Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

U. U. Umirbaev, The Specht property of a variety of solvable alternative algebras,
Algebra Logika, 1985, Volume 24, Number 2, 226–239

https://www.mathnet.ru/eng/al1903

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.175
December 9, 2025, 18:03:18

Алгебра и логика, 24, № 2 (1985), 226-239

УДК 519.48

ШПЕХТОВОСТЬ МНОГООБРАЗИЯ РАЗРЕШИМЫХ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР

У. У. УМИРБАЕВ

Вопрос о шпехтовости многообразия разрешимых альтернативных алгебр сформулировал А. М. Слинько [1; 1.129, 2.92]. Шпехтовость многообразия разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр следует из результатов работы Ю. А. Медведева [3]. Он же [4] построил пример разрешимой альтернативной алгебры (с тождествами $[(xy)(zt)]k = k[(xy)(zt)] = 0$) над полем характеристики 2, не имеющей конечного базиса тождеств. В настоящей работе доказывается следующая

ТЕОРЕМА. *Многообразие разрешимых альтернативных алгебр над полем характеристики* $\neq 2,3$ *шпехтово.*

Пусть $\mathfrak{N}_k$ и $\mathfrak{A}$ – соответственно многообразия альтернативных алгебр класса нильпотентности не выше k и алгебр с нулевым умножением. С. В. Пчелинцев [5] доказал, что всякая разрешимая альтернативная алгебра A над полем характеристики $\neq 2,3$ принадлежит многообразию $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \wedge \wedge \mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_m$, т. е. $(A^2)^k = (A^m)^3 = 0$ для некоторых k, m, зависящих только от индекса разрешимости алгебры A. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать шпехтовость многообразия $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \wedge \wedge \mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_m$. В такой формулировке теорема является аналогом результатов Брайнта, Воон-Ли [7], Г. В. Шеиной [6].

§ 1 посвящен предварительному изучению некоторых эндоморфизмов сво-

© Институт математики СО АН СССР, 1985

бодных разрешимых индекса 2 альтернативных алгебр. В § 2 завершается доказательство теоремы.

В работе всюду предполагается, что F – произвольное поле характеристики $\neq 2, 3$.

§ 1. Некоторые эндоморфизмы разрешимой индекса 2 альтернативной алгебры

Здесь A означает свободную разрешимую индекса 2 альтернативную алгебру над полем F со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Приведем некоторые обозначения:

$$x \circ y := xy + yx, \qquad (x, y, z) := (xy)z - x(yz);$$

$$x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} := (\ldots((x_{i_1} x_{i_2}) x_{i_3}) \ldots x_{i_n});$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}] := [\ldots[[x_{i_1}, x_{i_2}], x_{i_3}], \ldots, x_{i_n}];$$

$$J(x, y, z) := [x, y, z] + [y, z, x] + [z, x, y];$$

$$\{x, y, z\} := [x, y, z] + [x, z, y].$$

В любой альтернативной алгебре выполняются следующие тождества [2, 5]:

$$[x \circ y, z] = [x, z] \circ y + [y, z] \circ x; \tag{1}$$

$$6(x, y, z) = J(x, y, z); \tag{2}$$

$$x(yz)x = (xy)(zx); \tag{3}$$

$$[x, y, z] = (z \circ y) \circ x - (x \circ z) \circ y + 2(z, x, y). \tag{4}$$

Алгебра A удовлетворяет тождеству

$$(xy)(zt) = 0. \tag{5}$$

Перечислим некоторые тождества алгебры A, попутно выводя их доказательства:

$$xyzz \overset{(5)}{=} (xy,z,z) = z[z(xy)] = 0; \tag{6}$$

$$[xy,z,z] \overset{(6)}{=} -2z(xy)z \overset{(3)}{=} -2(zx)(yz) = 0; \tag{7}$$

$$xyzt = (xy,z,t) \overset{(2)}{=} \frac{1}{6}J(xy,z,t) \overset{(5)}{=}$$

$$= \frac{1}{6}([xy,z,t] - [xy,t,z]) \overset{(7)}{=} \frac{1}{3}[xy,z,t]; \tag{8}$$

$$xyzt \overset{(8)}{=} \frac{1}{3}[xy,z,t] \overset{(4),(5)}{=} \frac{1}{3}(2xyzt - ((xy)\circ t)\circ z).$$

Из последнего тождества следует, что

$$((xy)\circ z)\circ t = xyzt. \tag{9}$$

В силу тождества (7) получаем, что

$$\{xy,z,t\} = [xy,z,t] + [xy,t,z] = 0. \tag{10}$$

Далее в силу теоремы Артина [2] в алгебре A любое слово длины $\geqslant 4$ от x, y равно нулю. Линеаризуя тождество $[x,y,y,x] = 0$, получаем, что

$$[\{x,y,z\},t] = -[\{t,y,z\},x]. \tag{11}$$

Верна следующая

ЛЕММА 1. *Всякий элемент из A^2 представляется как линейная комбинация элементов вида:*

$$(x_i \circ x_j)\circ \hat{x}_\ell, \tag{12}$$

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}] \circ \hat{x}_\ell, \tag{13}$$

где $t \geqslant 2$ и $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$;

$$[\{x_{i_1}, x_i, x_j\}, x_{i_2}, x_{i_3}, \ldots, x_{i_t}] \circ \hat{x}_\ell, \tag{14}$$

где $t \geqslant 1$ и $i_1 < i_2 < \ldots < i_t$.

(Здесь $\hat{x}$ означает, что x может и отсутствовать.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Произведение любых двух элементов алгебры A можно заменить йордановым произведением и коммутатором этих двух элементов. В силу тождеств (8), (9) можно считать, что коммутаторы встречаются во всех словах длины $\geqslant 4$. Если в записи элемента ω где-нибудь встречается коммутатор, то в силу тождеств (1) и (5) ω можно представить как линейную комбинацию слов вида

$$[x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}] \circ x_{i_{t+1}} \circ x_{i_{t+2}} \circ \ldots \circ x_{i_{t+\ell}}.$$

Ввиду тождеств (8), (9) можно считать, что $\ell \leqslant 1$. Далее, легко понять, что всякий элемент из A^2 представляется как линейная комбинация слов вида (12), (13) и слов вида

$$[\{x_{i_1}, x_i, x_j\}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_t}] \circ \hat{x}_\ell.$$

Для слов такого вида неравенства, указанные в лемме, легко достигаются с помощью (11).

Лемма доказана.

Положим $T_x = R_x - L_x$, где R_x, L_x – операторы правого и левого умножений. Если $\alpha = \{i_1 < i_2 < \ldots < i_n\}$ – конечное подмножество натуральных чисел N, то положим

$$T_\alpha = T_{x_{i_1}} T_{x_{i_2}} \ldots T_{x_{i_n}}, \; R_\alpha = R_{x_{i_1}} R_{x_{i_2}} \ldots R_{x_{i_n}}.$$

Пусть $\Theta = \{t_1 < t_2 < t_3 < t_4\} \subseteq N$. Тогда эндоморфизм $\overline{\Theta}$

алгебры A определяем на порождающих формулой $\bar{\Theta}: x_i \to x_i + x_i T_\theta$ для всех $i \in N$.

ЛЕММА 2. 1) Если u - слово вида (13), то $u\bar{\Theta} = u + 2uT_\theta + \tilde{u}$, где $\tilde{u}$ - линейная комбинация слов вида (14). 2) Если u - слово вида (14), то

$$u\bar{\Theta} = u + uT_\theta.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несколько раз применяя тождество (7), получаем, что

$$\begin{aligned}
&[x_i, x_j]\bar{\Theta} - [x_i, x_j] = [x_i, x_j T_\theta] + [x_i T_\theta, x_j] = \\
&= [x_j, x_{t_1}, x_i, x_{t_2}, x_{t_3}, x_{t_4}] - \\
&- [x_i, x_{t_1}, x_j, x_{t_2}, x_{t_3}, x_{t_4}] = \\
&= -[x_j, x_i]T_\theta + [\{x_j, x_{t_1}, x_i\}, x_{t_2}, x_{t_3}, x_{t_4}] + \\
&+ [x_i, x_j]T_\theta - [\{x_i, x_j, x_{t_1}\}, x_{t_2}, x_{t_3}, x_{t_4}] = \\
&= 2[x_i, x_j]T_\theta + \tilde{u},
\end{aligned}$$

где $\tilde{u}$ - линейная комбинация слов вида (14).

Из этого равенства, в силу тождества (5), для слов вида (13) следует, что

$$\begin{aligned}
u\bar{\Theta} &= u + \tilde{u} + \\
&+ 2[[x_{i_1}, x_{i_2}]T_\theta, x_{i_3}, x_{i_4}, \ldots, x_{i_t}] \circ \hat{x}_\ell,
\end{aligned}$$

где $\tilde{u}$ - линейная комбинация слов вида (14).

Теперь с помощью тождеств (7)-(9) легко доказывается первая часть леммы.

Далее, с помощью (7), (10), (11) аналогично доказывается равенство

$$\{x_i, x_j, x_\ell\}\bar{\theta} = \{x_i, x_j, x_\ell\} + \{x_i, x_j, x_\ell\}T_\theta.$$

Отсюда легко вывести и второе утверждение леммы.

Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы

В этом параграфе A означает свободную алгебру из многообразия $\mathfrak{N}_{k+1}\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_m$ альтернативных алгебр над полем F со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Далее мы будем использовать некоторые обозначения из [6].

Пусть S – множество всех неассоциативных слов $s = s(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, полученных всевозможными расстановками скобок от ассоциативного слова $s_1 s_2 \ldots s_k$. Через $M(R)$ обозначим F-модуль, порожденный множеством $R \subseteq A$. Для $s \in S$ и $n_1, n_2, \ldots, n_k \in N$, $n_i \geq 2$, положим, что

$$F^s(n_1, n_2, \ldots, n_k) = M(\{s(u_1, u_2, \ldots, u_k) \mid u_i \in A^{n_i}\}).$$

Заметим, что

$$(A^2)^k = \sum_{s \in S} F^s(2, 2, \ldots, 2).$$

Легко показать, что каждое $F^s(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ является T-идеалом алгебры A.

Далее зафиксируем $s \in S$ и вместо $F^s(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ будем писать $F(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Для $p, q \in N$, $1 \leq p < q \leq k$, положим, что

$$Q_{p,q} = Q_{p,q}(n_1, n_2, \ldots, n_k) =$$

$$= \sum_{i \neq p,q} F(n_1, n_2, \ldots, n_i + 1, \ldots, n_k),$$

$$R_{p,q} = R_{p,q}(n_1, n_2, \ldots, n_k) =$$

$$= F(n_1, n_2, \ldots, n_k)/Q_{p,q}(n_1, n_2, \ldots, n_k).$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 3. $R_{p,q}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ как F-модуль порождается элементами вида

$$s(u_1, \ldots, u_p, \ldots, u_q T_\alpha, \ldots, u_k) R_\beta, \tag{15}$$

где u_i - слова вида (12)-(14), $d(u_i) = n_i$ при $i \neq p, q$; $d(u_i) = n_i, n_i + 1$ при $i = p, q$; $\alpha = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_r\}$, $\beta = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_\ell\}$, причем если u_q - слово вида (12), то $\alpha = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in (A^2)^{t_1}$, $b \in (A^2)^{t_2}$ и $t_1, t_2 \geq 1$. В любой правоальтернативной алгебре выполняется тождество (см. [5])

$$(xw, y, z) = (x, y, z)w + x(w, y, z) - (x, w, [y, z]).$$

Отсюда получаем, что

$$abyz \equiv (ayz)b + a(byz) (\mathrm{mod}\, (A^2)^{t_1 + t_2 + 1}).$$

Используя это сравнение как свойство дифференцирования, имеем

$$s(u_1, \ldots, u_p xy, \ldots, u_q, \ldots, u_k) +$$

$$+ s(u_1, \ldots, u_p, \ldots, u_q xy, \ldots, u_k) \equiv$$

$$\equiv s(u_1, \ldots, u_p, \ldots, u_q, \ldots, u_k) xy (\mathrm{mod}\, Q_{p,q}), \tag{16}$$

где $d(u_i) \geq 2$.

В алгебре A выполнено также тождество

$$s(u_1, u_2, \ldots, u_k) xy = - s(u_1, u_2, \ldots, u_k) yx, \tag{17}$$

где $d(u_i) \geq 2$.

Теперь, рассматривая слово вида $s(u_1, u_2, \ldots, u_k)$, где $d(u_i) \geq 2$, можно считать, что u_i являются словами вида (12)-(14), так как в силу леммы 1 элементы u_i представляются как линейная комбинация элементов вида (12)-(14) по модулю $(A^2)^2$. Далее, в силу (6), (8) и (9), можно считать, что подслово u_p слова $s(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ имеет вид

$$u'_p x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_t},$$

где u'_p - слово вида (12)-(14) длины $n_p, n_p + 1$; t - четное число. С помощью (16) переносим x_{k_i}, $1 \leq i \leq t$, на другие множители и в силу (17) получаем элементы вида (15).

Лемма доказана.

Для слов вида (15) определим понятие веса. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k$, $n_i \geq 2$, фиксированы, u - слово вида (15). Тогда положим

$$\sigma(u) = (\delta(u_1), \delta(u_2), \ldots, \delta(u_k)) \in (N')^{\Sigma n_i + 3k},$$

где N' - множество натуральных чисел с нулем, $\delta(u_r)$ - кортеж длины $n_r + 3$, определенный следующим образом:

$\delta(u_r) = (i, j, \ell, 0, \ldots, 0)$, если u_r - слово вида (12);

$\delta(u_r) = (0, i_1, i_2, \ldots, i_{n_r}, \ell, 0)$, если u_r - слово вида (13);

$\delta(u_r) = (0, 0, i, j, i_1, i_2, \ldots, i_{n_r - 2}, \ell)$, если u_r - слово вида (14).

В определении $\delta(u_r)$ вместо символов, отсутствующих в (12)-(14), ставим 0.

Если $\alpha \subseteq N$ - конечное подмножество натуральных чисел, то $\bar{\alpha} = (\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(n), \ldots)$, где $\alpha(t) = 1$, если $t \in \alpha$, и $\alpha(t) = 0$, если $t \notin \alpha$.

Для слова u вида (15) положим

$$\pi(u) = (\delta(u), \overline{\alpha(u)}, \overline{\beta(u)}),$$

где $\alpha(u) = \{j_1 < j_2 < \ldots < j_r\}$, $\beta(u) = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_\ell\}$. Назовем $\pi(u)$ весом элемента u. Пусть P - множество весов всех слов вида (15). Множество P вполне упорядочено относительно лексикографического порядка $\leq$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\pi \in P$, то слово w вида (15), для которого $\pi(w) = \pi$, определяется однозначно.

Для $\pi = (\sigma, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\pi' = (\sigma', \bar{\alpha}', \bar{\beta}') \in P$ положим $\pi << \pi'$, если существует $\varphi : N' \to N'$, $\varphi(0) = 0$ – инъективное отображение, сохраняющее обычный порядок на N', такое, что

$$\varphi(\sigma) = \sigma';$$

$$\varphi(\alpha) \subseteq \alpha', \ |\alpha'| - |\alpha| = 4t, \ t \in N';$$

$$\varphi(\beta) \subseteq \beta'.$$

Множество P частично вполне упорядочено относительно $<<$ (см. [8]).

Теперь покажем, что $R_{p,q}$ – удовлетворяет условию максимальности для T-идеалов. Всякий элемент h из $R_{p,q}$ записывается в виде суммы $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_n g_n$, где g_i – элементы вида (15). Можно считать, что $\pi(g_1) > \pi(g_2) > \ldots > \pi(g_n)$ и $\lambda_1 \neq 0$. Тогда $\bar{h} = g_1$ назовем старшим членом h.

ЛЕММА 4. Пусть h – элемент $R_{p,q}$ и $\pi(\bar{h}) << \pi'$, где $\pi' \in P$. Тогда существует $h' \in T(h)$ такое, что $\pi(\bar{h}') = \pi'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi(\bar{h}) = (\sigma, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$, $\pi' = (\sigma', \bar{\alpha}', \bar{\beta}')$. Существует $\varphi : N' \to N'$, определяющее $\pi(\bar{h}) << \pi'$. Тогда, рассматривая вместо h элемент $\bar{\varphi}(h)$, где $\bar{\varphi}$ – эндоморфизм алгебры A, определенный по правилу $\bar{\varphi} : X_i \to X\varphi_{(i)}$, можно считать, что $\pi(\bar{h}) << \pi'$ определяется с помощью тождественного отображения. Следовательно, можно считать, что $\sigma = \sigma'$, $\alpha \subseteq \alpha'$, $\beta \subseteq \beta'$ и $|\alpha'| - |\alpha| = 4t$, $t \in N'$. Пусть $\{t_1 < t_2 < \ldots < t_\ell\} = \beta' \setminus \beta$. Тогда, как и в [3], пользуясь тождеством (17), можно показать, что

$$\pi(\overline{h x_{t_1} x_{t_2} \ldots x_{t_\ell}}) = (\sigma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}').$$

Поэтому далее будем считать, что $\pi(\bar{h}) = (\sigma, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$,

$$\pi' = (\sigma, \bar{\alpha}', \bar{\beta}), \ \alpha \subseteq \alpha', \ |\alpha'| - |\alpha| = 4t, \ t \in N'.$$

Если $t=0$, то $\alpha=\alpha'$ и $\pi(\overline{h})=\pi'$. Если $t\geqslant 1$, то, проводя индукцию по t, для доказательства леммы достаточно найти такой элемент $h'\in T(h)$, что $\pi(\overline{h'})=\pi''=(\sigma,\overline{\alpha\cup\theta},\overline{\beta})$ где $\theta=\{t_1<t_2<t_3<t_4\}\subseteq\alpha'\setminus\alpha$. Эндоморфизм $\overline{\theta}$ алгебры A определяется, как и в § 1.

Пусть $h=g_1+\lambda_2 g_2+\ldots+\lambda_n g_n$, $\pi(g_1)>\pi(g_2)>\ldots$ $\ldots>\pi(g_n)$ и $\overline{h}=g_1=s(u_1,\ldots,u_p,\ldots,u_q T_\alpha,\ldots,u_k)R_\beta$.

Рассмотрим несколько случаев:

1. Пусть u_q – слово вида (12). Тогда $\alpha=\emptyset$ по определению слова вида (15). В силу замечания 1, $\alpha'=\emptyset$. Следовательно, $\pi(\overline{h})=\pi'$.

2. Пусть u_p и u_q – слова вида (12) и (13) соответственно. Тогда

$$u_p\overline{\theta}\equiv u_p+\tilde{u}_p(\mathrm{mod}(A^2)^2),$$

где $\tilde{u}_p$ – линейная комбинация слов вида (13), (14). Воспользовавшись леммой 2, получаем, что

$$g_1\overline{\theta}-g_1=2s(u_1,\ldots,u_p,\ldots,u_q T_\alpha T_\theta,\ldots,u_k)R_\beta+g,$$

где g – линейная комбинация слов вида (15), причем легко заметить, что $\sigma(\overline{g})<\sigma$. Следовательно, $\pi(\overline{g_1\overline{\theta}-g_1})=\pi''$.

Рассмотрим g_i при $i\neq 1$. Если $\sigma(g_i)=\sigma$, то, в силу замечания 1, p,q –е компоненты элемента g_i являются такими же, как и у элемента g_1. Тогда аналогично доказывается, что

$$\pi(\overline{g_i\overline{\theta}-g_i})\leqslant(\sigma(g_i),\overline{\alpha(g_i)\cup\theta},\overline{\beta(g_i)}).$$

Если $\sigma(g_i)<\sigma$, то легко понять, что $\sigma(\overline{g_i\overline{\theta}-g_i})<\sigma$. Отсюда следует, что $\pi(\overline{h\overline{\theta}-h})=\pi''$.

3. Пусть u_p – слово вида (12), u_q – слово вида (14). Этот случай рассматривается аналогично случаю 2.

4. Пусть u_p, u_q – слова вида (13). Тогда, ввиду леммы 2, получаем, что

$$g_1\bar{\theta} - g_1 = 2[s(u_1,\dots,u_pT_\theta,\dots,u_qT_\alpha,\dots,u_k)R_\beta +$$

$$+ s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_qT_\alpha T_\theta,\dots,u_k)R_\beta] +$$

$$+ 4s(u_1,\dots,u_pT_\theta,\dots,u_qT_\alpha T_\theta,\dots,u_k)R_\beta + g,$$

где g – линейная комбинация слов вида (15) и $\sigma(\bar{g}) < \sigma$.

В силу (8), (16), (17) получаем, что

$$s(u_1,\dots,u_pT_\theta,\dots,u_qT_\alpha,\dots,u_k)R_\beta =$$

$$= s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_qT_\alpha T_\theta,\dots,u_k)R_\beta +$$

$$+ 9[s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_qT_\alpha,\dots,u_k)R_\beta R_\theta -$$

$$- s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_qT_\alpha x_{t_1}x_{t_2},\dots,u_k)R_\beta x_{t_3}x_{t_4} -$$

$$- s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_qT_\alpha x_{t_3}x_{t_4},\dots,u_k)R_\beta x_{t_1}x_{t_2}]$$

и

$$s(u_1,\dots,u_pT_\theta,\dots,u_qT_\alpha T_\theta,\dots,u_k)R_\beta =$$

$$= 9s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_qT_\alpha T_\theta,\dots,u_k)R_\beta R_\theta .$$

Следовательно,

$$g_1\bar{\theta} - g_1 = 36\, s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_qT_\alpha T_\theta,\dots,u_k)R_\beta R_\theta +$$

$$+ 4s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_qT_\alpha T_\theta,\dots,u_k)R_\beta +$$

$$+ 18[s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_qT_\alpha,\dots,u_k)R_\beta R_\theta -$$

$$- s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_qT_\alpha x_{t_1}x_{t_2},\dots,u_k)R_\beta x_{t_3}x_{t_4} -$$

$$-s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_q T_\alpha x_{t_3} x_{t_4},\dots,u_k) R_\beta x_{t_1} x_{t_2}] + g.$$

Далее,

$$(g_1\bar{\theta}-g_1)R_\theta = 4s(u_1,\dots,u_p,\dots,u_q T_\alpha T_\theta,\dots,u_k)R_\beta R_\theta + gR_\theta,$$

откуда легко вывести, что

$$\pi\overline{\left((g_1\bar{\theta}-g_1)-9(g_1\bar{\theta}-g_1)R_\theta\right)} = \pi''.$$

Как и в случае 2, рассматривая элементы g_i при $i \neq 1$, можно показать, что для элемента $h' = (h\bar{\theta}-h) - 9(h\bar{\theta}-h)R_\theta$ выполняется равенство

$$\pi(\bar{h'}) = \pi''.$$

Остается рассмотреть 3 случая:

5. u_p – слово вида (13), u_q – вида (14);
6. u_p – слово вида (14), u_q – вида (13);
7. u_p, u_q – слова вида (14).

В этих случаях элемент h' строится так же, как и в случае 4. Таким образом, элемент h' можно найти при любых u_p, u_q.

Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Для T-идеалов, лежащих в $R_{p,q}$, выполняется условие максимальности.*

Лемма 5 доказывается стандартным методом с помощью леммы 4.

Теперь доказательство теоремы проводится так же, как и в [6]. Мы приведем это доказательство ради полноты изложения.

Многообразие $\mathfrak{N}_2\mathfrak{A}$ шпехтово [3]. Проводя индукцию по $k \geq 2$, предположим, что $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_m$ шпехтово. Докажем шпехтовость многообразия $\mathfrak{N}_{k+1}\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_m$.

Алгебра $A/(A^2)^k$ лежит в $\mathfrak{N}_k\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{N}_3\mathfrak{N}_m$, следовательно, $A/(A^2)^k$ удовлетворяет условию максимальности для T-идеалов.

Как отмечено ранее,

$$(A^2)^k = \sum F^s(2,2,\ldots,2),$$

и каждое $F^s(2,2,\ldots,2)$ является T-идеалом. Поэтому достаточно доказать условие максимальности для T-идеалов, лежащих в $F(2,2,\ldots,2) = F^s(2,2,\ldots,2)$ для фиксированного $s \in S$.

Лемма 5 позволяет доказать условие максимальности в

$$\sum_{j=1}^{\ell} F(n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \ldots, n_n^{(j)}) \Big/ \sum_{j=1}^{\ell} Q_{p(j),q(j)}(n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \ldots, n_n^{(j)})$$

для любых $p(j)$, $q(j)$, таких, что $1 \leq p(j) < q(j) \leq k$

Используем этот переход от $\sum F(n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \ldots, n_n^{(j)})$ к $\sum Q_{p(j),q(j)}(n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \ldots, n_k^{(j)})$ несколько раз, начиная от $F(2,2,\ldots,2)$, причем $p(j), q(j)$ будем выбирать наибольшими из $n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \ldots, n_k^{(j)}$. Тогда 3 максимальных индекса (т. е. наибольших 3 числа из $n_1^{(j)}, n_2^{(j)}, \ldots, n_k^{(j)}$) в любом слагаемом после многократного перехода будут отличаться не более чем на единицу. Действительно, в $F(2,2,\ldots,2)$ это так. Предположим, что после n переходов тройка максимальных индексов имеет один из следующих видов: t,t,t; $t,t,t+1, t,t+1,t+1$ для некоторого t. Разбирая в отдельности каждый из трех случаев, легко видеть, что тройки максимальных индексов будут в различных слагаемых следующими: $t,t,t; t,t,t+1; t,t+1, t+1,t+1,t+1,t+1$. Теперь заметим, что при каждом переходе $n_1^{(j)} + n_2^{(j)} + \ldots + n_k^{(j)}$ увеличивается на единицу. Следовательно, после многократного перехода мы можем добиться того, что тройка максимальных индексов t_1, t_2, t_3 будет удовлетворять условию $t_i \geq m$ для $i = 1,2,3$.

Теорема доказана.

Автор благодарит своего научного руководителя И. П. Шестакова за постоянное внимание к работе и полезные советы.

Литература

1. Днестровская тетрадь, Новосибирск, 1982.

2. К. А. ЖЕВЛАКОВ, А. М. СЛИНЬКО, И. П. ШЕСТАКОВ, А. И. ШИРШОВ, Кольца, близкие к ассоциативным, М., Наука, 1978.

3. Ю. А. МЕДВЕДЕВ, Конечная базируемость многообразий с двучленным тождеством, Алгебра и логика, 17, № 6 (1978), 705-726.

4. Ю. А. МЕДВЕДЕВ, Пример многообразия разрешимых альтернативных алгебр над полем характеристики 2, не имеющего конечного базиса тождеств, Алгебра и логика, 19, № 3 (1980), 300-313.

5. С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ, Разрешимость и нильпотентность альтернативных алгебр и алгебр типа (-1, 1), в кн. "Группы и другие алгебраические системы с условиями конечности", Новосибирск, Наука, 1984.

6. Г. В. ШЕИНА, О некоторых многообразиях лиевых алгебр, Сиб. матем. ж., 17, № 1 (1976), 194-199.

7. R.M.BRYANT, M.R.VAUGHAN-LEE, Soluble varieties of Lie algebras, Quart. J.Math., Oxford, 23, N 89 (1972), 107-112.

8. G.HIGMAN, Ordering by divisubility in abstract algebras, Proc. London Math.,Soc.,2, N 7 (1952), 326-336.

Поступило 17 октября 1984 г.