Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Д. Д. Рютов, Г. В. Ступаков, Диффузия резонансных частиц в амбиполярных плазменных ловушках,
Докл. АН СССР, 1978, том 240, номер 5, 1086–1089

https://www.mathnet.ru/dan41789

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
7 декабря 2025 г., 13:15:15

Доклады Академии наук СССР
1978. Том 240, № 5

УДК 533.932 **ФИЗИКА**

Член-корреспондент АН СССР Д. Д. РЮТОВ, Г. В. СТУПАКОВ

ДИФФУЗИЯ РЕЗОНАНСНЫХ ЧАСТИЦ В АМБИПОЛЯРНЫХ ПЛАЗМЕННЫХ ЛОВУШКАХ

Предложенные недавно амбиполярные ловушки ([1], [2]) открывают возможность устранения главного недостатка классических открытых ловушек — малого времени жизни ионов по отношению к уходу через пробки. Вместе с тем, как было показано в работе ([3]), в таких ловушках возникает новый канал потерь, связанный с усиленной диффузией плазмы поперек магнитного поля. Причиной ее является аксиальная несимметрия магнитного поля центрального пробкотрона, приводящая к радиальным блужданиям частиц в процессе их дрейфа вокруг магнитной оси системы.

Общая характеристика возможных режимов потерь была дана в работе ([3]). Там было показано, что ситуация в существенной степени определяется величиной угла прокручивания $\Delta\psi$ частицы вокруг магнитной оси при движении частицы от пробки до пробки по длинному однородному участку центрального пробкотрона ($\Delta\psi$ зависит от r — расстояния частицы до оси на однородном участке, ε — полной энергии частицы и μ — магнитного момента: $\Delta\psi\equiv\Delta\psi(r, \varepsilon, \mu)$). При $\Delta\psi\ll 1$ имеет место так называемый неоклассический режим диффузии, подробно рассмотренный в ([4]). При очень больших углах прокручивания, таких, что $|\Delta r\, \partial\Delta\psi/\partial r|\gg 1$, где Δr — радиальное смещение частицы при ее отражении от пробки, возникает «стохастическая» диффузия и потери перестают зависеть от частоты столкновений. Если же угол $\Delta\psi$ уже велик по сравнению с единицей $\Delta\psi\gtrsim 1$, но не настолько, чтобы выполнялось условие стохастичности, существенную роль играет столкновительная диффузия «резонансных» частиц, т. е. частиц, для которых отношение $\Delta\psi/\pi$ является рациональным числом. Именно этот тип диффузии исследуется в настоящей работе. По-видимому, он будет реализоваться в большинстве проектируемых сейчас амбиполярных ловушек и поэтому представляет наибольший интерес.

Мы получим выражение для диффузионного потока ионов плазмы в предположении, что длина их свободного пробега много больше длины центрального пробкотрона (в противном случае справедливы обычные гидродинамические уравнения с классическими коэффициентами переноса).

Центральный пробкотрон амбиполярной ловушки характеризуется тем, что длина его однородной и аксиально-симметричной части L много больше длины магнитных пробок $L_п$ (рис. 1). При отражении от пробок центр ларморовской окружности частицы испытывает радиальное смещение Δr, величина которого зависит от параметров ε, μ и координат точки влета в пробку r, ψ * (цилиндрическая система координат с осью z, направленной по оси ловушки). Вследствие симметрии ловушки функция $\Delta r(r, \psi, \varepsilon, \mu)$ периодична по ψ с периодом π и инвариантна относительно преобразований $\psi\to-\psi$, $\psi\to\pi-\psi$. Поэтому ее разложение в ряд Фурье имеет следующий вид:

$$\Delta r=\sum_{k=1}^{\infty} a_k(r, \varepsilon, \mu)\cos 2k\psi; \qquad (1)$$

угол ψ отсчитывается от плоскости симметрии ловушки. Нулевой член в (1) в дрейфовом приближении оказывается равным нулю ([5]).

В случае, когда радиус плазмы R мал по сравнению с длиной пробки $L_п$ (расстояние, на котором магнитное поле в пробке меняется в два раза),

* Отлично от нуля также азимутальное смещение, но оно мало по сравнению с $\Delta\psi$ и для дальнейшего несущественно.

в сумме (1) высшие гармоники оказываются малыми по параметру $(R/L_п)^2$, и можно ограничиться членом с $k=1$ $\Delta r = a_1 \cos 2\psi$. Поскольку магнитные пробки центрального пробкотрона повернуты друг относительно друга на 90° (рис. 1), то выражение для смещения Δr в противоположной пробке получается преобразованием $\psi \to \psi - \pi/2$, т. е. отличается просто знаком.

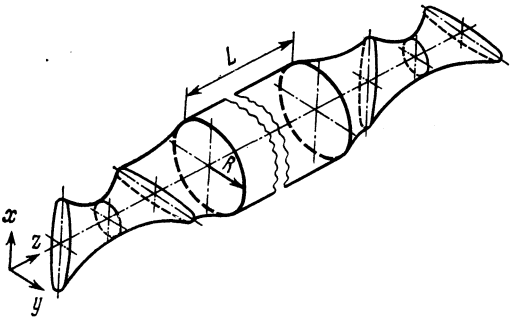

Рис. 1. Геометрия магнитного поля амбиполярной ловушки. L — длина центрального пробкотрона. Ловушка обладает двумя плоскостями симметрии: $x=0$ и $y=0$

Найдем теперь изменение координат r и ψ иона, который в начальный момент находился в экваториальной плоскости ловушки, после того как он достигнет первой пробки, отразится от нее, пролетит ловушку, отразится от второй пробки и вернется в экваториальную плоскость (т. е. за $2t_\parallel$, где $t_\parallel$ — время пролета иона от пробки до пробки). При влете в первую и вторую пробки ион имеет соответственно фазы $\psi + {}^1/_2\Delta\psi(r, \varepsilon, \mu)$ и $\psi + {}^3/_2\Delta\psi(r, \varepsilon, \mu)$, так что искомое изменение r и ψ задается формулами

$$r \to r + a_1(r)\cos 2(\psi + {}^1/_2\Delta\psi(r)) - a_1(r)\cos 2(\psi + {}^3/_2\Delta\psi(r)) + O(a_1^2), \qquad (2)$$

$$\psi \to \psi + 2\Delta\psi(r) + O(a_1); \qquad (3)$$

аргументы ε и μ в a_1 и $\Delta\psi$ для краткости опускаем.

Соотношения (2), (3) можно рассматривать как преобразование, определяющее движение нелинейного осциллятора под действием импульсной силы. При этом r играет роль переменной действия, ψ — фазы осциллятора (см., например, ([6])), а период толчков внешней силы равен $2t_\parallel$. Поскольку по углу ψ система периодична с периодом, равным π, то частота колебаний осциллятора есть $2\Delta\psi/t_\parallel$. Условие резонанса для системы (2), (3) состоит в том, что период вынуждающей силы кратен периоду движения осциллятора:

$$\Delta\psi(r, \varepsilon, \mu) = k\pi/2. \qquad (4)$$

В этой формуле k пробегает нечетные значения, при четных k преобразование (2) с точностью до членов $O(a_1^2)$ сохраняет величину r.

Уравнение (4) для частицы с данными ε и μ определяет радиус $r_0(\varepsilon, \mu)$, на котором выполняется условие резонанса $\Delta\psi(r_0, \varepsilon, \mu) \equiv k\pi/2$. Введем $x = r - r_0(\varepsilon, \mu)$ и рассмотрим движение резонансных частиц, для которых величина x мала (и соответственно $|\Delta\psi - k\pi/2| \ll 1$). Соотношения (2) и (3) при этом можно упростить:

$$x \to x + (-1)^{(k+1)/2} 2a_1(r_0)\sin 2\psi, \qquad \psi \to \psi + k\pi + 2x\psi'(r_0), \qquad \psi' \equiv \partial\Delta\psi/\partial r. \qquad (5)$$

Двукратное применение преобразования (5) приводит к изменению x на величину $4(-1)^{(k+1)/2}a_1(r_0)\sin 2\psi$ и изменению фазы (с точностью до несущественного слагаемого $2k\pi$) на $4x\,\Delta\psi$. Если рассматривать последовательные положения иона в экваториальной плоскости ловушки через промежутки времени $4t_\parallel$, то соответствующие точки будут лежать на некоторой кривой — траектории частицы в плоскости (r, ψ). Уравнения, определяющие движение иона по этой кривой, получаются из (5):

$$\dot{x} = (-1)^{(k+1)/2}\frac{a_1(r_0)}{t}\sin 2\psi, \qquad \dot{\psi} = \frac{1}{t_\parallel}x\psi'(r_0). \qquad (6)$$

Отсюда находим, что форма траектории задается уравнением

$$J \equiv (-1)^{\frac{1}{2}(k-1)} \frac{\psi'(r_0)}{a_1(r_0)} x^2 - \cos 2\psi = \text{const}. \tag{7}$$

Значениям $|J|<1$ соответствуют захваченные частицы, для которых область движения по углу ψ ограничена, а $|J|>1$ — пролетные частицы, обходящие магнитную ось системы.

Величина радиальных блужданий резонансных частиц Δx_{res} оценивается из (7) и по порядку величины равна $\Delta x_{\text{res}} \sim |a_1/\psi'|^{1/2}$. Для нерезонансных частиц (для которых $|\Delta\psi - k\pi/2| \sim 1$) величина Δx порядка a_1 и мала по сравнению с Δx_{res} (поскольку предполагается, что выполняется неравенство $|a_1\psi'| \ll 1$). Это обстоятельство приводит к тому, что при наличии радиальных градиентов плотности и температуры в центральном пробкотроне максвелловская функция распределения сильнее всего искажается вдоль определяемых условием резонанса (4) линий в плоскости (ε, μ). Представляя функцию распределения ионов в виде

$$f = f_{\text{M}} + \delta f, \quad f_{\text{M}} = n(r)\,[m_i/2\pi T_i(r)]^{3/2} \exp[-(\varepsilon - e\varphi(r))/T_i(r)],$$

можем считать, что функция δf в данной точке (r, ψ) отлична от нуля только в узких полосках в окрестности «резонансных» кривых, задаваемых уравнением (4).

Уравнение для нахождения δf получается путем интегрирования стационарного дрейфового кинетического уравнения вдоль отрезка фазовой траектории резонансной частицы, который она проходит за время $4t_{\parallel}$. Начальная и конечная точки этого отрезка лежат в экваториальной плоскости ловушки. Если учесть, что длина пробега ионов в ловушке много больше длины центрального пробкотрона, так что функцию распределения f можно считать постоянной на этом отрезке фазовой траектории, то в результате получим

$$\dot{\psi} \frac{\partial f}{\partial \psi} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial r} = \text{St}\, f. \tag{8}$$

Здесь аргументами функции распределения являются координаты r, ψ и параметры частицы ε, μ; $\text{St}\, f$ — столкновительный член.

Общее выражение для $\text{St}\, f$ существенно упрощается, если учесть, что функция $\delta f(r, \psi, \varepsilon, \mu)$ отлична от нуля только в узких окрестностях резонансных кривых. Уравнение, задающее резонансную кривую, имеет вид $x(\varepsilon, \mu) = 0$. Если от переменных ε, μ перейти к переменным x, μ, то функция δf будет сильно меняться при малых изменениях x и слабо зависеть от μ. Поэтому в общем выражении для $\text{St}\, f$ можно сохранить только члены, содержащие два дифференцирования по x (ср. соответствующее приближение в ([4])). При этом в коэффициенте перед второй производной по x можно положить $r_0 = r$. Результат имеет вид

$$\text{St}\, f = \text{St}\, \delta f = \nu_i(r, \mu) r^2 \frac{\partial^2 \delta f}{\partial x^2}, \tag{9}$$

$$\nu_i(r, \mu) = \frac{4\pi}{2^{1/2}} \frac{\Lambda n e^4}{m_i^{1/2} T_i^{3/2}} \frac{1}{r^2} \left[\mu^2 \left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu} \right)^2 G_1(\xi, \zeta) + \right.$$

$$\left. + \mu\varepsilon \frac{\partial r_0}{\partial \mu} \frac{\partial r_0}{\partial \varepsilon} G_2(\zeta) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial r_0}{\partial \varepsilon} \right)^2 G_3(\zeta) \right],$$

$$G_1(\xi, \zeta) = \frac{1}{\xi\zeta^3} \left[\left(1 - \frac{1}{2\zeta} \right) h + \frac{dh}{d\zeta} \right] + \frac{h}{\zeta^4}, \quad G_2 = \frac{2h}{\zeta^4}, \quad G_3 = \frac{h}{\zeta^4},$$

$$h(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} e^{-t} t^{1/2}\, dt, \quad \zeta^2 = \frac{\varepsilon - e\varphi}{T_i}, \quad \xi = \frac{\mu H}{\varepsilon - e\varphi - \mu H}$$

Кинетическое уравнение (8) со столкновительным членом в виде (9) и уравнениями движения частицы (6) с точностью до обозначений совпадают с уравнением для δf, которое приходится решать в неоклассической теории процессов переноса в амбиполярных ловушках ([4]) (см. также ([7])). Поэтому, опуская промежуточные вычисления, мы приведем здесь только результат.

Если обратная эффективная частота столкновений $\nu_{\text{eff}}^{-1} \sim \nu_i^{-1} \Delta x_{\text{res}}^2 / R^2$ велика по сравнению со временем движения резонансной частицы по траектории $\tau_{\text{res}} \sim t_{\parallel} |a_1 \psi'|^{-1/2}$, то мы имеем дело с резонансным аналогом бананового режима неоклассической теории ([7]). Выражение для потока частиц, усредненного по азимуту ψ, имеет вид

$$\langle q_r \rangle = -\frac{2^{1/2} \pi^2 \gamma H r^2}{m_i^2 L} \sum_{k=1}^{\infty} \int d\mu\, \nu_i t_{\parallel} \frac{|a_1 (\partial \Delta\psi / \partial r)|^{1/2}}{|\partial \Delta\psi / \partial \varepsilon|} \frac{\partial f_M}{\partial r}; \qquad (10)$$

здесь значение подынтегральной функции берется вдоль резонансной кривой $\varepsilon = \varepsilon_k(r, \mu)$, являющейся решением уравнения (4), а суммирование проводится по номерам резонансов k. Численный коэффициент

$$\gamma = \frac{4}{\pi} - 2 \int_0^1 \frac{dt}{t^2} \left[\frac{1}{E(t)} - \frac{2}{\pi} \right] = 0{,}88,$$

где $E(t)$ — эллиптический интеграл второго рода.

В случае, когда $\nu_{\text{res}}^{-1} \ll \nu_{\text{eff}}$, осуществляется резонансный режим плато и $\langle q_r \rangle$ дается следующей формулой:

$$\langle q_r \rangle = -\frac{\pi^2 H}{2 m_i^2 L} \sum_{k=1}^{\infty} \int d\mu \frac{a_1^2}{|\partial \Delta\psi / \partial \varepsilon|} \frac{\partial f_M}{\partial r}; \qquad (11)$$

здесь также интеграл берется вдоль резонансной кривой и проводится суммирование по номерам резонансов.

Фактически при суммировании по k в (10), (11) достаточно учесть ограниченное число слагаемых, потому что с увеличением k кривые $\varepsilon_k(r, \mu)$ смещаются в область больших скоростей, где число частиц экспоненциально мало. По порядку величины $k_{\max} \sim \Delta\psi_0$, где $\Delta\psi_0$ — характерное значение угла прокручивания для иона с $\varepsilon, \mu H \sim T_i$. С учетом этого из (10), (11) следуют простые оценки для коэффициентов диффузии плазмы:

$$D_{\text{ban}} \sim \nu_i R^2 / a_1 \Delta\psi_0 / R|^{1/2}, \quad D_{pl} \sim a_1^2 / t_{\parallel}.$$

Институт ядерной физики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
1 II 1978

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. И. Димов, В. В. Закайдаков, М. Е. Кишиневский,* Физика плазмы, т. 2, 597 (1976). [2] *T. K. Fowler, B. G. Logan,* Comments on Plasma Phys. and Controlled Fusion, v. 2, 167 (1977). [3] *Д. Д. Рютов, Г. В. Ступаков,* Письма ЖЭТФ, т. 26, 186 (1977). [4] *Д. Д. Рютов, Г. В. Ступаков,* Физика плазмы, т. 4, в 3 (1978). [5] *А. И. Морозов, Л. С. Соловьев,* В сб.: Вопросы теории плазмы, в. 2, М., Атомиздат, 1963, стр. 177. [6] *Г. М. Заславский, Б. В. Чириков,* УФН, т. 105, 3 (1971). [7] *А А. Галеев, Р. З Сагдеев,* В сб.: Вопросы теории плазмы, в. 7, М., Атомиздат, 1973, стр. 205.