



N. P. Volchkova, Vit. V. Volchkov, Characterization of generalized periodic vector fields on hyperbolic space, *Chelyab. Fiz.-Mat. Zh.*, 2022, Volume 7, Issue 2, 139–151

DOI: 10.47475/2500-0101-2022-17201

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 100.28.231.85

November 8, 2024, 17:47:33



ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОБОБЩЁННО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. П. Волчкова¹, Вит. В. Волчков²

¹Донецкий национальный технический университет, Донецк

²Донецкий национальный университет, Донецк

^avolna936@gmail.com

Изучаются векторные поля с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса в шаре на вещественном гиперболическом пространстве. Получено описание таких полей в виде рядов по специальным функциям.

Ключевые слова: векторное поле, гиперболическое пространство, нулевое сферическое среднее, сферическая гармоника, гипергеометрический ряд Горна.

Введение

Одним из хорошо известных критериев T -периодичности непрерывной функции f на вещественной оси является постоянство интегралов от f по всем отрезкам длины T на \mathbb{R} , т. е. условие

$$\int_x^{x+T} f(y)dy = \int_0^T f(y)dy, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Согласно теории рядов Фурье всякую T -периодическую функцию $f \in C^1(\mathbb{R})$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right), \quad (2)$$

т. е. представить f в виде суммы константы $a_0/2$ и последовательности периодических функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$f_m''(x) + \frac{4\pi^2 m^2}{T^2} f_m(x) = 0.$$

Естественным аналогом условия (1) в многомерном случае является постоянство интегралов от функции по всем шарам фиксированного радиуса. Близкий класс функций получается, если здесь заменить шары на сферы фиксированного радиуса. Эти классы, а также различные их аналоги и обобщения активно изучались в течение последних пятидесяти лет в работах Ф. Йона, Д. Дельсарта, Д. Смита, Л. Зальцмана, К. А. Беренштейна и других авторов (см. [1–24]). Отметим, что

доказательство ряда из полученных результатов существенно опирается на описание указанных классов в виде рядов Фурье по сферическим гармоникам и другим специальным функциям [11; 12; 17–22; 24].

Гораздо менее изученным является случай векторных полей. Если рассматривать $f \in C^1(\mathbb{R})$ как векторное поле в \mathbb{R} , то условие

$$f\left(x - \frac{T}{2}\right) - f\left(x + \frac{T}{2}\right) = 0$$

означает, что f имеет нулевой поток через любую нульмерную сферу радиуса $T/2$. Таким образом, равенство (2) даёт представление для полей с нулевым потоком через все сферы радиуса $T/2$ в \mathbb{R} . Нетривиальные обобщения этого факта на векторные поля в евклидовых пространствах получены в работах [5; 25]. При этом остаётся совершенно неисследованным случай неевклидовых пространств, в частности пространств постоянной кривизны. Целью данной работы является характеристика векторных полей, имеющих нулевой поток через все сферы фиксированного радиуса на вещественном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$.

1. Формулировка основного результата

Пусть \mathbb{R}^n — евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ — открытый единичный шар в \mathbb{R}^n со стандартной структурой многообразия и с римановой структурой, задаваемой формулой

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{(\xi, \eta)}{(1 - |x|^2)^2}, \quad (3)$$

где ξ и η — произвольные касательные векторы в точке $x \in B^n$. Здесь через (ξ, η) обозначено каноническое скалярное произведение в \mathbb{R}^n . Это риманово многообразие называют моделью Пуанкаре вещественного гиперболического пространства $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$ (см., например, [26, раздел IV]).

Группа Мёбиуса $\mathcal{M}(B^n)$ действует транзитивно на B^n посредством конформных отображений. Мёбиусовы преобразования являются движениями в модели Пуанкаре вещественного гиперболического пространства, реализованного на шаре B^n . Гиперболическая метрика d на этом пространстве определяется равенством

$$d(0, x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + |x|}{1 - |x|}, \quad x \in B^n,$$

и условием инвариантности относительно группы $\mathcal{M}(B^n)$. Геодезический шар

$$B_R = \{x \in B^n : d(0, x) < R\} \quad (R > 0)$$

(соответственно, геодезическая сфера $S_R = \{x \in B^n : d(0, x) = R\}$) совпадает с открытым евклидовым шаром (соответственно, евклидовой сферой) радиуса $\operatorname{th} R$ с центром в нуле. Гиперболические эквиваленты элемента объёма dx и элемента площади $d\sigma$ в \mathbb{R}^n определяются равенствами

$$dx_h = \frac{dx}{(1 - |x|^2)^n}, \quad d\sigma_h = \frac{d\sigma}{(1 - |x|^2)^{n-1}}. \quad (4)$$

Гиперболическая дивергенция div_h гладкого векторного поля $\vec{A} : B_R \rightarrow \mathbb{C}^n$ связана с евклидовой дивергенцией div_e соотношением

$$\operatorname{div}_h \vec{A} = (1 - |x|^2)^n \operatorname{div}_e \frac{\vec{A}}{(1 - |x|^2)^n}. \quad (5)$$

Поле $\vec{A} \in C^1(B_R)$ называется соленоидальным, если $\operatorname{div}_h \vec{A} = 0$.

При фиксированном $r > 0$ и $R > r$ обозначим через $\mathcal{V}_r(B_R)$ множество всех непрерывных векторных полей $\vec{A} : B_R \rightarrow \mathbb{C}^n$, имеющих нулевой поток через все геодезические сферы радиуса r , лежащие в B_R , т. е.

$$\mathcal{V}_r(B_R) = \left\{ \vec{A} \in C(B_R) : \int_{gS_r} \langle \vec{A}, \vec{n}_h \rangle d\sigma_h = 0 \quad \forall g \in \mathcal{M}(B^n) : gS_r \subset B_R \right\},$$

где

$$\vec{n}_h = (1 - |x|^2) \vec{n}, \quad (6)$$

а \vec{n} — евклидов единичный вектор внешней нормали к соответствующей гладкой поверхности. Описание гладких полей класса $\mathcal{V}_r(B_R)$, приведённое ниже, опирается на свойства рядов Фурье по сферическим гармоникам и свойства некоторых специальных функций.

Пусть, как обычно, Γ — гамма-функция, $(\alpha)_j = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+j-1)$ — символ Похгаммера, $F(a, b; c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, т. е.

$$F(a, b; c; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} z^j, \quad |z| < 1 \quad (7)$$

(см. [27, гл. 2, п. 2.1.1]). Обозначим $N(r)$ — множество положительных корней λ уравнения $P_{-(i\lambda+1)/2}^{-n/2}(\operatorname{ch} 2r) = 0$, где

$$P_{\zeta}^{\mu}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)^{\mu/2} F\left(-\zeta, \zeta+1; 1-\mu; \frac{1-t}{2}\right)$$

есть функция Лежандра первого рода [27, гл. 3, § 3.2]. Отметим, что множество $N(r)$ имеет вид $N(r) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$, причём $\lambda_j \sim \pi j/r$, $j \rightarrow \infty$ (см. [28, лемма 7]).

Пусть \mathbb{S}^{n-1} — единичная сфера из \mathbb{R}^n с центром в нуле, $\operatorname{Harm}(k)$ — пространство сферических гармоник степени k на \mathbb{S}^{n-1} . Пространство $L^2(\mathbb{S}^{n-1})$ является прямой суммой попарно ортогональных пространств $\operatorname{Harm}(k)$, $k = 0, 1, \dots$ (см., например, [29, гл. 4, § 2]). Обозначим d_k — размерность $\operatorname{Harm}(k)$, $\{Y_l^{(k)}\}_{l=1}^{d_k}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\operatorname{Harm}(k)$. Для точки $x \in \mathbb{R}^n$ положим $\rho = |x|$, $\sigma = x/|x|$, $x \neq 0$. Функция $Y_l^{(k)}$ продолжается до однородного гармонического многочлена степени k в \mathbb{R}^n по формуле $Y_l^{(k)}(x) = \rho^k Y_l^{(k)}(\sigma)$. Всякой локально суммируемой в B_R функции f соответствует ряд Фурье вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma), \quad (8)$$

где

$$f_{k,l}(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma. \quad (9)$$

Всюду в дальнейшем $\lambda \in \mathbb{C}$, $\nu = \nu(\lambda) = \frac{i\lambda + n - 1}{2}$. При $k \in \mathbb{Z}_+$, $\rho \in [0, 1)$ обозначим

$$\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \rho^k (1 - \rho^2)^n H_{\lambda,k}(\rho), \quad (10)$$

где

$$H_{\lambda,k}(\rho) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j \left(\nu+1-\frac{n}{2}\right)_j \rho^{2j}}{(2j+k+n) \left(k+\frac{n}{2}\right)_j j!} F\left(n-\nu, j+\frac{k+n}{2}; j+1+\frac{k+n}{2}; \rho^2\right). \quad (11)$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно на любом отрезке, лежащем в промежутке $[0; 1)$ (см. доказательство леммы 7 ниже).

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $r > 0$, $r < R \leq +\infty$, $\vec{A} : B_R \rightarrow \mathbb{C}^n$ — векторное поле класса C^∞ . Для того, чтобы выполнялось включение $\vec{A} \in \mathcal{V}_r(B_R)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\vec{A}(x) = (1 - |x|^2)^n \mathcal{B}(x) \vec{x} + \vec{C}(x), \quad x \in B_R, \quad (12)$$

где \vec{C} — соленоидальное векторное поле класса C^∞ , \mathcal{B} — скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами

$$\mathcal{B}_{k,l}(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,l,\lambda} \rho^k H_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 \leq \rho < \text{th } R, \quad (13)$$

в которых константы $\gamma_{k,l,\lambda}$ убывают быстрее любой фиксированной степени λ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Из следствия 1 ниже видно, что ряд (13) можно почленно дифференцировать на $[0, 1)$ любое число раз. Отметим также, что функции $H_{\lambda,k}$ выражаются через гипергеометрический ряд Горна двух переменных (см. [30, введение; 31, гл. 4, § 4.1, п. 4.1.1]).

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть \mathcal{D} — ограниченная область в $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$ с гладкой границей $\partial\mathcal{D}$, $\text{cl } \mathcal{D} = \mathcal{D} \cup \partial\mathcal{D}$. Если $\vec{A} \in C^1(\text{cl } \mathcal{D})$, то

$$\int_{\mathcal{D}} \text{div}_h \vec{A} dx_h = \int_{\partial\mathcal{D}} \langle \vec{A}, \vec{n}_h \rangle d\sigma_h.$$

Доказательство. В силу равенств (3), (4) и (6) имеем

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \langle \vec{A}, \vec{n}_h \rangle d\sigma_h = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{(\vec{A}, \vec{n}_h)}{(1 - |x|^2)^2 (1 - |x|^2)^{n-1}} d\sigma = \int_{\partial\mathcal{D}} \frac{(\vec{A}, \vec{n})}{(1 - |x|^2)^n} d\sigma.$$

Используя теперь формулу Гаусса — Остроградского в \mathbb{R}^n и формулы (4), (5), получаем

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \langle \vec{A}, \vec{n}_h \rangle d\sigma_h = \int_{\mathcal{D}} \text{div}_e \frac{\vec{A}}{(1 - |x|^2)^n} dx = \int_{\mathcal{D}} \text{div}_h \vec{A} dx_h.$$

Таким образом, лемма 1 доказана. \square

Лемма 2. Пусть $f \in C^1(B_R)$ и

$$F(x) = \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x).$$

Тогда коэффициенты Фурье функций f и F по сферическим гармоникам связаны соотношением

$$F_{k,l}(\rho) = \rho f'_{k,l}(\rho), \quad 0 \leq \rho < \text{th } R. \quad (14)$$

Доказательство. Из определения коэффициентов Фурье и функции F имеем

$$F_{k,l}(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} F(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{j=1}^n \rho\sigma_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma. \quad (15)$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (9) по ρ , получаем

$$f'_{k,l}(\rho) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\rho\sigma) \sigma_j \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma. \quad (16)$$

Сравнивая формулы (15) и (16), приходим к соотношению (14). □

Лемма 3. Пусть $\mathcal{B} \in C^1(B_R)$, $\vec{B}(x) = (1 - |x|^2)^n \mathcal{B}(x) \vec{x}$. Тогда

$$(1 - |x|^2)^{-n} (\operatorname{div}_h \vec{B})(x) = n\mathcal{B}(x) + \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_j}(x). \quad (17)$$

Доказательство. В силу (5) имеем

$$\begin{aligned} (1 - |x|^2)^{-n} (\operatorname{div}_h \vec{B})(x) &= \operatorname{div}_e(\mathcal{B}(x) \vec{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}(\mathcal{B}(x)x_j) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\mathcal{B}(x) + x_j \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_j}(x) \right) = n\mathcal{B}(x) + \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x_j}(x), \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Лемма 4. Пусть $\vec{A} \in C^2(B_R)$ и

$$\vec{B}(x) = (1 - |x|^2)^n \mathcal{B}(x) \vec{x}, \quad (18)$$

где

$$\mathcal{B}(x) = \int_0^1 \frac{(\operatorname{div}_h \vec{A})(tx) t^{n-1}}{(1 - t^2|x|^2)^n} dt.$$

Тогда

$$\operatorname{div}_h \vec{B} = \operatorname{div}_h \vec{A}. \quad (19)$$

Кроме того,

$$\mathcal{B}_{k,l}(\rho) = \int_0^1 \frac{(\operatorname{div}_h \vec{A})_{k,l}(t\rho) t^{n-1}}{(1 - t^2\rho^2)^n} dt, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leq l \leq d_k. \quad (20)$$

Доказательство. Для краткости положим

$$f(x) = \frac{(\operatorname{div}_h \vec{A})(x)}{(1 - |x|^2)^n}.$$

Используя (17) и формулу

$$\sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j}(f(tx)) = t \frac{d}{dt}(f(tx)),$$

находим

$$\begin{aligned} (1 - |x|^2)^{-n} (\operatorname{div}_h \vec{B})(x) &= n \int_0^1 f(tx) t^{n-1} dt + \int_0^1 t^{n-1} \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} (f(tx)) dt = \\ &= n \int_0^1 f(tx) t^{n-1} dt + \int_0^1 t^n \frac{d}{dt} (f(tx)) dt. \end{aligned}$$

Преобразуя последнее слагаемое с помощью интегрирования по частям, получаем

$$(1 - |x|^2)^{-n} (\operatorname{div}_h \vec{B})(x) = n \int_0^1 f(tx) t^{n-1} dt + t^n f(tx) \Big|_0^1 - n \int_0^1 f(tx) t^{n-1} dt = f(x),$$

т. е. равенство (19) доказано.

Далее, используя (9) и теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{k,l}(\rho) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mathcal{B}(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \int_0^1 f(t\rho\sigma) t^{n-1} dt \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma = \\ &= \int_0^1 t^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(t\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)} d\sigma dt = \int_0^1 t^{n-1} f_{k,l}(t\rho) dt. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (20). □

Лемма 5. Пусть $a, b \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} b > 1$, $\rho_0 \in (0, 1)$. Тогда

$$\max_{\rho \in [0, \rho_0]} |F(a, b; b+1; \rho^2)| \leq |b| (1 - \rho_0^2)^{-\max\{\operatorname{Re} a, 0\}}, \quad (21)$$

$$\max_{\rho \in [0, \rho_0]} \left| \frac{d}{d\rho} F(a, b; b+1; \rho^2) \right| \leq 2\rho_0 |a| |b| (1 - \rho_0^2)^{-\max\{\operatorname{Re} a + 1, 0\}}. \quad (22)$$

Доказательство. В силу интегрального представления Эйлера гипергеометрической функции при $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ имеем

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1} (1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt$$

(см. [27, гл. 2, п. 2.1.3, формула (10)]). В частности, если $\operatorname{Re} b > 0$, $0 \leq \rho < 1$, то

$$\frac{F(a, b; b+1; \rho^2)}{b} = \int_0^1 t^{b-1} (1-t\rho^2)^{-a} dt. \quad (23)$$

Отсюда нетрудно получить оценку (21). Оценка (22) следует из (21) и следующей формулы дифференцирования гипергеометрической функции:

$$\frac{d}{dz} F(a, b; c; z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1; c+1; z) \quad (24)$$

(см. [27, гл. 2, п. 2.1.2, формула (7)]). □

Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $\rho \in [0, 1)$ положим

$$h_{\lambda,k}(\rho) = \frac{(\nu)_k}{(n/2)_k} \rho^k (1 - \rho^2)^\nu F\left(\nu + k, \nu + 1 - \frac{n}{2}; \frac{n}{2} + k; \rho^2\right), \quad (25)$$

где, как и выше, $\nu = \nu(\lambda) = \frac{1}{2}(i\lambda + n - 1)$. Если $\lambda \in (0, +\infty)$, то при любых $\rho_0 \in (0, 1)$, $s \in \mathbb{Z}_+$ имеет место оценка

$$\max_{\rho \in [0, \rho_0]} \left| \frac{d^s}{d\rho^s} h_{\lambda,k}(\rho) \right| = O(\lambda^s), \quad \lambda \rightarrow \infty \quad (26)$$

(см. [28, лемма 2]). Отметим также равенство

$$(\mathcal{L} + (\lambda^2 + (n - 1)^2)Id)(h_{\lambda,k}(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)) = 0,$$

где Id — тождественный оператор, \mathcal{L} — оператор Лапласа — Бельтрами на $\mathbb{H}^n(\mathbb{R})$, т. е.

$$\mathcal{L} = (1 - |x|^2)^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left((1 - |x|^2)^{2-n} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$$

(см. [28, § 2, формула (9)]).

При фиксированном $r > 0$ и $R > r$ обозначим через $V_r(B_R)$ множество функций $f \in L_{loc}(B_R)$, для которых

$$\int_{gB_r} f(x) dx_h = 0$$

при всех $g \in \mathcal{M}(B^n)$, таких, что $g(\text{cl}B_r) \subset B_R$. Следующий результат получен В. В. Волчковым (см. [28, лемма 14 и теорема 3]).

Теорема 2. 1) Пусть $f \in L_{loc}(B_R)$ и каждый коэффициент ряда (8) имеет вид

$$f_{k,l}(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,l,\lambda} h_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 < \rho < \text{th } R, \quad (27)$$

где $c_{k,l,\lambda} \in \mathbb{C}$ и $\sum_{\lambda \in N(r)} |c_{k,l,\lambda}| < \infty$. Тогда $f \in V_r(B_R)$.

2) Пусть $s \geq n + 3$ и $f \in V_r(B_R) \cap C^s(B_R)$. Тогда при $|k - 1| \leq s - n - 3$ и всех $1 \leq l \leq d_k$ имеет место равенство (27), где $c_{k,l,\lambda} = O(\lambda^{n-s})$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Лемма 6. Имеет место интегральное представление

$$\mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \frac{(n/2)_k}{(\nu)_k} \int_0^1 \left(\frac{1 - \rho^2}{1 - t^2 \rho^2} \right)^n h_{\lambda,k}(t\rho) t^{n-1} dt, \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (28)$$

Доказательство. Из (25) и (7) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{(n/2)_k}{(\nu)_k} \int_0^1 \left(\frac{1 - \rho^2}{1 - t^2 \rho^2} \right)^n h_{\lambda,k}(t\rho) t^{n-1} dt = \\ & = \rho^k (1 - \rho^2)^n \int_0^1 t^{k+n-1} (1 - t^2 \rho^2)^{\nu-n} F\left(\nu + k, \nu + 1 - \frac{n}{2}; \frac{n}{2} + k; t^2 \rho^2\right) dt = \end{aligned}$$

$$= \rho^k (1 - \rho^2)^n \int_0^1 t^{k+n-1} (1 - t^2 \rho^2)^{\nu-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j \left(\nu+1-\frac{n}{2}\right)_j}{\left(\frac{n}{2}+k\right)_j j!} t^{2j} \rho^{2j} dt.$$

В силу признака Вейерштрасса указанный ряд сходится равномерно по t на отрезке $[0, 1]$. Поэтому после его почленного интегрирования и замены переменной $t = \sqrt{u}$ в интеграле приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{(n/2)_k}{(\nu)_k} \int_0^1 \left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2}\right)^n h_{\lambda,k}(t\rho) t^{n-1} dt = \\ & = \rho^k (1 - \rho^2)^n \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j \left(\nu+1-\frac{n}{2}\right)_j}{2j! \left(\frac{n}{2}+k\right)_j} \rho^{2j} \int_0^1 u^{j+\frac{k+n}{2}-1} (1-u\rho^2)^{\nu-n} du. \end{aligned}$$

Используя теперь (23), (11) и (10), получаем (28). \square

Следствие 1. Если $\lambda \in (0, +\infty)$, то при любых $\rho_0 \in (0, 1)$, $s \in \mathbb{Z}_+$ справедлива оценка

$$\max_{\rho \in [0, \rho_0]} \left| \frac{d^s}{d\rho^s} \mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) \right| = O(\lambda^{s-k}), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Доказательство. Дифференцируя (28) с применением формулы Лейбница, имеем

$$\frac{d^s}{d\rho^s} \mathcal{H}_{\lambda,k}(\rho) = \frac{(n/2)_k}{(\nu)_k} \sum_{m=0}^s \frac{s!}{m!(s-m)!} \int_0^1 t^{m+n-1} h_{\lambda,k}^{(m)}(t\rho) \frac{d^{s-m}}{d\rho^{s-m}} \left(\left(\frac{1-\rho^2}{1-t^2\rho^2}\right)^n \right) dt.$$

Учитывая, что

$$\frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z+\beta)} = z^{\alpha-\beta} \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad |\arg z| < \pi \quad (30)$$

(см. [27, гл. 1, § 1.18, формула (4)]), отсюда и из (26) получаем требуемое. \square

Лемма 7. Имеет место равенство

$$\rho^k (1 - \rho^2)^n [\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (n+k) H_{\lambda,k}(\rho)] = \frac{(n/2)_k}{(\nu)_k} h_{\lambda,k}(\rho).$$

Доказательство. В силу асимптотики (30)

$$\left| \frac{(\nu+k)_j \left(\nu+1-\frac{n}{2}\right)_j}{j! \left(\frac{n}{2}+k\right)_j (2j+k+n)} \right| \sim \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}{2 \left| \Gamma(\nu+k) \Gamma\left(\nu+1-\frac{n}{2}\right) \right|} j^{-\operatorname{Im}\lambda-2}, \quad j \rightarrow +\infty.$$

Отсюда и из леммы 5 видно, что ряд (11) и ряд, полученный из него почленным дифференцированием, сходятся равномерно на отрезке $[0, \rho_0]$ при любом $\rho_0 < 1$. Поэтому, используя (24) и теорему о дифференцировании функционального ряда, находим

$$\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (n+k) H_{\lambda,k}(\rho) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j \left(\nu+1-\frac{n}{2}\right)_j \rho^{2j}}{j! \left(\frac{n}{2}+k\right)_j} \left(F\left(n-\nu, j+\frac{k+n}{2}; j+1+\frac{k+n}{2}; \rho^2\right) + \frac{(n-\nu)\rho^2}{j+1+\frac{k+n}{2}} F\left(n-\nu+1, j+1+\frac{k+n}{2}; j+2+\frac{k+n}{2}; \rho^2\right) \right).$$

Выражение с гипергеометрическими функциями в скобках преобразуется с помощью формулы

$$F(a, b; c; z) + \frac{az}{c} F(a+1, b+1; c+1; z) = F(a, b+1; c; z)$$

(см. [31, гл. 7, § 5, п. 2, формула (16)]). При этом получаем

$$\begin{aligned} & \rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (n+k)H_{\lambda,k}(\rho) = \\ & = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j \left(\nu+1-\frac{n}{2}\right)_j \rho^{2j}}{j! \left(\frac{n}{2}+k\right)_j} F\left(n-\nu, j+1+\frac{k+n}{2}; j+1+\frac{k+n}{2}; \rho^2\right). \end{aligned}$$

Поскольку $F(a, b; b; z) = (1-z)^{-a}$ (см. [27, гл. 2, § 2.8, п. 2, формула (1)]), последнее соотношение можно записать в виде

$$\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (n+k)H_{\lambda,k}(\rho) = (1-\rho)^{\nu-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\nu+k)_j \left(\nu+1-\frac{n}{2}\right)_j \rho^{2j}}{j! \left(\frac{n}{2}+k\right)_j}.$$

Теперь требуемое утверждение следует из (7) и (25). □

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\vec{A} \in \mathcal{V}_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Тогда по лемме 1 гиперболическая дивергенция поля \vec{A} принадлежит классу $V_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. Поэтому её коэффициенты Фурье имеют вид

$$(\operatorname{div}_h \vec{A})_{k,l}(\rho) = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,l,\lambda} h_{\lambda,k}(\rho), \quad 0 \leq \rho < \operatorname{th} R, \tag{31}$$

где $c_{k,l,\lambda} \in \mathbb{C}$ и $c_{k,l,\lambda} = O(\lambda^{-s})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$ (см. второе утверждение в теореме 2). Положим $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$, где векторное поле \vec{B} определяется равенством (18). В силу соотношений (31), (26), (28) и леммы 4 поле \vec{C} является соленоидальным и

$$\mathcal{B}_{k,l}(\rho) = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{(1-t^2\rho^2)^n} \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,l,\lambda} h_{\lambda,k}(t\rho) dt = \sum_{\lambda \in N(r)} c_{k,l,\lambda} \frac{(\nu)_k}{(n/2)_k} \rho^k H_{\lambda,k}(\rho).$$

При этом коэффициенты $\gamma_{k,l,\lambda} = \frac{(\nu)_k}{(n/2)_k} c_{k,l,\lambda}$ ведут себя как $O(\lambda^{-s})$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для любого $s > 0$ (см. (30)). Тем самым необходимость в теореме 1 доказана.

Наоборот, пусть $\vec{A} \in C^\infty(B_R)$ и имеют место разложения (12), (13). Тогда (см. соотношения (17), (14), (29) и лемму 7)

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}_h \vec{B})_{k,l}(\rho) &= (1 - \rho^2)^n (\rho \mathcal{B}'_{k,l}(\rho) + n \mathcal{B}_{k,l}(\rho)) = \\ &= (1 - \rho^2)^n \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,l,\lambda} \rho^k (\rho H'_{\lambda,k}(\rho) + (n+k) H_{\lambda,k}(\rho)) = \sum_{\lambda \in N(r)} \gamma_{k,l,\lambda} \frac{(n/2)_k}{(\nu)_k} h_{\lambda,k}(\rho). \end{aligned}$$

Это разложение и теорема 2 показывают, что $\operatorname{div}_h \vec{B} \in V_r(B_R)$. Учитывая, что $\operatorname{div}_h \vec{C} = 0$, отсюда и из леммы 1 заключаем, что $\vec{A} \in \mathcal{V}_r(B_R)$. Таким образом, теорема 1 доказана.

Список литературы

1. **Ungar P.** Freak theorem about functions on a sphere // Journal of the London Mathematical Society. 1954. Vol. 29, iss. 2. P. 100–103.
2. **Йон Ф.** Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М. : Иностр. лит., 1958.
3. **Delsarte J.** Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris Sér. A–B. 1958. Vol. 246. P. 1358–1360.
4. **Schneider R.** Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1969. Vol. 26. P. 381–384.
5. **Smith J.** Harmonic analysis of scalar and vector fields in \mathbb{R}^n // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 1972. Vol. 72. P. 403–416.
6. **Беренштейн К. А., Струппа Д. К.** Комплексный анализ и уравнения в свёртках // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Фундамент. направления. 1989. Т. 54. С. 5–111.
7. **Berenstein K. A., Gay R., Yger A.** Inversion of the local Pompeiu transform // Journal d'Analyse Mathématique. 1990. Vol. 54. P. 259–287.
8. **Zalcman L.** A bibliographic survey of the Pompeiu problem. In book : Approximation by Solutions of Partial Differential Equations. Dordrecht : Kluwer, 1992. P. 185–194.
9. **Netuka I.** Mean value property and harmonic functions. In book : Classical and Modern Potential Theory and Applications. Dordrecht : Kluwer, 1994. P. 359–398.
10. **Thangavelu S.** Spherical means and CR functions on the Heisenberg group // Journal d'Analyse Mathématique. 1994. Vol. 63. P. 255–286.
11. **Волчков В. В.** Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сб. 1995. Т. 186, вып. 6. С. 15–34.
12. **Волчков В. В.** Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб. 1997. Т. 188, вып. 9. С. 13–30.
13. **Berkani M., El Harchaoui M., Gay R.** Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans l'espace hyperbolique quaternionique — Cas des deux boules // Journal of Complex Variables. 2000. Vol. 43. P. 29–57.
14. **Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.** Обращение локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Докл. Акад. наук. 2001. Т. 379, № 5. С. 587–590.
15. **Zalcman L.** Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem" // Contemporary Mathematics. Radon Transform and Tomography. 2001. Vol. 278. P. 69–74.
16. **Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.** Теоремы об обращении локального преобразования Помпейю на кватернионном гиперболическом пространстве // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, вып. 5. С. 169–197.

17. **Volchkov V. V.** Integral Geometry and Convolution Equations. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003.
18. **Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.** Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group. London : Springer-Verlag, 2009.
19. **Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.** Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces. Basel : Birkhäuser, 2013.
20. **Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.** Проблема устранимости для функций с нулевыми шаровыми средними // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 543–552.
21. **Волчков В. В., Волчков Вит. В.** Интерполяционные задачи для функций с нулевыми интегралами по шарам фиксированного радиуса // Докл. Акад. наук. 2020. Т. 490, № 1. С. 20–23.
22. **Волчков В. В., Волчков Вит. В.** Непрерывное периодическое в среднем продолжение функций с отрезка // Докл. Акад. наук. 2021. Т. 496. С. 21–25.
23. **Волчков В. В., Волчков Вит. В.** Непрерывное продолжение функций с отрезка до функций в \mathbb{R}^n с нулевыми шаровыми средними // Изв. вузов. Математика. 2021. № 3. С. 3–14.
24. **Волчкова Н. П., Волчков Вит. В., Ищенко Н. А.** Стирание особенностей функций с нулевыми интегралами по кругам // Владикавказ. мат. журн. 2021. Т. 23, № 2. С. 19–33.
25. **Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.** Векторные поля с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса // Владикавказ. мат. журн. 2018. Т. 20, № 4. С. 20–34.
26. **Альфортс Л.** Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. М : Мир, 1986.
27. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2. М. : Наука, 1973, 1974.
28. **Волчков В. В.** Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65, № 2. С. 3–26.
29. **Стейн И., Вейс Г.** Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М. : Мир, 1974.
30. **Гельфанд И. М., Граев М. И., Ретах В. С.** Общие гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, вып. 4 (286). С. 3–82.
31. **Виленкин Н. Я.** Специальные функции и теория представлений групп. М. : Наука, 1991.

Поступила в редакцию 03.02.2022.

После переработки 11.04.2022.

Сведения об авторах

Волчкова Наталья Петровна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой высшей математики им. В. В. Пака, Донецкий национальный технический университет, Донецк; e-mail: volna936@gmail.com.

Волчков Виталий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецкий национальный университет, Донецк; e-mail: volna936@gmail.com.

CHARACTERIZATION OF GENERALIZED PERIODIC VECTOR FIELDS ON HYPERBOLIC SPACE

N.P. Volchkova¹, Vit.V. Volchkov²

¹*Donetsk National Technical University, Donetsk*

²*Donetsk National University, Donetsk*
volna936@gmail.com

We study vector fields which have zero flux through every sphere of fixed radius in a ball on a real hyperbolic space. For fields in such classes a description in the form of a series in special functions is obtained.

Keywords: *vector field, hyperbolic space, zero spherical mean, spherical harmonic, Horn hypergeometric series.*

References

1. **Ungar P.** Freak theorem about functions on a sphere. *Journal of the London Mathematical Society*, 1954, vol. 29, no. 2, pp. 100–103.
2. **John F.** *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations.* New York, Dover Publ., 2013.
3. **Delsarte J.** Note sur une propriété nouvelle des fonctions harmoniques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris Sér. A–B*, 1958, vol. 246, pp. 1358–1360.
4. **Schneider R.** Functions on a sphere with vanishing integrals over certain subspheres. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1969, vol. 26, pp. 381–384.
5. **Smith J.D.** Harmonic analysis of scalar and vector fields in \mathbb{R}^n . *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1972, vol. 72, pp. 403–416.
6. **Berenstein C.A., Struppa D.C.** Complex analysis and convolution equations. *Several complex variables. Vol.: Complex analysis in partial differential equations and mathematical physics.* Berlin. Springer-Verlag, 1993. Pp. 1–108.
7. **Berenstein C.A., Gay R., Yger A.** Inversion of the local Pompeiu transform. *Journal d'Analyse Mathématique*, 1990, vol. 54, pp. 259–287.
8. **Zalcman L.** A bibliographic survey of the Pompeiu problem. *Approximation by Solutions of Partial Differential Equations*, Dordrecht, Kluwer, 1992. Pp. 185–194.
9. **Netuka I.** Mean value property and harmonic functions. *Classical and Modern Potential Theory and Applications.* Dordrecht, Kluwer, 1994. Pp. 359–398.
10. **Thangavelu S.** Spherical means and CR functions on the Heisenberg group. *Journal d'Analyse Mathématique*, 1994, vol. 63, pp. 255–286.
11. **Volchkov V.V.** A definitive version of the local two-radii theorem. *Sbornik Mathematics*, 1995, vol. 186, no. 6, pp. 783–802.
12. **Volchkov V.V.** Solution of the support problem for several function classes. *Sbornik Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 9, pp. 1279–1294.
13. **Berkani M., El Harchaoui M., Gay R.** Inversion de la transformation de Pompeiu locale dans l'espace hyperbolique quaternionique — Cas des deux boules. *Journal of Complex Variables*, 2000, vol. 43, pp. 29–57.
14. **Volchkov Vit.V., Volchkova N.P.** Inversion of the local Pompeiu transform on the quaternion hyperbolic space. *Doklady Mathematics*, 2001, vol. 64, no. 1, pp. 90–93.
15. **Zalcman L.** Supplementary bibliography to "A bibliographic survey of the Pompeiu problem". *Contemporary Mathematics. Radon Transform and Tomography*, 2001, vol. 278, pp. 69–74.

16. **Volchkov Vit.V., Volchkova N.P.** Inversion theorems for the local Pompeiu transformation in the quaternion hyperbolic space. *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2004, vol. 15, no. 5, pp. 753–771.
17. **Volchkov V.V.** *Integral Geometry and Convolution Equations*. Dordrecht, Kluwer, 2003.
18. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** *Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*. London, Springer, 2009.
19. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** *Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*. Basel, Birkhäuser, 2013.
20. **Volchkov Vit.V., Volchkova N.P.** The removability problem for functions with zero spherical means. *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 419–426.
21. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** Interpolation problems for functions with zero integrals over balls of fixed radius. *Doklady Mathematics*, 2020, vol. 101, no. 1, pp. 16–19.
22. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** Continuous mean periodic extension of functions from an interval. *Doklady Mathematics*, 2021, vol. 103, no. 1, pp. 14–18.
23. **Volchkov V.V., Volchkov Vit.V.** Continuous extension of functions from a segment to functions in \mathbb{R}^n with zero ball means. *Russian Mathematics*, 2021, vol. 65, no. 3, pp. 1–11.
24. **Volchkov Vit.V., Volchkova N.P.** Vector fields with zero flux through spheres of fixed radius. *Vladikavkazskiy Matematicheskiy Zhurnal [Vladikavkaz Mathematical Journal]*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 20–34. (In Russ.).
25. **Volchkova N.P., Volchkov Vit.V., Ischenko N.A.** Erasing of singularities of functions with zero integrals over disks, *Vladikavkazskiy Matematicheskiy Zhurnal [Vladikavkaz Mathematical Journal]*, 2021, vol. 23, no. 2, pp. 19–33. (In Russ.).
26. **Ahlfors L.** *Möbius Transformations in Several Dimensions*, Minneapolis, University of Minnesota, 1981.
27. **Bateman H., Erdélyi A.** *Higher Transcendental Functions*, Vols. I, II. New York, McGraw-Hill, 1953.
28. **Volchkov V.V.** A definitive version of the local two-radii theorem on hyperbolic spaces. *Izvestiya Mathematics*, 2001, vol. 65, no. 2, pp. 207–229.
29. **Stein E., Weiss G.** *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. New Jersey, Princeton University Press, 1971.
30. **Gel'fand I.M., Graev M.I., Retakh V.S.** General hypergeometric systems of equations and series of hypergeometric type. *Russian Mathematical Surveys*, 1992, vol. 47, no. 4, pp. 1–88.
31. **Vilenkin N.Ja.** *Special Functions and the Theory of Group Representations*. Rhode Island : AMS, 1968.

Article received 03.02.2022.

Corrections received 11.04.2022.