 30, а-в существует такой вещественный многочлен  $h$  от двух переменных, что:

(i) многоугольник Ньютона  $\Delta(h)$  есть треугольник, ограниченный отрезками координатных осей и отрезком  $\Gamma$ , соединяющим точки  $(0, 2)$  и  $(4, 0)$ ;

(ii)  $h^\Gamma(x, y) = (y - a_1x^2)(y - a_2x^2)$ ;

(iii) кривая  $h(x, y) = 0$  неособа и располагается относительно парабол  $y = a_0x^2 - 1$  и  $y = a_3x^2$  так, как показано на рис. 30.

**Доказательство.** Обозначим многочлены  $y - a_0x^2 + 1$  и  $y - a_3x^2$  через  $p_0$  и  $p_3$ . Ясно, что параболы  $p_0(x, y) = 0$  и  $p_3(x, y) = 0$  пересекаются в двух вещественных точках. Положим  $l_i(x, y) = x - \beta_i$  с  $i = 1, \dots, 4$  и  $h_t = p_0p_3 + tl_1l_2l_3l_4$ . Ясно, что  $h_t^\Gamma(x, y) = (y - a_0x^2)(y - a_3x^2) + tx^4$ . С другой стороны,  $h_t^\Gamma$  разлагается на множители:  $h_t^\Gamma(x, y) = (y - \gamma_1x^2)(y - \gamma_2x^2)$ . При этом  $\gamma_1 + \gamma_2 = a_0 + a_3$  и  $\gamma_1\gamma_2 = a_0a_3 + t$ . Так как  $a_0 + a_3 = a_1 + a_2$  и  $a_0 > a_1 > a_2 > a_3$ , то  $a_1a_2 > a_3a_0$  и для  $t = a_1a_2 - a_0a_3 > 0$  многочлен  $h_t^\Gamma$  равен  $(y - a_1x^2)(y - a_2x^2)$ . Таким образом,  $h_{a_1a_2 - a_0a_3}$  удовлетворяет условиям (i) и (ii) независимо от выбора чисел  $\beta_1, \dots, \beta_4$ .

Покажем, что последние можно выбрать так, чтобы этот многочлен удовлетворял условию (iii). Если прямые  $l_i(x, y) = 0$  располагаются относительно парабол  $p_j(x, y) = 0$  так, как на рис. 31, то существует такое  $\epsilon > 0$ , что для  $t \in (0, \epsilon]$  кривая  $h_t(x, y) = 0$  состоит из трех компонент и располагается относительно парабол  $p_j(x, y) = 0$  так, как на рис. 30. Покажем, что, выбирая должным образом прямые  $l_i(x, y) = 0$ , можно добиться, чтобы роль  $\epsilon$  могло исполнить любое число из промежутка  $(0, (a_0^2 + a_3^2)/2)$ , и в частности  $a_1a_2 - a_0a_3$ .

Поскольку многоугольник  $\Delta(h_t)$  обладает только одной внутренней точкой, род кривой, определяемой многочленом  $h_t$ , не превосходит единицы (см. 3.1). Поэтому при возрастании параметра  $t$  от нуля первая перестройка кривой  $h_t(x, y) = 0$  должна либо уменьшить число компонент, либо дать распадающуюся кривую. Последнее не может произойти при  $t \in (0, +\infty)$ . В самом деле, рассмотрение усечения  $h_t^\Gamma$  показывает, что кривые, на которые может распасться кривая  $h_t(x, y) = 0$ , являются либо двумя мнимыми сопряженными кривыми, либо двумя параболой. Первое невозможно, поскольку для любого  $t > 0$  любая прямая  $x = \gamma$  с  $\gamma \in (\beta_1, \beta_2)$  пересекается с кривой  $h_t(x, y) = 0$  в двух вещественных точках, а второе — поскольку вертикальная прямая, проходящая через точку пересечения парабол  $p_0(x, y) = 0$  и  $p_3(x, y) = 0$ , не пересекается с кри-

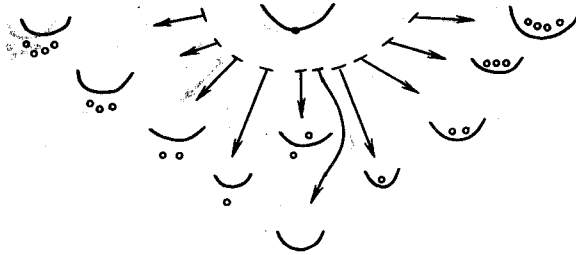


Рис. 32.

вой  $h_t(x, y) = 0$  при  $t > 0$ . При  $t \in (0, (a_0^2 + a_3^2)/2)$  сохраняются ветви, уходящие на бесконечность. Располагая прямые  $l_i(x, y) = 0$  вблизи точки пересечения парабол  $p_0(x, y) = 0$  и  $p_3(x, y) = 0$ , можно добиться, чтобы в наперед заданной окрестности этой точки при всех  $t \in (0, (a_0^2 + a_3^2)/2)$  проходили две ветви кривой  $h_t(x, y) = 0$  и, значит, чтобы сохранялся овал и никаких перестроек не было. •

Завершение доказательства теоремы 4.2.Б. Как уже говорилось, кривую, изображенную в середине рис. 29, определяет уравнение  $(y - a_1 \times (x^2 + 1))(y - a_2(x^2 + 1))(y - a_3(x^2 + 1)) = 0$  (и близкие к нему неприводимые уравнения). Остальные кривые рис. 29 реализуются многочленами, которые получаются в результате малых возмущений произведений  $p_j h$ , где  $p_j$  и  $h$  — такие, как в 4.2.В. Возмущения осуществляются прибавлением многочленов вида  $\sum_{i=1}^5 (x - \gamma_i)$ . При таком возмущении не изменяются члены, отвечающие точкам стороны многоугольника Ньютона, которая соединяет точки  $(6, 0)$  и  $(0, 3)$ .

Таким образом, однако, получаются распускания не всех ростков типа  $J_{10}^-$ . В случае, когда возмущаются многочлены  $p_3 h$ , получаются распускания ростков типа  $J_{10}^-$ , у которых все ветви выпуклы в одну сторону и имеют произвольные кривизны (одного знака). Дело в том, что росток типа  $J_{10}^-$ , определяемый многочленом с  $\Gamma$ -усечением  $(y - a_1 x^2)(y - a_2 x^2)(y - a_3 x^2)$ , есть объединение трех ветвей с кривизнами  $2a_j$ . С другой стороны, в 4.2.В числа  $a_1, a_2, a_3$  подчинены только ограничению  $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ . В случае, когда возмущаются многочлены  $p_0 h$ , мы получаем распускания только тех ростков типа  $J_{10}^-$ , у которых все ветви выпуклы в одну сторону и, более того, их кривизны подчиняются ограничениям  $\kappa_0 > \kappa_1 > \kappa_2 > 0$  и  $\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_0 > 0$ , поскольку в 4.2.В набор чисел  $a_0, a_1, a_2$  подчиняется ограничениям  $a_0 > a_1 > a_2 > 0$  и  $a_1 + a_2 - a_0 = a_3 > 0$ . В случае ростка типа  $J_{10}^-$  с произвольным набором кривизн  $\kappa_0 > \kappa_1 > \kappa_2$  выберем такое  $\delta$ , чтобы числа  $k_i = \kappa_i + \delta$  удовлетворяли неравенствам  $k_2 > 0$  и (на всякий случай)  $k_1 + k_2 - k_0 > 0$ , затем при помощи описанной выше конструкции построим многочлен, дающий нужное распускание ростка с кривизнами  $k_0, k_1, k_2$ , и, наконец, применим к этому многочлену преобразование  $(x, y) \mapsto (x, y + \delta/2x^2)$ . Это преобразование оставляет, как легко видеть, многоугольник Ньютона содержащимся в треугольнике с вершинами  $(6, 0)$ ,  $(0, 3)$  и  $(6, 0)$  и не изменяет топологического типа распускания. •

Следующие теоремы 4.2.Г и 4.2.Д дают полную топологическую классификацию распусканий особенностей типа  $J_{10}^+$ . Эти теоремы аналогичны теоремам 4.2.А и 4.2.Б, и, поскольку ниже они не применяются, мы не будем заниматься их доказательствами.

**4.2.Г.** Любое распускание ростка кривой, принадлежащего типу  $J_{10}^+$ , топологически эквивалентно одному из 10 квазиоднородных распусканий, показанных на рис. 32.

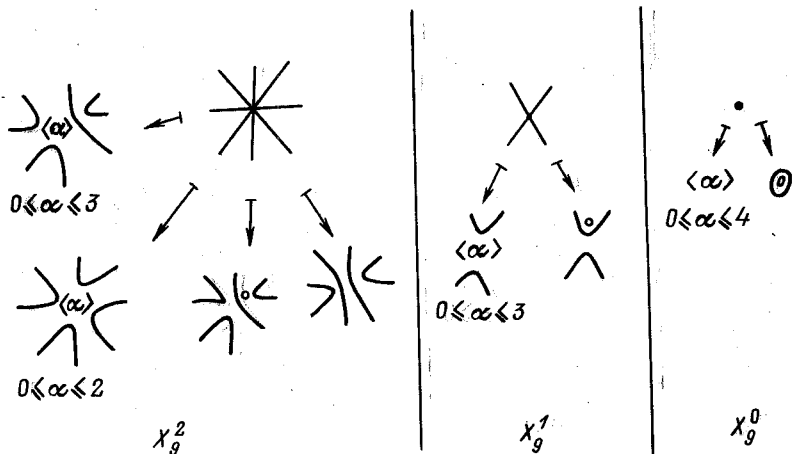


Рис. 33.

4.2.Д. Любой росток кривой, принадлежащий типу  $J_{10}^+$ , допускает квазиоднородные распускания всех 10 типов, показанных на рис. 32.

4.3. Распускания невырожденных  $r$ -кратных точек. Напомним, что невырожденная  $r$ -кратная точка плоской кривой — это точка, в которой кривая состоит из  $r$  неособых ветвей, трансверсально пересекающих друг друга в этой точке. Любой росток этого типа полуквазиоднороден относительно любой системы координат с началом в такой точке. В случаях  $r=2$  и  $3$  — это рассмотренные выше особенности типов  $A_1$  и  $D_4$ . Четырехкратные невырожденные особенности обозначаются символом  $X_9$ , а пятикратные — символом  $N_{16}$ .

Распускания невырожденных  $r$ -кратных особенностей, как было показано в п.3.5, тесно связаны с неособыми плоскими аффинными вещественными алгебраическими кривыми степени  $r$ , проективизации которых неособы и трансверсальны бесконечно удаленной прямой. В частности, всякая такая кривая дает квазиоднородное распускание ростков этого типа. При этом распускания данного ростка получаются из аффинных кривых, направления асимптот которых совпадают с направлениями прямых, касательных к ветвям распускаемого ростка, — таков очевидный геометрический смысл совпадения коэффициентов, отвечающих точкам диаграммы Ньютона.

Вещественные невырожденные четырехкратные точки бывают трех сортов: особенности типа  $X_9^2$ , в которых все четыре ветви вещественны, а две — мнимые сопряженные; и особенности типа  $X_9^0$ , в которых все четыре ветви мнимые.

Следующие две теоремы дают полную топологическую классификацию распусканий особенностей типа  $X_9$ .

4.3.А. Любое распускание ростка плоской кривой, принадлежащего типу  $X_9$ , топологически эквивалентно одному из квазиоднородных распусканий, показанных на рис. 33.

4.3.Б. Любой росток плоской кривой, принадлежащий типу  $X_9$ , допускает квазиоднородные распускания всех топологических типов соответствующей части рис. 33 (с соответствующим числом вещественных ветвей), а также квазиоднородные распускания с топологическими типами, получающимися из изображенных на рис. 33 в результате поворотов плоскости на углы, кратные  $\pi/4$ .

Теоремы 4.3.А и Б легко получаются из известных результатов о топологии кривых степени 4. Как и нульмодальные особенности, особенности типа  $X_9$  слишком просты, чтобы применение их распусканий могло само по себе дать что-то



новое по сравнению с классическими методами при построении неособых плоских проективных кривых. Так что теоремы 4.3.А и Б ниже не применяются и были приведены лишь для полноты.

Распускания невырожденных пятикратных особенностей уже представляют значительный интерес с нашей точки зрения. Соответствующие проблемы классификации плоских аффинных вещественных кривых степени 5 полностью решены. Именно Полотовский [19, 20] расклассифицировал с точностью до изотопий кривые степени 6, распадающиеся в объединения неособых трансверсальных друг другу кривых степеней 5 и 1 (и, значит, неособые аффинные кривые степени 5, имеющие 5 асимптот (вещественных или мнимых) с попарно различными направлениями), а Шустин [31] доказал, что при любом фиксированном изотопическом типе такой распадающейся кривой степени 6 реализуются все расположения точек их пересечения на прямой (т. е. при данном изотопическом типе аффинной кривой степени 5 указанного выше вида реализуются все наборы асимптотических направлений). Вместе эти два результата и известные запреты на неособые кривые приводят к полной топологической классификации распусканий невырожденных пятикратных точек, которая сформулирована ниже в виде теорем 4.3.В и Г.

*4.3.В. Любое распускание ростка плоской кривой, принадлежащего типу  $N_{16}$ , топологически эквивалентно одному из квазиоднородных распусканий, показанных на рис. 34.*

*4.3.Г. Любой росток плоской кривой, принадлежащий типу  $N_{16}$ , допускает квазиоднородные распускания всех топологических типов соответствующей части рис. 34 (с соответствующим числом вещественных ветвей), а также квазиоднородные распускания с топологическими типами, получающимися из этих в результате поворотов плоскости на углы, кратные  $2\pi/5$ .*

Сколько-нибудь полное доказательство теоремы 4.3.Г занимает довольно много места. Ограничусь поэтому лишь небольшим его фрагментом: построением двух аффинных кривых степени 5, которые дают два из четырех квазиоднородных распусканий, позволяющих строить  $M$ -кривые. Все четыре эти распускания показаны на рис. 35. Ниже строятся кривые, доставляющие распускания, которые показаны на рис. 35 справа. Я привожу два построения. Одно из них дает распускание с  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 6$  и осуществляется способом Гильберта, другое дает оба распускания и производится новым методом. Первое построение в некотором смысле содержится во втором и рассматривается здесь главным образом для того, чтобы продемонстрировать различия методов. Оно показано на рис. 36.

Для второго построения возьмем объединение двух вещественных коник  $C_1, C_2$ , касающихся друг друга в двух вещественных точках, и прямой  $L$ , касающейся  $C_1$  и  $C_2$  в одной из их общих точек (рис. 37). Разместив объединение этих кривых так, чтобы их общие касательные оказались координатными осями  $x_0 = 0$  и  $x_2 = 0$ , а общие точки коник — точками  $(1:0:0)$  и  $(0:0:1)$ , получим кривую степени 5 с двумя особыми точками, полуквазиоднородными относительно системы координат, типов  $A_5^-$  и  $J_{10}^-$ . Их квазиоднородные распускания дают неособые проективные кривые, которые проективным преобразованием, переводящим прямую  $M$  в бесконечно удаленную прямую  $x_0 = 0$  (рис. 36), превращаются в требуемые кривые.

Для невырожденных  $r$ -кратных особых точек плоских кривых задача топологической классификации распусканий не решена ни при каком  $r \geq 6$ . Некоторые результаты для  $r = 6$  были получены Численко [29]. При больших  $r$  задача топологической классификации распусканий необозрима. Однако частичные результаты бывают и доступны, и полезны. Например, ниже, в п.5.4, нам понадобятся распускания, доставляемые следующей теоремой.

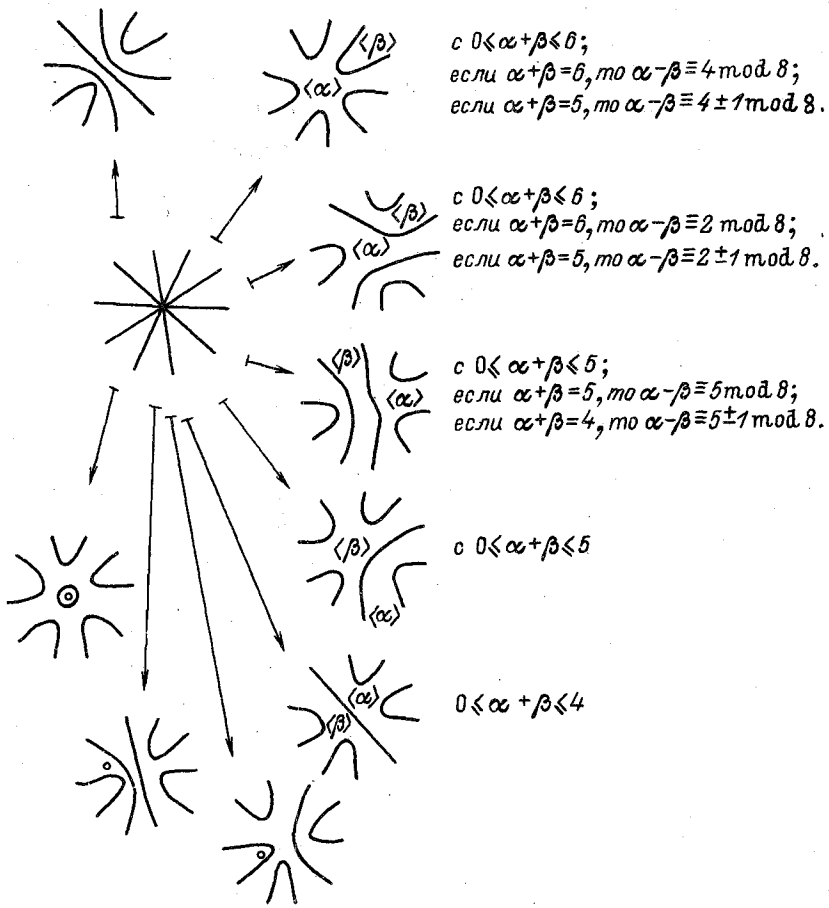


Рис. 34.

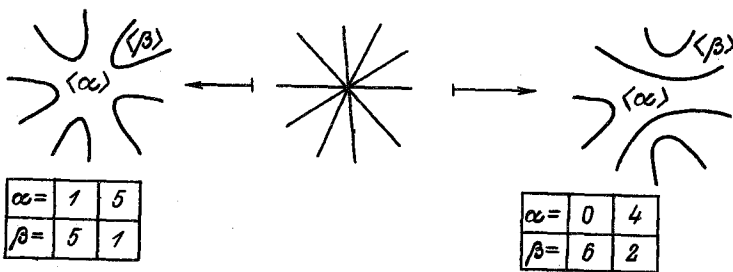


Рис. 35.

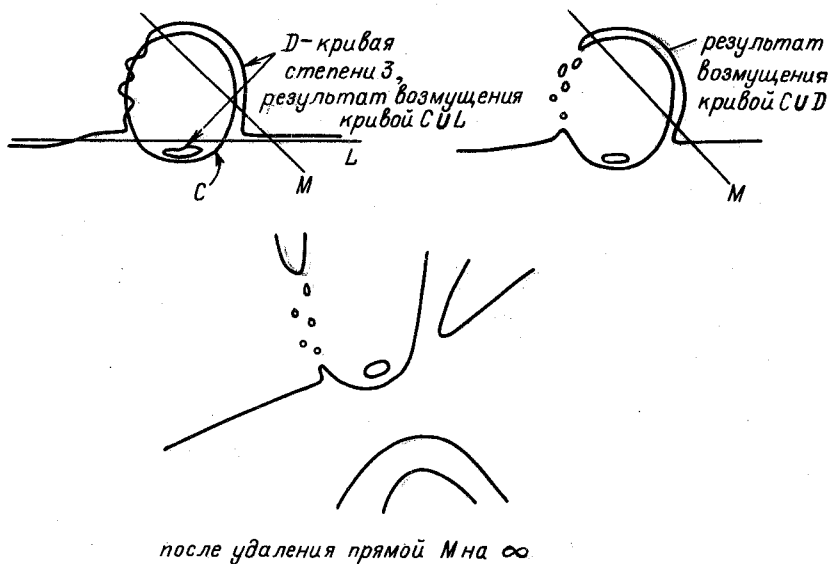


Рис. 36.

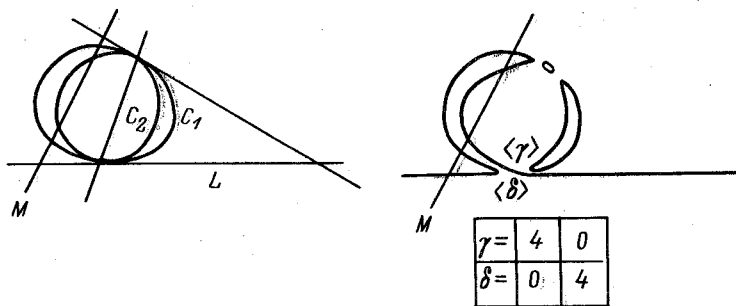


Рис. 37.

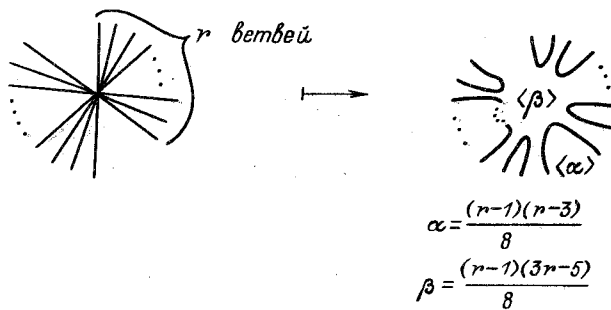


Рис. 38.

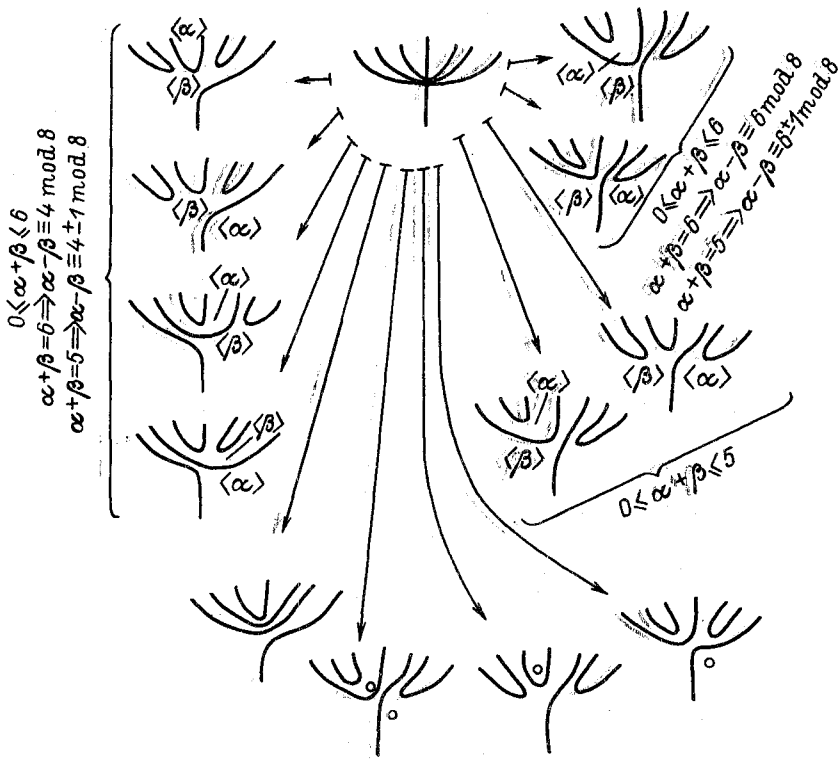


Рис. 39.

4.3.Д. Для любого нечетного  $r$  любой росток невырожденной  $r$ -кратной особенности плоской кривой, в котором все ветви вещественны, допускает квази-однородное распускание, показанное на рис. 38.

Аффинные кривые степени  $r$ , нужные для доказательства этой теоремы, строятся методом Харнака (см. п.1.6). Проективная кривая нечетной степени  $r$  со схемой  $\langle J \parallel (r-1)(r-2)/2 \rangle$ , доставляемая построением Харнака, подвергается проективному преобразованию, переводящему порождающую прямую на бесконечность.

4.4. Три перечеркнутые квадратично касающиеся ветви (особенность  $Z_{15}$ ). В этом пункте рассматриваются распускания особых точек, через которые проходят четыре неособые ветви, три из них квадратично касаются друг друга в этой точке, а четвертая трансверсально пересекает остальные три. Имеются две вещественные формы таких особенностей:  $Z_{15}^-$  с четырьмя вещественными ветвями и  $Z_{15}^+$  с двумя вещественными и двумя мнимыми сопряженными ветвями (ясно, что мнимые ветви обязательно касаются друг друга).

Особенность типа  $Z_{15}$  полуквазиоднородна относительно любой системы координат, одна из осей которой касается в этой точке ветвей, касающихся друг друга. Если эта ось — ось абсцисс и особенность имеет тип  $Z_{15}^-$ , то усечение многочлена, задающего в этой ситуации кривую, на отрезок, соединяющий точки  $(7, 0)$  и  $(1, 3)$ , имеет вид  $\beta x(y - a_1 x^2)(y - a_2 x^2)(y - a_3 x^2)$ , где  $a_1, a_2, a_3$  — попарно различные вещественные числа, которые интерпретируются как половины кривизн ветвей, касающихся оси абсцисс.

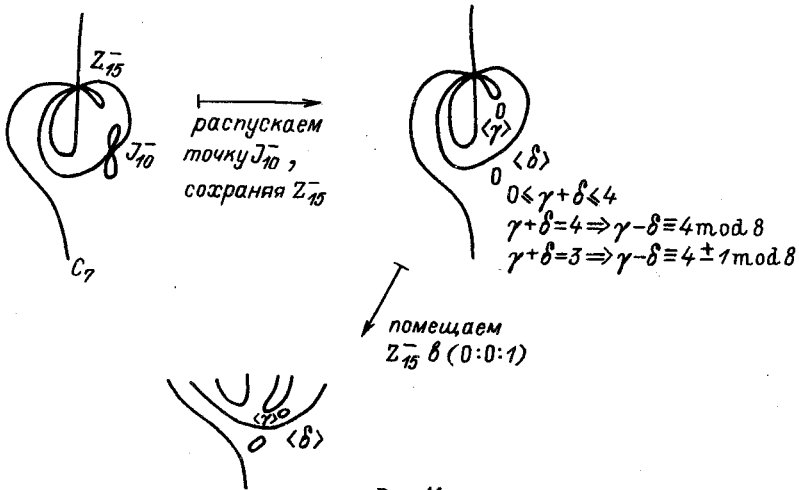
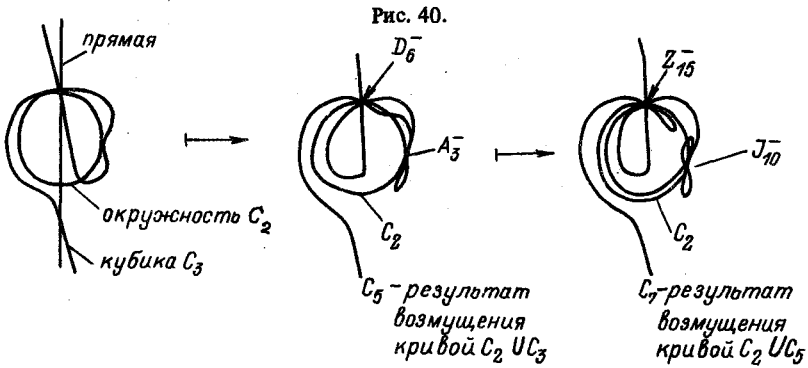
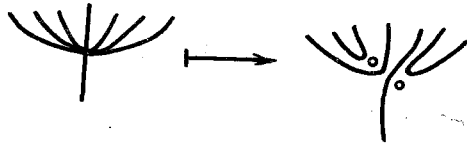


Рис. 41.

Хотя полная топологическая классификация распусканий точек типа  $Z_{15}$  пока неизвестна, многое в этом направлении уже сделано. Все известные мне результаты получены Корчагиным [40]. По-видимому, нет никаких принципиальных препятствий к завершению топологической классификации распусканий особенностей этого семейства. Сейчас остается, вероятно, лишь доказать некоторые запреты и в случае  $Z_{15}$  доказать, что любое распускание топологически эквивалентно некоторому квазиоднородному. Здесь ограничимся только формулировкой результата, относящегося к  $Z_{15}$ .

4.4.A. Любой росток типа  $Z_{15}$  допускает квазиоднородные распускания, показанные на рис. 39, а также квазиоднородные распускания, симметричные им относительно вертикальной прямой.

Доказательство этой теоремы содержится в статье Корчагина [40], за исключением одного пункта: для распускания, показанного на рис. 40, Корчагин не доказывает его применимости в случае ростка с произвольным набором кривизн.

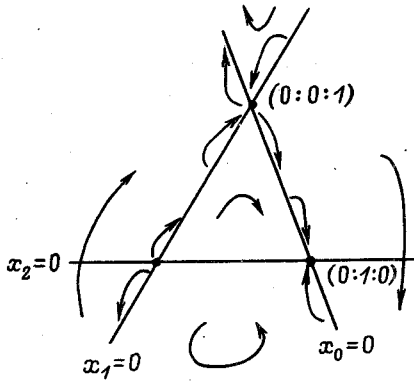


Рис. 42.

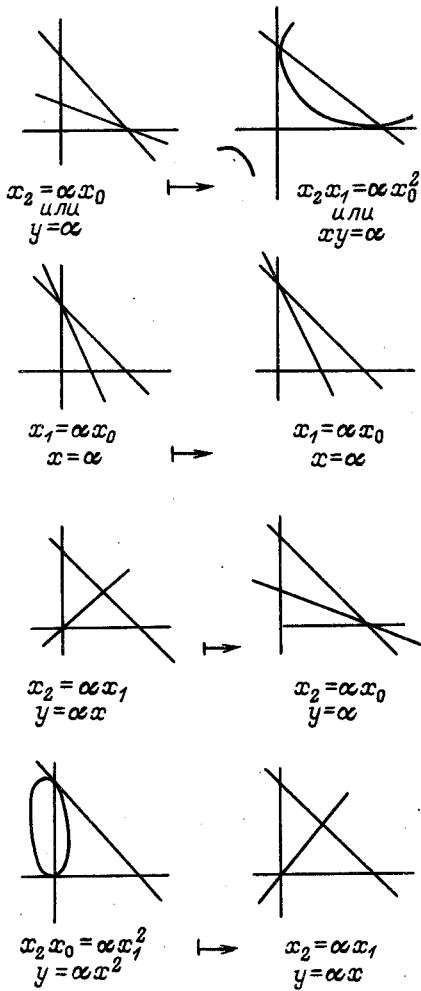


Рис. 44.

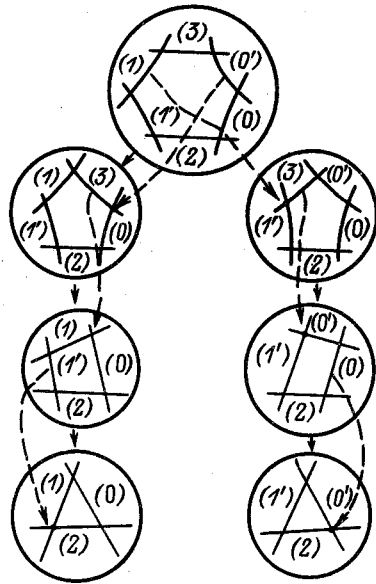


Рис. 43.

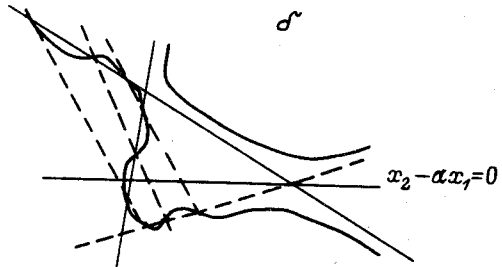
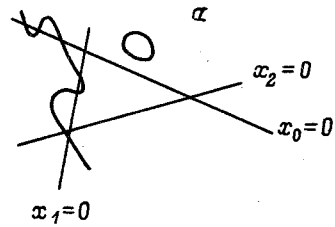


Рис. 45.

Однако приведенное Корчагиным построение позволяет без труда сделать это. На рис. 41 показано построение кривых, необходимых для получения части распусканий рис. 39. Оно производится слегка модифицированным методом Гильберта с последующим распусканием точки типа  $J_{10}^-$ .

**4.5. Гиперболизм.** В последующих построениях важную роль играет квадратичное бирациональное преобразование плоскости, применявшееся еще Гюйгенсом [37] и Ньютоном [16]. Называть его, следуя Ньютону, будем *гиперболизмом*, а обозначать — символом  $hy$ . В однородных координатах оно определяется формулой

$$hy(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0 x_1 : x_1^2 : x_0 x_2),$$

а в аффинных координатах  $x = x_1/x_0, y = x_2/x_0$  — формулой

$$hy(x, y) = (x, y/x).$$

Обратное преобразование действует по формуле

$$hy^{-1}(x_0 : x_1 : x_2) = (x_0^2 : x_0 x_1 : x_1 x_2),$$

или, в аффинных координатах,

$$hy^{-1}(x, y) = (x, ux).$$

$hy^{-1}$  получается из  $hy$  сопряжением посредством проективной инволюции  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 : x_0 : x_2)$  (т. е.  $(x, y) \mapsto (1/x, y/x)$ ).

Фундаментальными точками гиперболизма (т. е. точками, где он как отображение не определен) являются  $(1 : 0 : 0)$  и  $(0 : 0 : 1)$ , причем последняя двукратно. Точка  $(1 : 0 : 0)$  раздувается в прямую  $x_1 = 0$ , а точка  $(0 : 0 : 1)$  — в прямую  $x_0 = 0$ . Сжимаемым гиперболизмом прямых тоже две: прямая  $x_1 = 0$  сжимается в точку  $(0 : 0 : 1)$ , а прямая  $x_0 = 0$  — в точку  $(0 : 1 : 0)$ . Множеством неподвижных точек гиперболизма служит прямая  $x_2 = 0$ . Первый и четвертый квадранты отображаются гиперболизмом каждый на себя, а второй и третий — друг на друга. На рис. 42 показана схема действия гиперболизма. На рис. 43 показано разложение гиперболизма в композицию трех  $\sigma$ -процессов и трех обратных  $\sigma$ -процессов. На рис. 44 показано, во что переходят при гиперболизме некоторые кривые степени  $\leq 2$ . Название гиперболизм происходит от первого из этих примеров, в котором прямые превращаются в гиперболы.

Кривая  $f(x, y) = 0$  при гиперболизме переходит в кривую  $f(x, ux) = 0$ . Заметим, что многоугольник Ньютона многочлена  $g(x, y) = f(x, ux)$  получается из многоугольника Ньютона многочлена  $f$  посредством сдвига вдоль оси абсцисс  $(x, y) \mapsto (x, y + x)$ .

**4.6. Несколько распусканий краевых особенностей типов  $F_{1,0}$  и  $F_{2,0}$ .** В этом пункте строятся многочлены, которые дают распускания особенностей типов  $D_4$  и  $J_{10}$ . Особое внимание уделяется, однако, расположению кривых относительно выделенной прямой, проходящей через распускаемую особую точку. Так что фактически здесь строятся распускания краевых особенностей типов  $F_{1,0}$  и  $F_{2,0}$  (см. [3], п.17.4).

**4.6.A. Существует неособая проективная кубическая кривая, расположенная относительно координатных осей так, как показано на рис. 45, а и пересекающая ось  $x_1 = 0$  в любых наперед заданных трех точках, а ось  $x_0 = 0$  — в любых наперед заданных трех точках, лежащих в области  $x_1 x_2 < 0$ .**

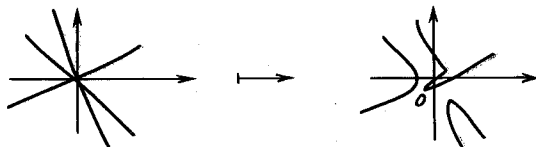


Рис. 46.

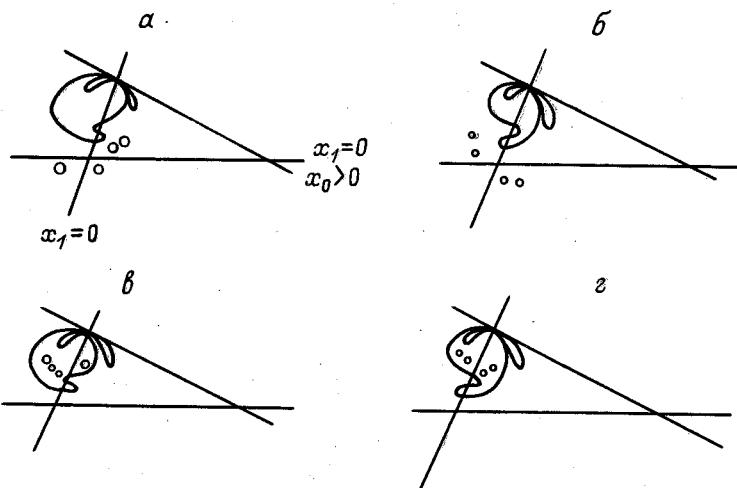


Рис. 47.

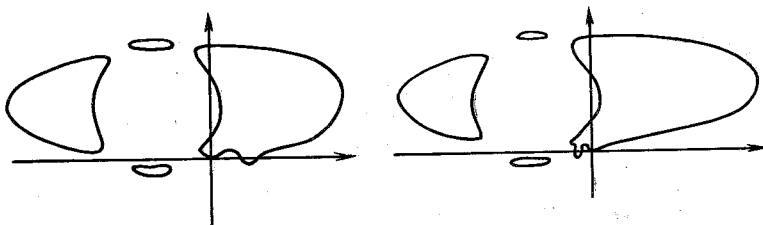


Рис. 48.

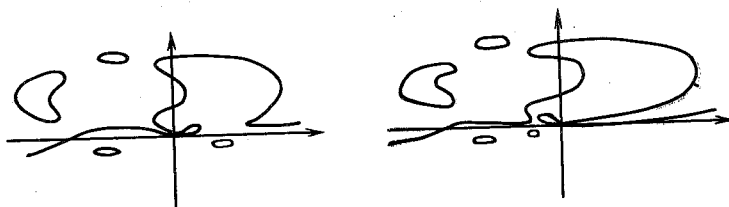


Рис. 49.



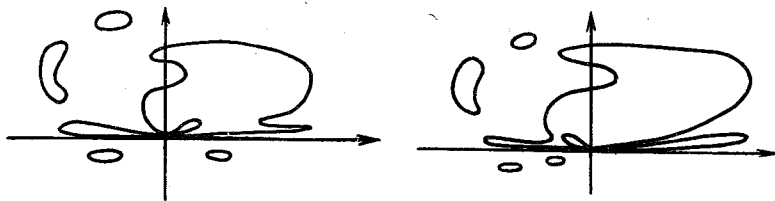


Рис. 50.

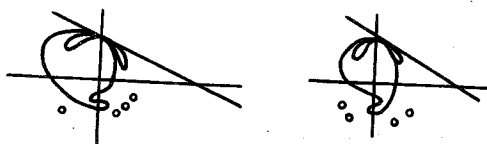


Рис. 51.

**Доказательство.** Возмутим кривую  $x_0 x_1 (x_2 - \alpha x_0) = 0$  так, как показано на рис. 45, б. Ясно, что коэффициент  $\alpha$  и возмущение можно выбрать так, чтобы получилась требуемая кривая. ●

**4.6.Б. Следствие.** Любой росток типа  $D_4^-$  (т. е. невырожденная тройная особенность) плоской кривой в начале координат, ветви которого трансверсальны оси ординат, допускает такое квазиоднородное распускание, показанное на рис. 46, что возмущенная кривая пересекает ось ординат в трех точках вблизи начала координат с отношением расстояний между соседними точками, равным любому наперед заданному числу. ●

**4.6.В. Лемма.** Существуют кривые, многоугольником Ньютона которых является треугольник с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$  и  $(0, 3)$ , располагающиеся относительно осей координат так, как показано на рис. 47.

**Доказательство.** Объединение окружности  $(x+5)^2 + (y+5)^2 = 36$  и прямых  $y=0$  и  $y=10$  возмутим двумя способами, показанными на рис. 48. Затем к получившимся кривым добавим ось абсцисс и объединение возмутим так, как показано на рис. 49. Еще раз добавим ось абсцисс и возмутим, см. рис. 50. Теперь сделаем проективные преобразования: для левой кривой рис. 50 —  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_2 : -x_1 : x_0)$ , а для правой —  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_2 : x_1 : x_0)$ . В результате получаются кривые, изображенные на рис. 47, а и б. Подвергнем теперь их проективному преобразованию  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2 - \alpha x_0)$  с такими  $\alpha$ , чтобы получились кривые рис. 51. Теперь применим гиперболизм. Получим кривые рис. 52. Подвергнув их подходящим проективным преобразованиями, получим кривые, изображенные на рис. 47, в и г. ●

**4.6.Г.** Для любых чисел  $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$  и  $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3$  существует такой вещественный многочлен  $f$  от двух переменных, что

- (i)  $\Delta(f)$  есть треугольник с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(6, 0)$ ,  $(3, 0)$ ;
- (ii) кривая  $x_0^6 f(x_1/x_0, x_2/x_0) = 0$  располагается относительно координатных осей так же, как наперед заданная кривая леммы 4.6.В;
- (iii) если  $\Gamma$  — отрезок, соединяющий точки  $(0, 3)$  и  $(6, 0)$ , то  $f^\Gamma(x, y) = (y - \alpha_1 x^2)(y - \alpha_2 x^2)(y - \alpha_3 x^2)$ ;
- (iv) если  $\Xi$  — отрезок, соединяющий точки  $(0, 0)$  и  $(0, 3)$ , то  $f^\Xi(x, y) = (y - \beta_1)(y - \beta_2)(y - \beta_3)$ .

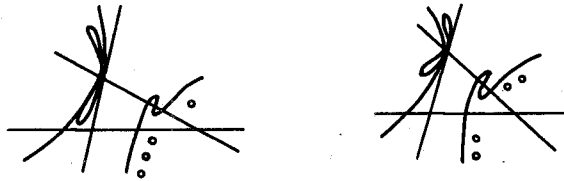


Рис. 52.

**Доказательство.** В силу леммы 4.6.В существует многочлен  $f$ , удовлетворяющий требованиям (i), (ii). Посредством параллельных переносов  $(x, y) \mapsto (x+c, y)$  вдоль оси абсцисс (не изменяющих многочлена  $f^\Gamma$ ) можно добиться, чтобы кривая  $f(x, y) = 0$  высекала на оси ординат тройку точек с любым наперед заданным отношением расстояний между соседними точками. Выполним такой параллельный перенос, чтобы получилось такое же отношение, как у точек  $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ . Посредством параллельного переноса  $(x, y) \mapsto (x, y+c)$  (также не изменяющего многочлен  $f^\Gamma$ ) добьемся, чтобы  $f^\Xi(x, y)$  стал равен  $\gamma(y-\delta a_1)(y-\delta a_2) \times (y-\delta a_3)$  для некоторых  $\delta > 0$  и  $\gamma$ . Посредством квазигомететии  $(x, y) \mapsto (\delta^{-1/2}x, \delta^{-1}y)$  (под действием которой  $f^\Gamma$  умножается на  $\delta^3$ ) добьемся, чтобы многочлен  $f^\Xi(x, y)$  стал равен  $\gamma\delta^3(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)$ . Поделим полученный многочлен  $f$  на  $\gamma\delta^3$ . Произведем теперь гиперболизм и вслед за ним преобразование  $(x_0:x_1:x_2) \mapsto (x_1:x_0:x_2)$ . Расположение относительно координатных осей у полученной кривой окажется (топологически) таким же, как у прежней, — см. рис. 53, где это проделано для случая, показанного на рис. 47, в. При соответствующем преобразовании многоугольника Ньютона и уравнения стороны  $\Xi$  и усечение  $f^\Xi$  дают  $\Gamma$  и  $f^\Gamma$ , так что теперь  $f^\Gamma(x, y) = (y-a_1x^2)(y-a_2x^2)(y-a_3x^2)$ . Теперь, действуя, как выше, посредством параллельных переносов и квазигомететии и сохраняя неизменным усечение  $f^\Gamma$ , добьемся, чтобы многочлен  $f$  удовлетворял и условию (iv). •

**4.6.Д. Следствие е.** Любой росток типа  $J_{10}^-$  плоской кривой в начале координат, ветви которого касаются оси абсцисс сверху,<sup>4</sup> допускает такие квазиоднородные распускания, показанные на рис. 54, что возмущенная кривая пересекает ось ординат в трех точках вблизи начала координат с отношением расстояний между соседними точками, равным любому наперед заданному числу.

**4.7. Четыре квадратично касающиеся ветви (особенность  $X_{21}$ ).** В этом пункте рассматриваются распускания особенностей типа  $X_{21}$ , т. е. особенностей, в которых четыре неособые ветви квадратично касаются друг друга. Любой росток этого типа полуквазиоднороден относительно любой системы координат, одна из осей которой касается его ветвей. Нас будут интересовать только ростки,

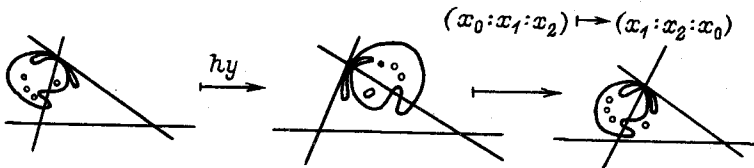


Рис. 53.

<sup>4</sup> Условие касания сверху нетрудно отбросить.

у которых все ветви вещественны. Усечение многочлена, определяющего кривую с точкой типа  $X_{21}$  в начале координат, на диаграмму Ньютона определяется, с точностью до пропорциональности, кривизнами ветвей в особой точке.

Полная топологическая классификация распусканий особенностей  $X_{21}$  пока неизвестна. Шустин [32] доказал, что топологические типы распусканий всех особенностей типа  $X_{21}$  с одинаковым числом вещественных ветвей одинаковы, однако между построениями и запретами еще остается небольшой зазор. Любопытно, что проблема полностью решена для тех распусканий, которые могут участвовать в построении неособых  $M$ -кривых. Это распускание следующей теоремы. Можно показать, что всякое распускание особенности типа  $X_{21}$  с четырьмя вещественными ветвями, при котором появляются 9 новых малых овалов (это максимальное возможное значение), топологически эквивалентно одному из распусканий теоремы 4.5.А.

*4.7.А. Любой росток типа  $X_{21}$  с четырьмя вещественными ветвями допускает квазиоднородные распускания, показанные на рис. 55, а также квазиоднородные распускания, получающиеся из них посредством симметрии относительно вертикальной прямой.*

Приведу, не обращая внимания (как и выше) на кривизны ветвей, построение кривых, доставляющих эти распускания. На рис. 56 показано построение кривой для распусканий, показанных на левой части рис. 55 с  $a=8$  и 4. Применение к этим кривым преобразования  $(x, y) \mapsto (x, y + ax^2)$  с достаточно большим  $a$  дает кривые, доставляющие оставшиеся два распускания левой части рис. 55.

Кривые, доставляющие остальные распускания рис. 55, строятся единообразно. Как показал Полотовский [19], неособая  $M$ -кривая степени 5, односторонняя компонента которой пересекает некоторую прямую в 5 точках, может располагаться относительно этой прямой одним из четырех способов, показанных на рис. 57 (с указанием работ, где эти расположения были впервые реализованы). Поворачиванием прямой вокруг одной из точек ее пересечения с односторонней компонентой и последующими проецируемыми преобразованиями, переводящими повернутую прямую в прямую  $x_0 = 0$ , можно получить из кривых рис. 57 кривые степени 5, располагающиеся относительно проективной системы координат так, как показано на рис. 58.

Применим ко всем этим кривым гиперболизм и получим кривые степени 8 с невырожденной тройной особенностью в точке  $(0 : 1 : 0)$  и с уединенной (т. е. лежащей только на мнимых ветвях) особенностью типа  $X_{21}$  в точке  $(0 : 0 : 1)$  (рис. 59).

К первой, третьей, пятой и шестой из полученных кривых применим еще преобразование  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (-x_0 : x_1 : x_2)$ , результаты изображены на рис. 60.

Теперь у полученных 10 кривых, изображенных на рис. 59, 60, распустим особенность, находящуюся в точке  $(0 : 1 : 0)$ . В силу 4.6.Б существуют такие квазиоднородные распускания этих тройных точек, что получающиеся кривые имеют вид, показанный на рис. 61. Существенно, чтобы на месте особенности появились три точки пересечения возмущенной кривой с прямой  $x_0 = 0$ , лежащие на одной ветви кривой. Применяя теперь к этим кривым преобразование  $hy^{-1}$ , получим кривые степени 8, дающие требуемые квазиоднородные распускания точки типа  $X_{21}$ . •

**4.8. Распускание точки квадратичного касания  $2k - 1$  неособых вещественных ветвей.** Разумеется, задача топологической классификации особенности, описанной в заголовке этого пункта, с ростом  $k$  очень быстро становится безнадёжной. Однако теорема 3.8.А позволяет строить ее распускания некоторых конкретных типов для любого  $k$ .

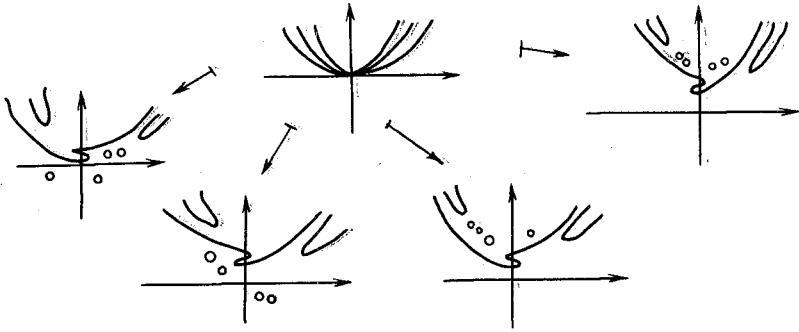


Рис. 54.

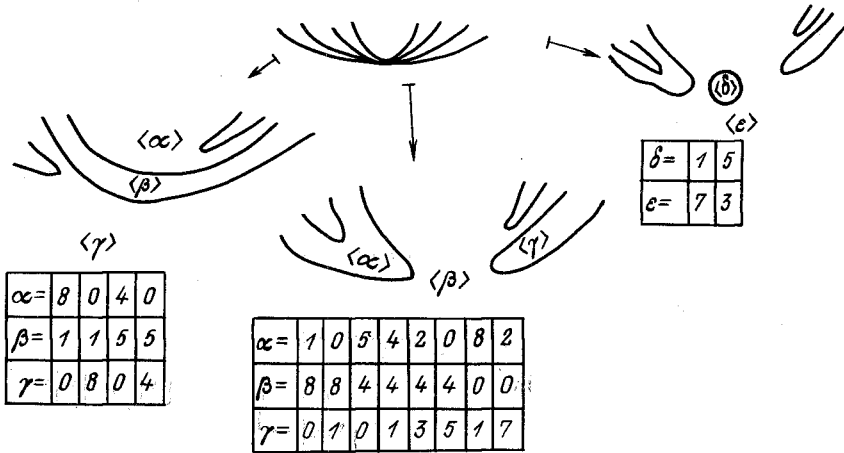


Рис. 55.

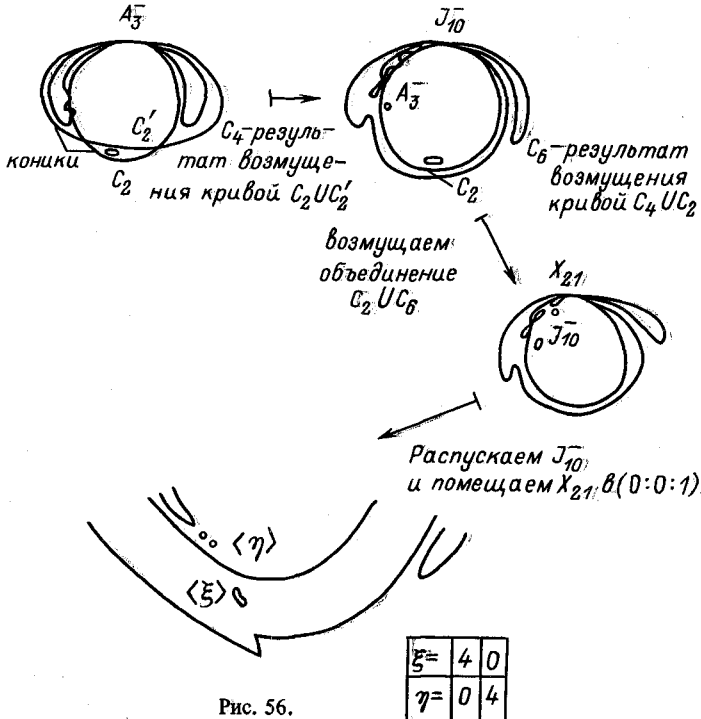


Рис. 56.

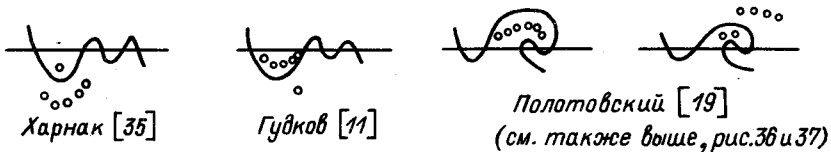


Рис. 57.

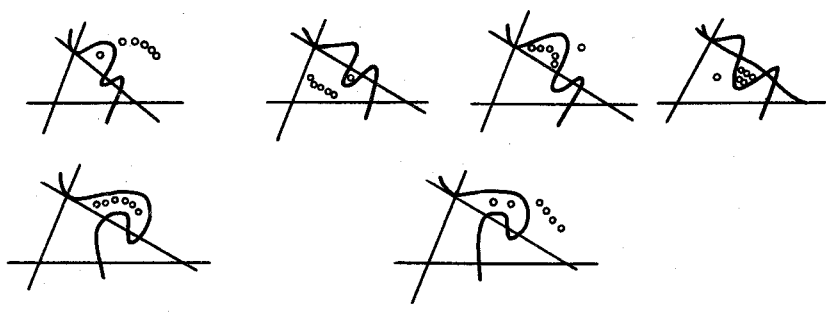


Рис. 58.

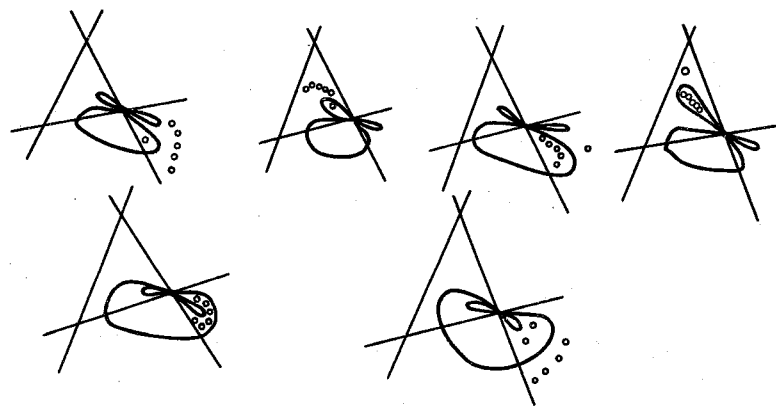


Рис. 59.

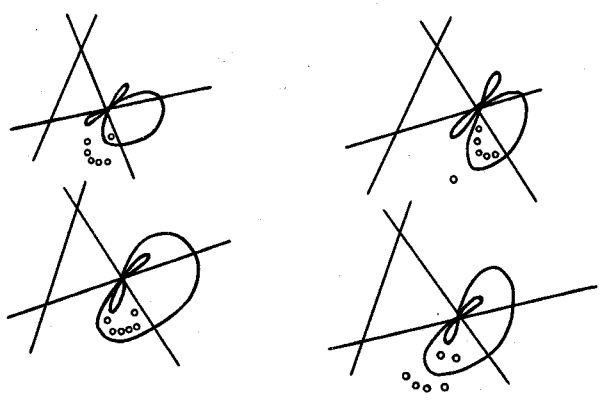


Рис. 60

**4.8.A.** Любой росток кривой, который состоит из  $2k-1$  неособых вещественных ветвей с  $k > 1$ , квадратично касающихся друг друга и оси абсцисс в начале координат, допускает квазиоднородное распускание, показанное на рис. 62.

Доказательство. Начнем построение с параболы  $y = (x-a)(x-\beta)$ , где  $a > \beta > 0$ , или, в однородных координатах,  $x_2x_0 - (x_1 - ax_0)(x_1 - \beta x_0) = 0$ . Далее, возьмем объединение этой кривой с осью ординат и возмущим при помощи многочлена  $(x_2 - \gamma_{1,0}x_0)x_0^2$ , т. е. построим кривую  $(x_2x_0 - (x_1 - ax_0)(x_1 - \beta x_0)) \times x_1 + \epsilon(x_2 - \gamma_{1,1}x_0)x_0^2 = 0$ . Здесь  $\gamma_{1,0} < 0$ , и  $\epsilon$  — малое положительное число. В проективной плоскости это выглядит так, как показано на рис. 63. Чтобы понять, что происходит в точке  $(0:0:1)$ , достаточно посмотреть, каков многоугольник Ньютона. У многочлена степени 3, который мы построили, многоугольник Ньютона есть трапеция, у которой к точке  $(0,3)$  обращены две стороны. Ясно, что в  $(0:0:1)$  особенность имеет тип  $A_1$ , но одна из ветвей касается прямой  $x_0 = 0$ . Теперь добавим еще раз прямую  $x_1 = 0$  и возмущим при помощи многочлена  $-(x_2 - \delta_{1,1}x_0)(x_2 - \delta_{1,2}x_0)x_0^2$  с  $\delta_{1,1} > \delta_{1,2} > 0$ . Теперь в точке  $(0:0:1)$  получится особенность  $A_3$ . Далее будем продолжать это построение так же. Пусть уже построена кривая степени  $4r-2$ , имеющая в точке  $(0:0:1)$   $2r-1$  неособых ветвей, касающихся оси  $x_0 = 0$ , расположенная так, как показано на левой части рис. 64. Двукратное добавление прямой и возмущения приводят к аналогичной кривой, но степени, на 2 большей. Получившаяся кривая дает распускание, существование которого утверждается доказываемой теоремой. Однако это распускание годится не для любого ростка, а лишь для ростка с некоторым фиксированным набором кривизн ветвей, получающимся неконтролируемым образом. Заметим, однако, что построенная кривая пересекает ось ординат в точках, которые зависят только от последнего шага построения и могут быть сделаны какими угодно. Применим к этой кривой гиперболизм и затем симметрию  $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 : x_0 : x_2)$ . Получится кривая того же вида. Однако ветви исходной кривой, пересекающие ось ординат, переходят в ветви, касающиеся прямой  $x_0 = 0$ , и ординаты точек пересечения пропорциональны кривизнам ветвей новой кривой, проходящих через точку  $(0:0:1)$ . Поскольку это произвольные попарно различные положительные числа, мы получили требуемые распускания. ●

## § 5. Построение неособых кривых

**5.1. Кривые степени 6.** Теорема Гудкова об изотопической классификации неособых проективных кривых степени 6 была сформулирована выше в п.1.13.

**5.1.A.** Всякая неособая кривая степени 6, кроме пустых кривых и кривых со схемами  $\langle 10 \rangle$  и  $\langle 1'9 \rangle$ , изотопна результату малого возмущения объединения трех эллипсов, касающихся друг друга в двух точках, показанных на рис. 65.

Для доказательства достаточно, пользуясь теоремой 3.8.A и замечанием 3.9, возмутить это объединение посредством распусканий теоремы 4.2.B.

**5.1.B. Замечание.** Любопытно, что возмущения кривой рис. 66 могут быть использованы и для доказательства запретов на топологию распусканий особенности типа  $J_{10}^-$ . Действительно, из теоремы 4.2.B и запретов на топологию неособых проективных кривых степени 6 вытекают запреты теоремы 4.2.A. Дело в том, что запреты на топологию кривых степени 6 имеют топологическое происхождение и любое распускание особенности кривой, доставляемой теоремой 4.2.B, дает по меньшей мере гибкую кривую степени 6.

Кривые степени 6 со схемами  $\langle 10 \rangle$  и  $\langle 1'9 \rangle$  легко строятся способом Гильберта (первая строится также и способом Харнака), см. п.1.9 и 1.10.

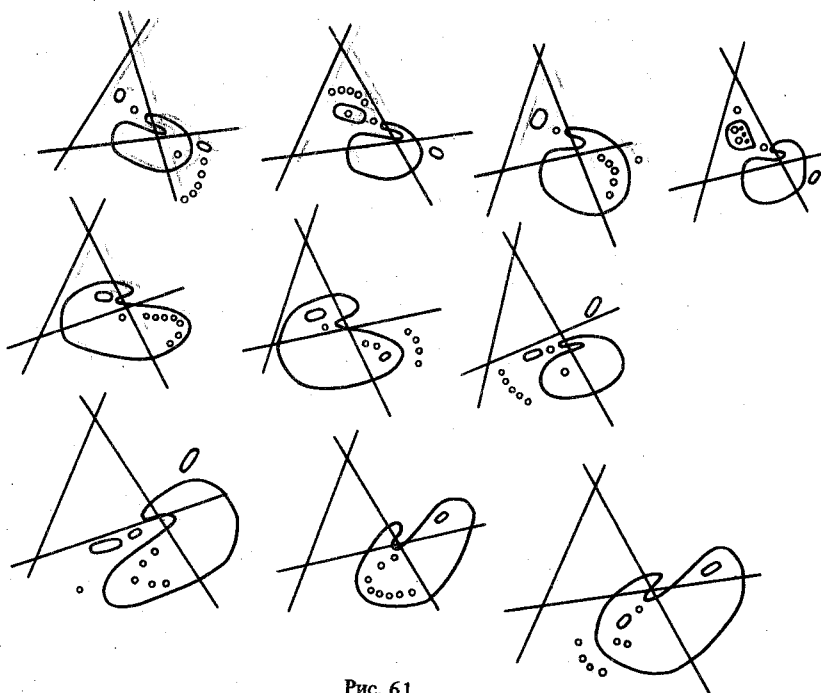


Рис. 61.



$$\alpha = 3\kappa^2 - 5\kappa + 2, \beta = \kappa^2 - 3\kappa + 2$$

Рис. 62.

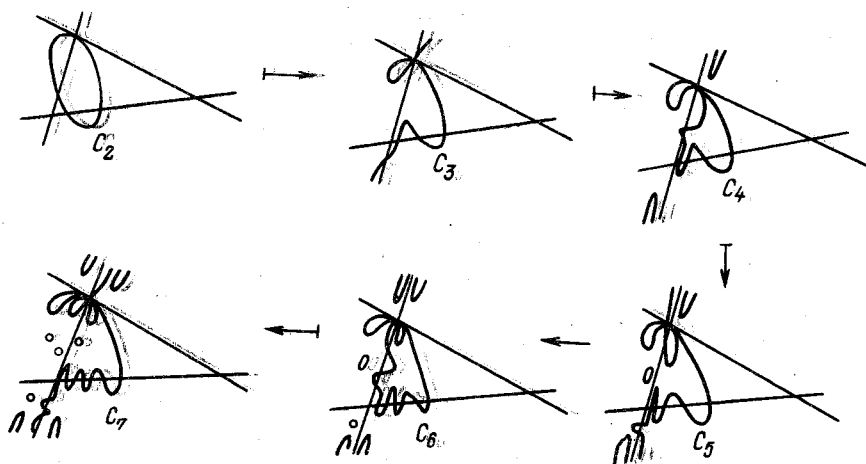


Рис. 63.

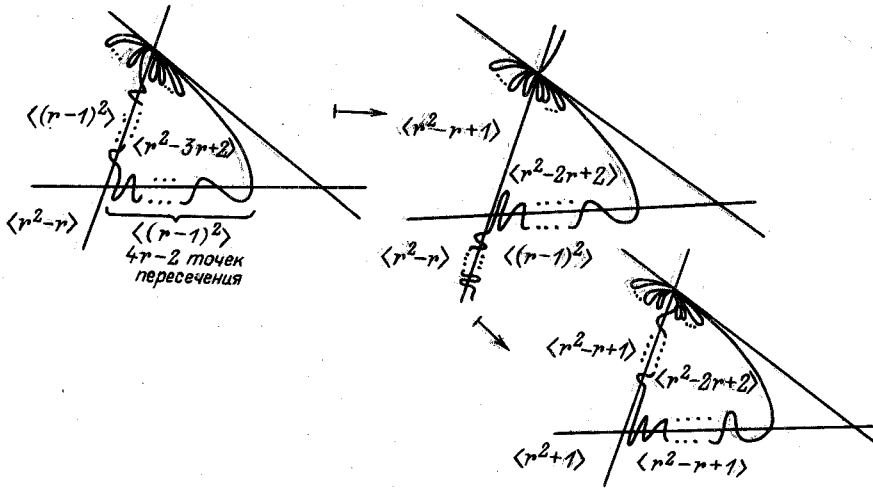


Рис. 64.

В моей статье [46] ошибочно утверждалось, что все неособые кривые степени 6 изотопны результатам малых возмущений кривой рис. 65. Можно показать, что это так для объединения трех эллипсов, касающихся друг друга в одной точке с кратностью 3 и расположенных, как показано на рис. 66, однако мы не будем это доказывать, поскольку не рассматривали распускания точки биквадратичного касания трех ветвей ( $J_{24}$ ).

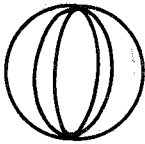


Рис. 65.

**5.2. Кривые степени 7.** Поскольку выше проблема изотопической классификации неособых кривых степени 7 отдельно не рассматривалась, начну с запретов. В отличие от меньших степеней здесь запреты топологического происхождения оказываются пока значительно слабее простейших следствий теоремы Безу. Из следствия 1.3.В (т. е. из рассмотрения пересечений со вспомогательными прямыми) вытекает, что вещественные схемы неособых кривых степени 7 имеют вид  $\langle J \perp \alpha \rangle$ ,  $\langle J \perp \alpha \perp 1 \langle \beta \rangle \rangle$  и  $\langle J \perp 1 \langle 1 \rangle \rangle$ , где  $\alpha \geq 0$  и  $\beta \geq 1$ . В силу неравенства Харнака общее число компонент не превосходит 16, так что число овалов  $\leq 15$ .

Это почти все. В 1979 г., когда все вещественные схемы, удовлетворяющие этим запретам, кроме схемы  $\langle J \perp 1 \langle 14 \rangle \rangle$ , были реализованы неособыми кривыми степени 7, мне удалось (для завершения изотопической классификации неособых кривых степени 7) запретить эту схему (см. [7]). Сделано это было при помощи вспомогательных кривых степени 2 и теории комплексных ориентаций.

Итак, решение задачи изотопической классификации неособых плоских проективных вещественных алгебраических кривых степени 7 формулируется следующим образом.

**5.2.A. Существуют неособые плоские кривые степени 7 со следующими вещественными схемами:**

- (i)  $\langle J \perp \alpha \rangle$  с  $0 \leq \alpha \leq 15$ ;
- (ii)  $\langle J \perp \alpha \perp 1 \langle \beta \rangle \rangle$  с  $\alpha + \beta \leq 14$ ,  $0 \leq \alpha \leq 13$ ,  $1 \leq \beta \leq 13$ ;
- (iii)  $\langle J \perp 1 \langle 1 \rangle \rangle$ .

Любая неособая плоская кривая степени 7 имеет одну из этих 121 вещественных схем.



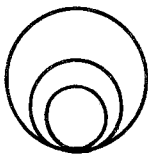


Рис. 66.

Рассмотрим построения кривых, необходимые для доказательства этой теоремы. Методом Харнака реализуются следующие вещественные схемы:  $\langle J \perp a \rangle$  с  $0 \leq a \leq 15$ ;  $\langle J \perp a \perp 1 \langle 1 \rangle \rangle$  с  $0 \leq a \leq 13$  (см. рис. 7, где показана реализация схемы  $\langle J \perp 13 \perp 1 \langle 1 \rangle \rangle$ ), а также схемы  $\langle J \perp a \perp 1 \langle \beta \rangle \rangle$  с  $0 \leq a \leq 9$  и  $0 \leq \beta \leq 4$ .

Методом Гильберта реализуются следующие вещественные схемы:  $\langle J \perp a \perp 1 \langle \beta \rangle \rangle$  с  $a + \beta \leq 12$ ;  $\langle J \perp a \perp 1 \langle \beta \rangle \rangle$  с  $a + \beta \leq 14$ ,  $a \leq 2$ ,  $\beta \leq 13$  и  $\langle J \perp a \perp 1 \langle \beta \rangle \rangle$  с  $a + \beta \leq 14$ ,  $a \leq 12$ ,  $\beta \leq 3$ . Реализуется, конечно, и схема  $\langle J \perp 1 \langle 1 \rangle \rangle$ , но ее можно реализовать и распадающейся кривой.

Построение Гудкова [11], которое упоминалось выше в п. 1.12, дает схемы  $\langle J \perp a \perp 1 \langle \beta \rangle \rangle$  с  $a \leq 9$ ,  $\beta \leq 5$ .

Это и все схемы, которые были реализованы посредством малых возмущений кривых, распадающихся в объединение неособых трансверсальных друг другу кривых меньших степеней. Теория комплексных ориентаций позволила указать некоторые границы этого метода. В частности, как показали Звонилов и Фидлер, схема  $\langle J \perp 4 \perp 1 \langle 10 \rangle \rangle$  не может быть реализована таким образом.

Следующее построение дает все недостающие схемы. Построение, которое здесь описывается, сразу дает схемы  $\langle J \perp a \perp 1 \langle \beta \rangle \rangle$  с  $6 \leq a + \beta \leq 14$ ,  $a \geq 1$ ,  $\beta \geq 2$ ; его незначительные модификации позволяют получить и многие другие (впрочем, уже полученные) вещественные схемы.

5.2.Б. Л е м м а. Существуют четыре кривые степени 7, имеющие по 2 особые точки типа  $J_{10}$  и расположенные так, как показано на рис. 67.

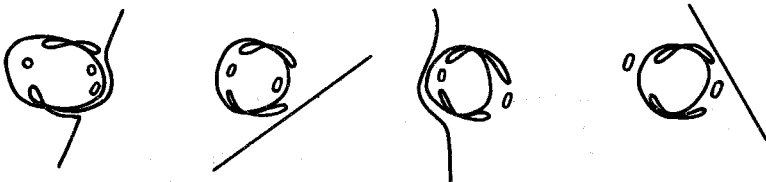


Рис. 67.

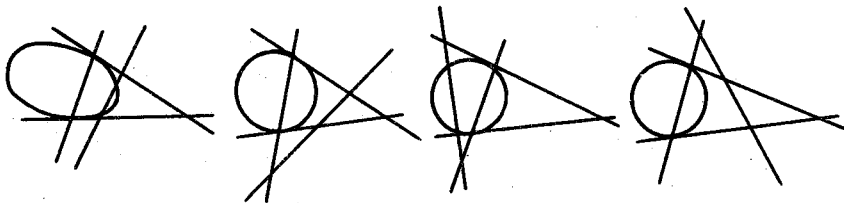


Рис. 68.

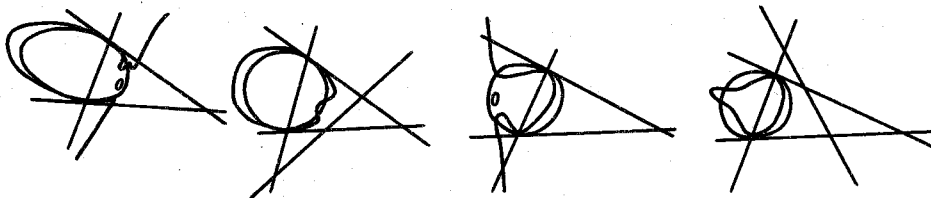


Рис. 69.

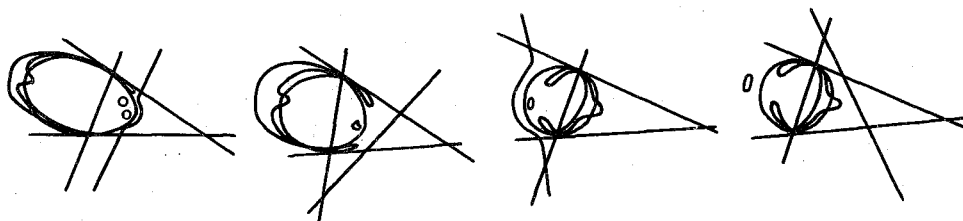


Рис. 70.

**Доказательство.** Воспользуемся методом Гильберта, приспособленным к построению особых кривых. Малыми возмущениями показанных на рис. 68 объединений коники  $x_2x_0 - x_1^2 = 0$  и прямой построим 4 неособые кривые степени 3, расположенные относительно координатных осей и коники  $x_2x_0 - x_1^2 = 0$  так, как показано на рис. 69. Объединения полученных кривых степени 3 с коникой  $x_2x_0 - x_1^2 = 0$  возьмем так, чтобы получились кривые, изображенные на рис. 70.

Объединения полученных кривых степени 5 с коникой  $x_2x_0 - x_1^2 = 0$ , очевидно, можно возмутить так, чтобы получились требуемые кривые. ●

Теперь каждую кривую леммы 5.2.Б подвергнем возмущениям, распускающим особые точки. Сделаем это при помощи квазиоднородных распусканий теоремы 4.2.Б. Уже только распускания левой части рис. 46 дают все вещественные схемы  $\langle J \perp a \perp 1 \langle \beta \rangle \rangle$  с  $6 \leq a + \beta \leq 14$ ,  $a \geq 1$ ,  $\beta \geq 2$ . ●

Другая реализация почти всех вещественных схем неособых кривых степени 7 дается следующей теоремой Корчагина [40].

**5.2.В.** *Всякая неособая кривая степени 7, кроме кривых со схемой  $\langle J \perp 1 \langle 13 \rangle \rangle$ , изотопна результату малого возмущения объединения трех эллипсов, касающихся друг друга в двух точках, и прямой, проходящей через эти точки, которое показано на рис. 71.*

Для доказательства достаточно, пользуясь теоремой 3.8.А и замечанием 3.9, возмутить это объединение посредством распусканий теоремы 4.4.А.

**5.3. Кривые степени 8.** Изотопическая классификация неособых плоских проективных вещественных алгебраических кривых степени 8 еще не завершена, хотя сейчас естественно предполагать, что она будет завершена в ближайшие годы. Во всяком случае, за последние 10 лет достигнуто значительное продвижение и не заметно какого-либо снижения интенсивности работы.

Перечислю известные к настоящему времени запреты на вещественные схемы неособых кривых степени 8.

**5.3.А.** *Следствие теоремы Безу. Вещественная схема неособой кривой степени 8 имеет вид  $\langle a \rangle$ , или  $\langle a \perp 1 \langle \beta \rangle \rangle$ , или  $\langle a \perp 1 \langle \beta \rangle \perp 1 \langle \gamma \rangle \rangle$ , или  $\langle a \perp 1 \langle \beta \rangle \perp 1 \langle \gamma \rangle \perp 1 \langle \delta \rangle \rangle$ , или  $\langle 4 \langle 1 \rangle \rangle$ , или  $\langle a \perp 1 \langle \beta \rangle \perp 1 \langle \gamma \rangle \rangle$ , или  $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$ .*

**5.3.Б.** *Неравенство Харнака:  $p + n \leq 22$ .*

**5.3.В.** *Экстремальные сравнения неравенства Харнака. Если  $p + n = 22$ , то  $p - n \equiv 0 \pmod{8}$  и, значит,  $p \equiv n \equiv 3 \pmod{4}$ . Если  $p + n = 21$ , то  $p - n \equiv \pm 1 \pmod{8}$ .*

**5.3.Г.** *Следствие неравенства Петровского. Не существует неособой кривой степени 8 с вещественной схемой  $\langle 20 \rangle$ .*

**5.3.Д.** (см. [7]). *Если  $\langle a \perp 1 \langle \beta \rangle \perp 1 \langle \gamma \rangle \perp 1 \langle \delta \rangle \rangle$  – вещественная схема  $M$ -кривой степени 8 с отличными от нуля  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ , то числа  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  нечетны.*

**5.3.Е.** (см. [7]). *Если  $\langle a \perp 1 \langle \beta \rangle \perp 1 \langle \gamma \rangle \perp 1 \langle \delta \rangle \rangle$  – вещественная схема  $(M-2)$ -кривой степени 8 с отличными от нуля  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  и с  $\beta + \gamma + \delta \equiv 0 \pmod{4}$ , то из чисел  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  два нечетны, а одно четно.*

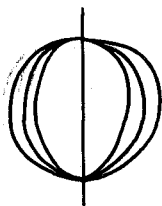


Рис. 71.



Рис. 72.

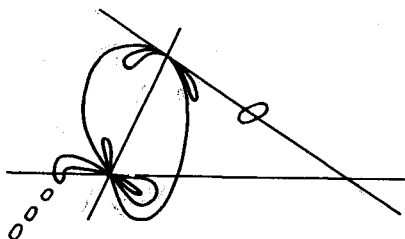


Рис. 73.

5.3.Ж (см. [8], [43]). Если  $\langle 1\langle\alpha\rangle \perp 1\langle\beta\rangle \perp 1\langle\gamma\rangle \rangle$  – вещественная схема  $M$ -кривой степени 8, то тройка  $(\alpha, \beta, \gamma)$  не может быть ни одной из следующих семи троек:  $(1,3,15)$ ,  $(1,5,11)$ ,  $(1,9,9)$ ,  $(3,3,13)$ ,  $(3,5,11)$ ,  $(3,7,9)$ ,  $(5,5,9)$ . Не существует кривой степени 8 с вещественной схемой  $\langle 4 \perp 1\langle 3 \rangle \perp 1\langle 3 \rangle \perp 1\langle 9 \rangle \rangle$ .

Последние три ограничения были доказаны с использованием теоремы Безу, так что они, возможно, не имеют топологического происхождения.

В самое последнее время я получил от Шустина рукопись статьи, в которой доказываются еще две серии запретов такого же сорта.

5.3.3. Не существуют  $M$ -кривые степени 8 со схемами  $1\langle\alpha \perp 1\langle 20 - \alpha \rangle \rangle$ , где  $\alpha = 2, 6, 10, 14$  или 18.

Вторая серия содержит 50  $(M-1)$ -схем степени 8.

Перечисленным выше запретам удовлетворяют 91 вещественная схема с 22 овалами и 193 схемы с 21 овалом. Из них реализовано неособыми кривыми степени 8: 78 схем с 22 овалами и 171 схема с 21 овалом. Я не располагаю самой последней информацией об  $(M-2)$ -схемах. Год назад из незапрещенных 409  $(M-2)$ -схем реализованы были 337 (главным образом благодаря усилиям Полотовского, см. его обзор [43]) и из незапрещенных 367  $(M-3)$ -схем 332 схемы.

Ясно, что рассматривать здесь реализацию всех схем, реализованных неособыми кривыми степени 8, затруднительно, и я ограничусь поэтому лишь несколькими примерами.

Очень большое количество схем реализуется посредством малых возмущений кривой, показанной на рис. 72, являющейся объединением четырех эллипсов, квадратично касающихся друг друга в двух точках. У этой кривой две особенности типа  $X_{21}$ . Распуская их всеми известными способами (см. 4.7.A), можно реализовать 47 вещественных схем с 22 овалами, 117 – с 21 овалом, 319 – с 20 овалами, 213 – с 19 овалами (см. Полотовский [43]). Можно было ожидать, что малыми возмущениями этой кривой реализуются почти все вещественные схемы степени 8, – действительно, для кривых меньших степеней аналогичная кривая дает почти все (ср. 5.2.B и 5.1.A). Однако, как мы увидим, это далеко не так.

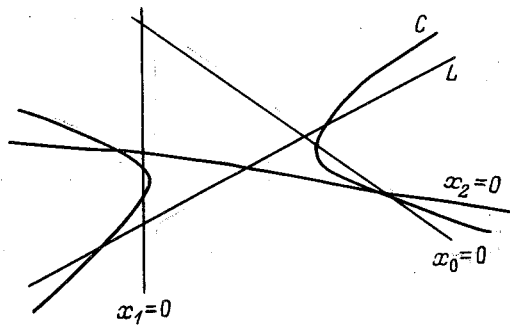


Рис. 74.

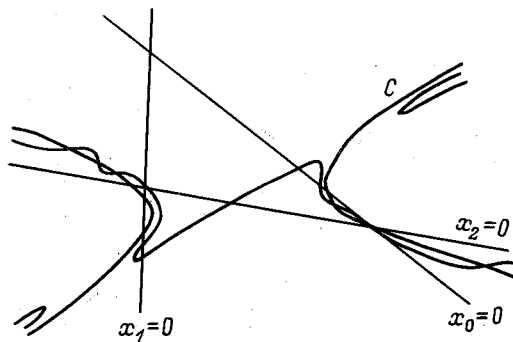


Рис. 75.

**5.3.И. Лемма.** Существует кривая степени 8, имеющая невырожденную пятикратную особенность в точке  $(1:0:0)$  и особенность типа  $J_{10}$  в точке  $(0:0:1)$  и расположенная так, как показано на рис. 73.

Доказательство. Построим конику  $C$  и прямую  $L$ , расположенные по отношению друг к другу и к осям координат так, как показано на рис. 74.

Возмем объединение  $C \cup L$  так, чтобы получилась неособая кривая степени 3, проходящая, как и  $C$ , через точку  $(0:1:0)$  и расположенная относительно  $C$  и осей координат так, как показано на рис. 75.

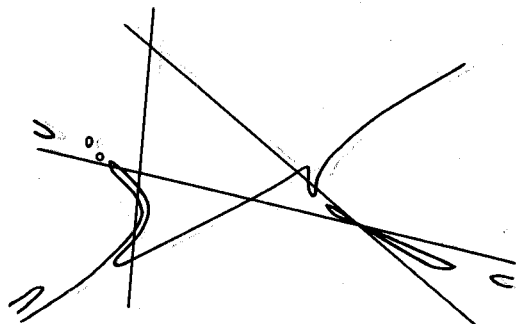


Рис. 76.

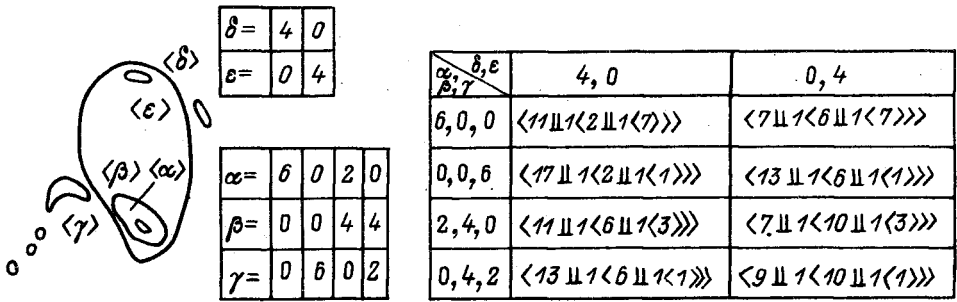


Рис. 77.

Объединение получившейся кривой и коники  $S$  возмутим так, чтобы получилась кривая степени 5, имеющая в точке  $(0:1:0)$  невырожденную двойную особенность и расположенная относительно осей координат так, как показано на рис. 76.

К полученной кривой применим преобразование  $hy^{-1}$ . Очевидно, результатом будет требуемая кривая. •

Возмущая кривую леммы 5.3.4 таким образом, чтобы распускания ее ростков в точках  $(1:0:0)$  и  $(0:0:1)$  давали соответственно 6 и 4 новых малых овалов (см. теоремы 4.3.Г и 4.2.Б), получаем  $M$ -кривые степени 8, схемы которых показаны на рис. 77.

Вещественная схема  $\langle 11 \parallel 1 \langle 2 \parallel 1 \langle 7 \rangle \rangle \rangle$ , например, реализованная таким образом, не может быть реализована малым возмущением кривой рис. 72.

Еще одно построение неособых кривых степени 8, в котором сначала строится кривая степени 8 с особенностями  $N_{16}$  и  $J_{10}^-$  и которое приводит к интересным кривым, обобщается и будет изложено (в качестве специального случая) в следующем пункте.

**5.4. Уточнение гипотезы Рэгсдейл.** Напомню (см. п.1.11), что в 1906 г. Рэгсдейл, основываясь на анализе построений Харнака и Гильберта, высказала гипотезу, согласно которой для любой неособой кривой четной степени

$$p \leq (3m^2 - 6m + 8)/8 \text{ и } n \leq (3m^2 - 6m)/8.$$

Любопытно, что в 1938 г. Петровский [42] (независимо) сформулировал более слабую гипотезу:

$$p \leq (3m^2 - 6m + 8)/8 \text{ и } n \leq (3m^2 - 6m + 8)/8.$$

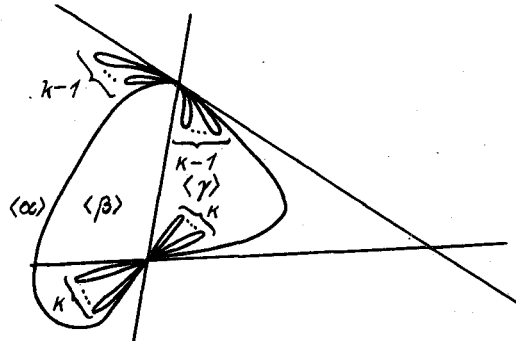


Рис. 78.

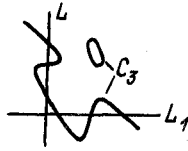


Рис. 79.

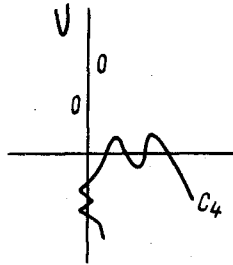


Рис. 80.

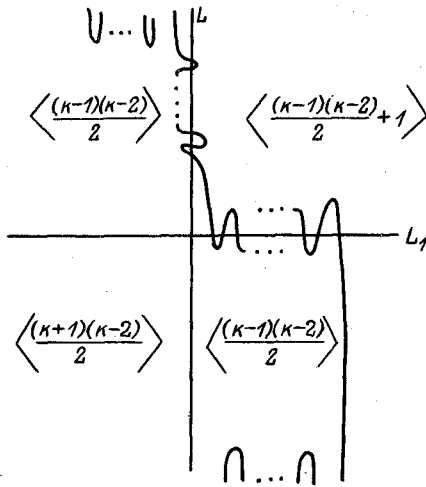


Рис. 81.

В заметке [6] я анонсировал существование контрпримеров ко второму неравенству Рэгсдейл для любого  $m \geq 8$  и  $m \equiv 0 \pmod{4}$ . В этом пункте я привожу построение этих контрпримеров. Это кривые с вещественными схемами  $\langle (m^2 - 6m)/8 \perp 1 \langle (3m^2 - 6m + 8)/8 \rangle \rangle$  степени  $m \geq 8$ ,  $m \equiv 0 \pmod{4}$ . Отмечу, что они доказывают точность усиленного неравенства Петровского 2.3.И.

Вопрос о справедливости гипотезы Петровского (или, если угодно, уточненной гипотезы Рэгсдейл) остается открытым. Он допускает обобщение (указанное в [6]): верно ли, что если  $X$  — множество неподвижных точек антиголоморфной инволюции неособой односвязной компактной комплексной поверхности  $\mathcal{X}$ , то

$$\dim H_1(X; \mathbb{Z}_2) \leq h^{1,1}(X).$$

Построение контрпримеров начнем с построения особых кривых.

5.4.A. Для всякого  $k > 1$  существует кривая степени  $4k$ , показанная на рис. 78, где  $\alpha = (k^2 - k - 2)/2$ ,  $\beta = (k^2 - k + 2)/2$  и  $\gamma = k^2 - 1$ , имеющая в точке  $(1:0:0)$  невырожденную  $(2k + 1)$ -кратную особую точку и в  $(0:0:1)$  — точку квадратичного касания  $(2k - 1)$  неособых ветвей.

Доказательство. Построим неособую кубическую кривую  $C_3$ , расположенную относительно прямых  $L$  и  $L_1$  так, как показано на рис. 79. Объединение  $C \cup L$  возьмем так, чтобы получилась неособая кривая  $C_4$  степени 4, расположенная относительно  $L$  и  $L_1$  так, как показано на рис. 80. Далее продолжим

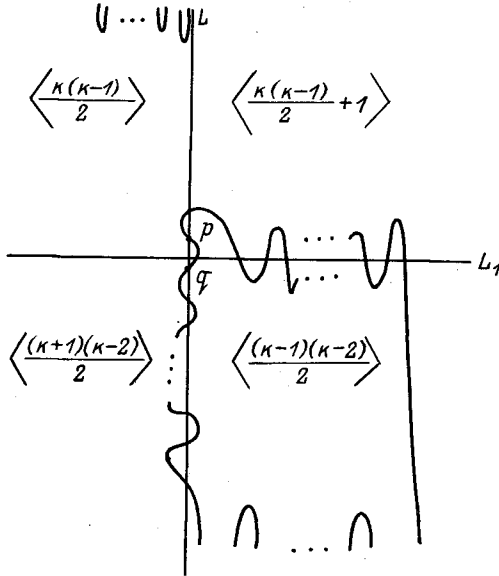


Рис. 82.

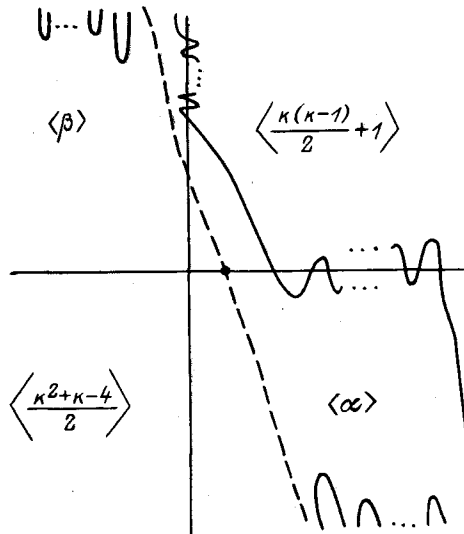


Рис. 83.

построения по Харнаку, взяв в качестве порождающей кривой прямую  $L$  и в качестве баз — отрезки выше и ниже точки пересечения с прямой  $L_1$  (ср. п.1.12). Получим кривую  $C_{2k-1}$ , показанную на рис. 81.

Теперь объединение  $C_{2k-1} \cup L$  возмущим так, чтобы получилась неособая кривая  $C_{2k}$  степени  $2k$ , расположенная относительно  $L$  и  $L_1$  так, как показано на рис. 82. Важно, чтобы непустой овал кривой  $C_{2k}$  пересекался с  $L$  в  $2k$  точках и чтобы из них вторая и третья сверху — обозначим их через  $p$  и  $q$  — ограничивали отрезок, который содержал бы  $L \cap L_1$  и был бы мал по сравнению с другими отрезками, высекаемыми кривой  $C_{2k}$  на  $L$ .

Возмущим объединение  $C_{2k} \cup L$  и, продолжив это возмущение, добьемся стягивания в уединенную двойную точку овала, который получился из двуугольника с вершинами  $p$  и  $q$ . В силу близости этих точек эта перестройка произойдет первой (до каких бы то ни было других). Получилась кривая  $C_{2k+1}$  степени  $2k+1$  с одной уединенной невырожденной двойной точкой, расположенная относительно прямой  $L$  и прямой  $L'$ , близкой к  $L_1$  и проходящей через особую точку так, как показано на рис. 83.

Произведем теперь проективное преобразование, переводящее  $L$  в ось  $x_1 = 0$ ,  $L'$  — в ось  $x_0 = 0$  и особую точку кривой  $C_{2k+1}$  — в точку  $(0 : 1 : 0)$ . На рис. 83 прерывистой линией показан прообраз оси  $x_2 = 0$  при этом преобразовании (впрочем, его расположение не существенно для дальнейшего). Подвергнув образ построенной кривой преобразованию  $hy^{-1}$ , получим требуемую кривую. •

Возмущая кривую леммы 5.4.A таким образом, чтобы распускания ее особенностей в точках  $(0 : 0 : 1)$  и  $(1 : 0 : 0)$  были такими, как в 4.8.A и 4.3.D, получим неособую кривую степени  $m = 4k$  с требуемой вещественной схемой  $\langle (m^2 - 6m)/8 \perp 1 \langle 3m^2 - 6m + 8 \rangle / 8 \rangle$ .

**Окончание настоящего обзора** предполагается опубликовать в следующем номере этого журнала. Заключительная третья глава будет посвящена дальнейшему развитию техники построения вещественных алгебраических многообразий с контролируемой топологией. Центральная конструкция, которая будет изучаться и применяться в гл. 3, строит по нескольким алгебраическим гиперповерхностям новую алгебраическую гиперповерхность, которая с топологической точки зрения устроена как результат склеивания исходных гиперповерхностей. Эта конструкция возникла в результате анализа способа возмущения кривых с полуквазиоднородными особенностями, который излагался и применялся выше в гл. 2. Рассмотренная в гл. 2 конструкция квазиоднородного распускания особенностей является специальным случаем конструкции склеивания. Последнюю можно излагать на том же элементарном уровне, на каком выше рассказывалось о квазиоднородных распусканиях (и набросок такого изложения дается в § 6 — первом параграфе гл. 3), но значительно более ясная картина возникает при расширении круга рассматриваемых объектов — при включении в него гиперповерхностей торических многообразий. Необходимая элементарная теория торических многообразий излагается в § 7.

Грубо говоря, переход от квазиоднородных распусканий к склеиванию уравнивает роли кривой с особенностями, подвергающейся возмущению, и кривых, определяющих квазиоднородные распускания ее полуквазиоднородных особенностей. При этом появляется новый технически очень удобный объект — карта многочлена, представляющая собой кривую, задаваемую этим многочленом и естественным образом помещенную в объединении четырех копий ее многоугольника Ньютона. Особенности, диктуемые многоугольником Ньютона, при построении карты подвергаются разрешению. Конструкция склеивания с чисто алгоритмической точки зрения состоит в складывании из имеющихся карт многочленов карты нового многочлена. Конечно, складываемые карты должны удовлетворять



некоторым условиям совместимости — аналогам условия совпадения направлений касательных к ветвям кривой в ее невырожденной  $r$ -кратной точке с асимптотическими направлениями аффинной кривой, определяющей квазиоднородное распускание этой точки (см. выше, п. 3.5). Удобство такого оформления построений кривых ощущается и при квазиоднородных распусканиях. Читатель сможет убедиться в этом, повторив на языке карт и склеиваний проделанные выше построения, а также познакомившись с новыми построениями. Кроме того, в конце статьи будут рассмотрены построения кривых с контролируемой комплексной схемой, а также некоторые новые построения, не укладывающиеся в рамки основных методов.

### Список литературы

- [1] Арнольд В. И. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм // Функцион. анализ и его прил. 1971. Т. 5, вып. 3. С. 1–9.
- [2] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий // Вестн. МГУ. Сер. 1. 1979. № 6. С. 7–17.
- [3] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. I. М., 1982.
- [4] Виро О. Я. Построение  $M$ -поверхностей // Функцион. анализ и его прил. 1979. Т. 13, вып. 3. С. 71–72.
- [5] Виро О. Я. Построение многокомпонентных вещественных алгебраических поверхностей // ДАН СССР. 1979. Т. 248, вып. 2. С. 279–282.
- [6] Виро О. Я. Кривые степени 7, кривые степени 8 и гипотеза Рэгсдейл // ДАН СССР. 1980. Т. 254, вып. 6. С. 1305–1310.
- [7] Виро О. Я. Плоские вещественные кривые степеней 7 и 8: новые запреты // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1983. Т. 47, вып. 5.
- [8] Виро О. Я. Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, вып. 3 (249). С. 45–67.
- [9] Гудков Д. А., Уткин Г. А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка // Уч. зап. Горьков. ун-та. 1969. Вып. 87.
- [10] Гудков Д. А. Построение кривой 6-го порядка типа  $\frac{5}{1}5$  // Изв. вузов. Мат. 1973. Т. 3, вып. 130. С. 28–36.
- [11] Гудков Д. А. Построение новой серии  $M$ -кривых // ДАН СССР. 1971. Т. 200, вып. 6. С. 1269–1272.
- [12] Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий. // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, вып. 4. С. 3–79.
- [13] Данилов В. И. Геометрия торических многообразий // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, вып. 2. С. 85–134.
- [14] Милнор Дж. Теория Морса. М.: Мир, 1965.
- [15] Милнор Дж. Особые точки комплексных гиперповерхностей. М.: Мир, 1971.
- [16] Ньютон И. Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых. Математические работы Исаака Ньютона. М.; Л., 1937.
- [17] Олейник О. А. О топологии действительных алгебраических кривых на алгебраической поверхности // Мат. сб. 1951. Т. 29, вып. 1. С. 133–156.
- [18] Петровский И. Г., Олейник О. А. О топологии действительных алгебраических поверхностей // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1949. № 13. С. 389–402.
- [19] Полотовский Г. М. Каталог  $M$ -распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. 1977. Т. 236, вып. 3. С. 548–551.
- [20] Полотовский Г. М. Топологическая классификация распадающихся кривых 6-го порядка. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Горький, 1979.
- [21] Рохлин В. А. Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта // Функцион. анализ и его прил. 1972. Т. 6, вып. 4. С. 58–64.
- [22] Рохлин В. А. Комплексные ориентации вещественных алгебраических кривых // Функцион. анализ и его прил. 1974. Т. 8, вып. 4. С. 71–75.
- [23] Рохлин В. А. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, вып. 5. С. 77–89.

- [24] Уокер Р. Алгебраические кривые. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1952.
- [25] Харламов В. М. Вещественные алгебраические поверхности // Тр. Междунар. конгресса математиков. Хельсинки, 1978. С. 421–428.
- [26] Харламов В. М. Топология действительных алгебраических многообразий (комментарий к работам № 7, 8) // Петровский И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986. с. 465–493.
- [27] Хованский А. Г. Многогранники Ньютона и торические многообразия // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 11, № 4. С. 56–67.
- [28] Хованский А. Г. Многогранники Ньютона (разрешение особенностей) // Современные проблемы математики. Т. 22. М., 1983. С. 206–239.
- [29] Численко Ю. С.  $M$ -кривые десятой степени // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1982. Т. 122. С. 146–161.
- [30] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. М.: Наука, 1972.
- [31] Шустин Е. И. Метод Гильберта-Роона и бифуркации сложных особых точек кривых 8-го порядка // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, вып. 6. С. 157–158.
- [32] Шустин Е. И. Независимость устранений особых точек и новые  $M$ -кривые степени 8 // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, вып. 4.
- [33] A'Campo N. Sur la première partie du 16e problème de Hilbert // Sem. Bourbaki. 1979. N 537.
- [34] Brusotti L. Su talune questioni di realità nei loro metodi, risultati e pro le me // Colloque sur les questions de réalité en géométrie. Liège. 1955. Georges Johnne. Liège, Masson. Paris, 1956. P. 105–129.
- [35] Harnack A. Über Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven // Math. An. 1876. Bd 10. S. 189–199.
- [36] Hilbert D. Über die reellen Züge algebraischen Curven // Math. An. 1891. Bd. 38. S. 115–138.
- [37] Huyghens Ch. Oeuvres. T. 10. P. 314, 326, 234.
- [38] Kharlamov V. M., Viro O. Ya. Extensions of the Gudkov–Rokhlin congruence // Lect. Notes Math. 1988. Vol. 1346. P. 357–406.
- [39] Klein F. Gesammelte mathematische Abhandlungen. B. 2. Berlin, 1922.
- [40] Korchagin A. B. Isotopi classification of plane seventh degree curves with the only singular point  $Z_{15}$  // Lect. Notes Math. 1988. Vol. 1346. P. 401–426.
- [41] Petrovsky I. Sur le topologie des courbes réelles et algébriques // C. R. Acad. Sci. Paris. 1933. P. 1270–1272.
- [42] Petrovsky I. G. On the topology of real plane algebraic curves // An. Math. 1938. Vol. 39(1). P. 187–209.
- [43] Polotovskii G. M. On the classification of non singular curves of degree 8 // Lect. Notes Math. 1988. Vol. 1346. P. 455–485.
- [44] Ragsdale V. On the arrangement of the real branches of plane algebraic curves // Amer. J. Math. 1906. Vol. 28. P. 377–404.
- [45] Rohn K. Die Maximalzahl und Anordnung der Ovale bei der ebenen Curve 6. Ordnung und bei Fläche 4. Ordnung // Math. An. 1913. Bd. 73. S. 177–229.
- [46] Viro O. Ya. Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7 // Lect. Notes Math. 1984. Vol. 1060. P. 185–200.
- [47] Wilson G. Hilbert's sixteenth problem // Topology, 1978. Vol. 17(1). P. 53–74.
- [48] Wiman A. Über die reellen Züge der ebenen algebraischen Kurven // Math. An. 1923. Bd. 90. S. 222–228.

Ленинградское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 15 февраля 1989 г.

191011, Ленинград, наб. р. Фонтанки, 27