



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Багаев, Е. Н. Пелиновский, Конфигурация канала переменного сечения,  
допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане,  
*Журнал СВМО*, 2016, том 18, номер 3, 127–136

<https://www.mathnet.ru/svmo614>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и  
согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

17 мая 2025 г., 17:59:32



УДК 517.9

# Конфигурация канала переменного сечения, допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане

© А. В. Багаев<sup>1</sup>, Е. Н. Пелиновский<sup>2</sup>

**Аннотация.** Обсуждается математическая задача, связанная с нахождением конфигурации каналов переменного сечения, допускающих так называемое безотражательное распространение внутренних волн в океане на далекие расстояния. Задача сводится к нахождению ограниченных на всей числовой оси решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего две неизвестные функции. Показано, что такие решения существуют и найден их явный вид.

**Ключевые слова:** волновое уравнение с переменными коэффициентами, уравнение Клейн-Гордона, бегущие волны в неоднородной среде, стратифицированная жидкость

## 1. Введение

Как известно, в неоднородной среде волны теряют свою энергию при распространении в силу эффектов отражения, рассеяния и дифракции. Если среда неоднородна в поперечном сечении к направлению распространения, то возможно так называемое волноводное распространение, и энергия волны может передаваться на большие расстояния. Математическим эквивалентом такого процесса является существование решений в виде  $f(x - ct, y, z)$ , перемещающихся вдоль оси  $x$  с постоянной скоростью  $c$  — так называемые бегущие волны. Их нахождение в нелинейных средах является нетривиальной задачей, на которой мы не будем здесь останавливаться. В то же время считалось, что в неоднородной по трассе среде бегущих волн не существует, поскольку есть отражение от неоднородностей. Это правило справедливо в общем случае, однако из него имеются исключения, если параметры среды меняются специальным образом — см. примеры в различных физических средах ([1]-[9]). Во всех рассмотренных примерах получены сингулярные безотражательные конфигурации параметров среды, которые годятся только в конечной области, а не на всей числовой оси. Настоящая работа посвящена поиску безотражательных конфигураций каналов переменного сечения, в котором находится несжимаемая двухслойная жидкость в поле тяжести. Основной упор будет сделан на анализе конфигураций, которые остаются конечными на всей числовой оси, из чего следует, что в таких каналах волны могут распространяться на большие расстояния без потери энергии. Математически такая задача ставится следующим образом: возможно ли найти решения типа  $f(x - ct)$  волнового уравнения с переменными коэффициентами?

<sup>1</sup> Доцент кафедры «Прикладная математика», Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексева, г. Нижний Новгород; a.v.bagaev@gmail.com

<sup>2</sup> Профессор кафедры «Прикладная математика», Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексева, г. Нижний Новгород; профессор кафедры информационных систем и технологий, Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород; pelinovsky@gmail.com

## 2. Трансформация волнового уравнения к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

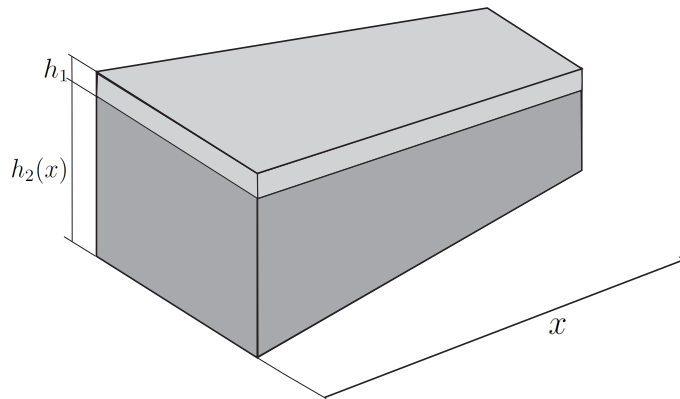
Волновые движения малой амплитуды в двухслойной несжимаемой идеальной жидкости описываются волновым уравнением ([10])

$$B(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left( B(x) c^2(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.1)$$

где

$$c^2(x) = g' \frac{h_1 h_2(x)}{h_1 + h_2(x)}. \quad (2.2)$$

Здесь  $\eta$  — смещение поверхности раздела жидкостей разной плотности,  $h_1$  и  $h_2(x)$  — глубины верхнего и нижнего слоев,  $B(x)$  — ширина канала, и  $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$  — редуцированное значение ускорения свободного падения,  $\rho_1 < \rho_2$  — плотности верхнего и нижнего слоев. Геометрия задачи показана на рис. 2.1.



Р и с у н о к 2.1

Получение решений волнового уравнения с переменными коэффициентами основано на трансформационной технике, описанной в ([11], [12], [4]). Для этого представим решение уравнения (2.1) как

$$\eta(t, x) = A(x) \Phi(t, \tau), \quad (2.3)$$

где новые переменные имеют смысл амплитуды  $A(x)$  и фазы — времени распространения волны  $\tau(x)$ . Тогда уравнение (2.1) сводится к уравнению типа Клейна–Гордона с переменными коэффициентами для новой неизвестной функции  $\Phi(t, \tau)$

$$AB \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{d\tau}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right] - \left[ Bc^2 \frac{dA}{dx} \frac{d\tau}{dx} + \frac{d}{dx} \left( c^2 AB \frac{d\tau}{dx} \right) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{d}{dx} \left( c^2 \frac{dA}{dx} B \right) \Phi = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) содержит переменные коэффициенты, как и исходное волновое уравнение (2.1). Найдем условия, когда коэффициенты уравнения (2.4) станут постоянными. Первое из них вытекает из структуры волнового оператора (даламбериана) в первых квадратных скобках и приводит к определению фазы

$$\tau(x) = \int \frac{dx}{c(x)}, \quad (2.5)$$

где мы для определенности взяли знак плюс. Такого рода выражение для фазы (эйконала) известно для волн в плавно неоднородной среде, здесь же оно получается в весьма общем виде. Вторая скобка в (2.4) обязана быть равной нулю, чтобы решения не нарастали в пространстве на одном из концов

$$A(x) = \frac{const}{\sqrt{c(x)B(x)}}. \quad (2.6)$$

Наконец, коэффициент перед последним членом в (2.4) должен быть пропорциональным  $AB$ , чтобы уравнение Клейна–Гордона имело постоянные коэффициенты. Это приводит к уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[ c^2 B \frac{dA}{dx} \right] = -pAB, \quad (2.7)$$

где  $p$  — произвольная константа. Удобно исключить амплитуду  $A$  с помощью формулы (2.6), тогда уравнение (2.7) становится замкнутым уравнением, описывающим изменение глубины и ширины канала в безотражательном случае

$$\frac{d}{dx} \left[ \sqrt{\frac{c(x)}{B(x)}} \frac{d}{dx} (c(x)B(x)) \right] = 2p \sqrt{\frac{B(x)}{c(x)}}. \quad (2.8)$$

В результате уравнение (2.4) становится уравнением Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + p\Phi = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение Клейна–Гордона (2.9) очень хорошо изучено в математической физике и в теории поля, для него легко поставить и решить задачу Коши. Здесь мы сосредоточимся на изучении характеристик безотражательного канала, описываемых уравнением (2.8).

### 3. Ограниченные решения уравнения (2.8)

Уравнение (2.8) было получено в [9], там же были получены частные решения этого уравнения. Все частные решения оказывались сингулярными (когда  $c$  или  $B$  обращались в нуль), либо уходящими в бесконечность на больших расстояниях. В сингулярном случае канал оказывался ограниченным, а в другом случае нарушалась применимость волнового уравнения (2.1), в котором глубина канала должна быть малой по сравнению с длиной волны. Тем самым, уравнение (2.9) работало только на ограниченном интервале  $\tau$  и на концах надо было использовать те или иные граничные условия (которые не всегда легко сформулировать, например, когда волна выходит на берег) либо сшивать безотражательную конфигурацию с другой. Поэтому поставим следующую задачу: найти общий вид решения уравнения (2.8), а также условий, при которых решения заданы на всей числовой оси и всюду ограничены:

$$0 < c(x) \leq c_1, 0 < B(x) \leq B_1, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

#### 3.1. Общий вид решения уравнения (2.8)

Пусть  $c = c(x)$ ,  $B = B(x)$  — решение уравнения (2.8). Умножим (2.8) на  $\sqrt{\frac{c(x)}{B(x)}}$  и положим

$$\begin{cases} u = c(x)/B(x), \\ v = \frac{d}{dx}(c(x)B(x)). \end{cases} \quad (3.2)$$

Тогда

$$\sqrt{u} \frac{d}{dx}(v\sqrt{u}) = 2p,$$

откуда получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$2uv' + u'v = 4p. \quad (3.3)$$

Зафиксируем в (3.3) функцию  $u = u(x)$  и найдем  $v = v(x)$ . Интегрируя (3.3), получим

$$v(x) = \frac{2p \int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Принимая во внимание (3.2), имеем

$$\begin{cases} cB = \int v dx = \int \frac{2p \int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}} dx, \\ \frac{c}{B} = u, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} c^2 = u \int v dx = u \int \frac{2p \int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}} dx, \\ B^2 = \frac{c^2}{u^2} = \frac{1}{u} \int \frac{2p \int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}} dx. \end{cases} \quad (3.5)$$

Обозначим  $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{u(x)}}$ , тогда  $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$  и  $u(x) = 1/F'^2(x)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{1}{F'^2} \int \frac{2pF + \alpha}{\sqrt{u}} dx = \frac{1}{F'^2} \int (2pF + \alpha) dF = \frac{pF^2 + \alpha F + \beta}{F'^2}, \\ B^2 &= F'^2(pF^2 + \alpha F + \beta), \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Таким образом, решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}}{|F'(x)|}, \\ B(x) = |F'(x)| \sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $F = F(x)$  — произвольная дифференцируемая функция,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

### 3.2. Исследование решений уравнения (2.8) на ограниченность

Будем искать среди решений уравнения (2.8) решения, удовлетворяющие условию (3.1). Рассмотрим сначала простейший случай  $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \alpha = \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}$ . Тогда (3.6) будет иметь вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{|F'(x)|} = \frac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)}, \\ B(x) = \sqrt{\beta}|F'(x)| = \sqrt{\beta}\Psi(x), \end{cases}$$

где  $\Psi(x) = |F'(x)|$ . Система неравенств

$$\begin{cases} 0 < \frac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)} \leq c_1, \\ 0 < \sqrt{\beta}\Psi(x) \leq B_1, \end{cases}$$

имеет решение

$$0 < \frac{\sqrt{\beta}}{c_1} \leq \Psi(x) \leq \frac{B_1}{\sqrt{\beta}} \tag{3.7}$$

при условии  $c_1 B_1 \geq \beta > 0$ ; в противном случае решений нет.

Таким образом, в случае  $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \alpha = \mathbf{0}, \beta \neq \mathbf{0}$  ограниченное решение имеет вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)}, \\ B(x) = \sqrt{\beta}\Psi(x), \end{cases} \tag{3.8}$$

где  $\Psi(x)$  — любая дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию (3.7) и  $c_1 B_1 \geq \beta > 0$ .

Пусть теперь  $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \alpha \neq \mathbf{0}$ . Тогда (3.6) будет иметь вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{\alpha F(x) + \beta}}{|F'(x)|} = \frac{\sqrt{\alpha \Psi(x)}}{|\Psi'(x)|}, \\ B(x) = |F'(x)|\sqrt{\alpha F(x) + \beta} = |\Psi'(x)|\sqrt{\alpha \Psi(x)}, \end{cases}$$

где  $\Psi(x) = F(x) + \frac{\beta}{\alpha}$ .

Исследуем ограниченность решений в этом случае. Для этого рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\alpha \Psi(x)}}{|\Psi'(x)|} \leq c_1, \\ |\Psi'(x)|\sqrt{\alpha \Psi(x)} \leq B_1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{\alpha \Psi(x)}}{|\Psi'(x)|} = c_1 \tag{3.10}$$

являются две функции

$$\Psi_+(x) = \frac{\alpha}{4} \left( \frac{x}{c_1} + a \right)^2, \quad \Psi_-(x) = \frac{\alpha}{4} \left( -\frac{x}{c_1} + a \right)^2, \tag{3.11}$$

где  $a \in \mathbb{R}$ . Для того, чтобы получить решения первого неравенства системы (3.9), рассмотрим  $a$  в (3.11) как функцию  $a = a(x)$ . После подстановки  $\Psi_+(x)$  в первое неравенство системы (3.9) будем иметь

$$\frac{1}{\left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right|} \leq c_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a'(x) \geq 0, \\ a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Итак,  $\Psi_+(x) = \frac{\alpha}{4} \left( \frac{x}{c_1} + a(x) \right)^2$  — решение первого неравенства системы (3.9), где  $a(x)$  — функция, удовлетворяющая условию  $a'(x) \geq 0$  или  $a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}$ . Подставив найденное  $\Psi_+(x)$  во второе неравенство (3.9), получим:

$$\frac{\alpha^2}{4} \left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right| \left( \frac{x}{c_1} + a(x) \right)^2 \leq B_1. \tag{3.13}$$

При условиях (3.12) на функцию  $a(x)$  левая часть неравенства (3.13) является неограниченной функцией на  $\mathbb{R}$  и, следовательно,  $\Psi_+(x)$  не является решением системы (3.9).

Аналогичные рассуждения проводятся для функции  $\Psi_-(x)$ .

Таким образом, при  $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \alpha \neq \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}$  нет решений, удовлетворяющих условию (3.1).

Пусть  $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ . Выделим полный квадрат под корнем в (3.6)

$$pF^2 + \alpha F + \beta = p \left( F + \frac{\alpha}{2p} \right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4p} = p\Psi^2 + \gamma,$$

где  $\Psi = F + \frac{\alpha}{2p}$ ,  $\gamma = \beta - \frac{\alpha^2}{4p}$ . Тогда (3.6) запишется в виде

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}}{|\Psi'(x)|}, \\ B(x) = |\Psi'(x)|\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Исследуем ограниченность полученных решений. Для этого рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}}{|\Psi'(x)|} \leq c_1, \\ |\Psi'(x)|\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma} \leq B_1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Необходимо рассмотреть 4 случая: **(1)**  $p > 0, \gamma > 0$ ; **(2)**  $p > 0, \gamma = 0$ ; **(3)**  $p > 0, \gamma < 0$ ; **(4)**  $p < 0, \gamma > 0$ .

**Случай 1** ( $\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$ ). Решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}}{|\Psi'(x)|} = c_1 \quad (3.16)$$

являются две функции

$$\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \left( \frac{x}{c_1} + a \right), \quad \Psi_-(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \left( -\frac{x}{c_1} + a \right), \quad (3.17)$$

где  $a \in \mathbb{R}$ . Для того, чтобы получить решения первого неравенства системы (3.15), рассмотрим  $a$  в (3.17) как функцию  $a(x)$ . После подстановки  $\Psi_+(x)$  в первое неравенство системы (3.15) будем иметь (3.12). Итак,  $\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \left( \frac{x}{c_1} + a(x) \right)$  — решение первого неравенства системы (3.15) при условии, что функция  $a(x)$  удовлетворяет неравенству  $a'(x) \geq 0$  или  $a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}$ . Подставив найденное  $\Psi_+(x)$  во второе неравенство (3.15), получим:

$$\gamma \left| \frac{1}{c_1} + a' \right| \operatorname{ch}^2 \sqrt{p} \left( \frac{x}{c_1} + a \right) \leq B_1. \quad (3.18)$$

При условиях (3.12) на функцию  $a(x)$  левая часть неравенства (3.18) является неограниченной функцией на  $\mathbb{R}$  и, следовательно,  $\Psi_+(x)$  не является решением системы (3.15).

Аналогичные рассуждения проводятся для функции  $\Psi_-(x)$ .

Таким образом, при  $\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$  нет решений, удовлетворяющих условию (3.1).

Аналогично доказывается, что **Случай 2** ( $\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma = \mathbf{0}$ ) и **Случай 3** ( $\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma < \mathbf{0}$ ) не дают решений, удовлетворяющих условию (3.1).

**Случай 4** ( $\mathbf{p} < \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$ ). Положим  $q = -p > 0$ . В этом случае система (3.15) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(x)|} \leq c_1, \\ |\Psi'(x)|\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} \leq B_1. \end{cases} \quad (3.19)$$

Решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(x)|} = c_1 \tag{3.20}$$

являются две функции

$$\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin \sqrt{q} \left( \frac{x}{c_1} + a \right), \quad \Psi_-(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin \sqrt{q} \left( -\frac{x}{c_1} + a \right), \tag{3.21}$$

где  $a \in \mathbb{R}$ . Для того, чтобы получить решения первого неравенства системы (3.19), рассмотрим  $a$  в (3.21) как функцию  $a(x)$ . После подстановки  $\Psi_+(x)$  в первое неравенство системы (3.19) будем иметь (3.12). Итак,  $\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin \sqrt{q} \left( \frac{x}{c_1} + a(x) \right)$  — решение первого неравенства системы (3.19) при условии, что функция  $a = a(x)$  удовлетворяет неравенству  $a'(x) \geq 0$  или  $a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}$ . Подставив найденное  $\Psi_+(x)$  во второе неравенство (3.19), получим:

$$\gamma \left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right| \cos^2 \sqrt{q} \left( \frac{x}{c_1} + a(x) \right) \leq \gamma \left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right| \leq B_1. \tag{3.22}$$

Неравенство  $\left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right| \leq \frac{B_1}{\gamma}$  запишем в виде  $-\frac{B_1}{\gamma} - \frac{1}{c_1} \leq a'(x) \leq \frac{B_1}{\gamma} - \frac{1}{c_1}$ . С учетом условий (3.12) будем иметь два ограничения на функцию  $a = a(x)$ :

$$\begin{cases} 0 \leq a'(x) \leq \frac{B_1}{\gamma} - \frac{1}{c_1}, \\ -\frac{B_1}{\gamma} - \frac{1}{c_1} \leq a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}. \end{cases} \tag{3.23}$$

При этом предполагается, что константа интегрирования  $\gamma$  такова, что  $c_1 B_1 \geq \gamma$ ; в противном случае решений нет.

Итак,  $\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin \sqrt{q} \left( \frac{x}{c_1} + a \right)$ , где функция  $a = a(x)$  удовлетворяет одному из неравенств (3.23) и  $c_1 B_1 \geq \gamma$ , является решением системы неравенств (3.19).

Аналогичные рассуждения можно провести для функции  $\Psi_-(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin \sqrt{q} \left( -\frac{x}{c_1} + a(x) \right)$ , при этом, по существу, обе функции  $\Psi_+(x)$  и  $\Psi_-(x)$  дают одно ограниченное решение уравнения (2.8)

$$\begin{cases} c(x) = \frac{1}{\left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right|} \leq c_1, \\ B(x) = \gamma \left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right| \cos^2 \sqrt{-p} \left( \frac{x}{c_1} + a(x) \right) \leq B_1, \end{cases} \tag{3.24}$$

где функция  $a = a(x)$  удовлетворяет одному из неравенств (3.23) и  $c_1 B_1 \geq \gamma = \beta - \frac{\alpha^2}{4p} > 0$ .

**З а м е ч а н и е 3.1.** В силу условий (3.23) на функцию  $a = a(x)$  существуют такие значения  $x_0$ , что  $\cos \sqrt{-p} \left( \frac{x_0}{c_1} + a(x_0) \right) = 0$  и, следовательно,  $B(x_0) = 0$ . Кроме того, при этом  $B'(x_0) = 0$ , то есть график функции  $B(x)$  касается оси  $Ox$ .

Получим другое решение системы (3.19), решив сначала второе неравенство этой системы. Найдем решения уравнения

$$|\Psi'(x)| \sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} = B_1. \tag{3.25}$$



Обозначим

$$\Theta(\Psi) = \int \sqrt{\gamma - q\Psi^2} d\Psi = \frac{\gamma}{2\sqrt{q}} \left( \sqrt{\frac{q}{\gamma}} \Psi \sqrt{1 - \frac{q}{\gamma} \Psi^2} + \arcsin \sqrt{\frac{q}{\gamma}} \Psi \right).$$

Тогда решение уравнения (3.25) можно записать в виде

$$\Theta(\Psi) = \pm B_1 x + b,$$

где  $b \in \mathbb{R}$ . Поскольку  $\Theta'(\Psi) = \sqrt{\gamma - q\Psi^2} \geq 0$ , то функция  $\Theta(\Psi)$ , заданная на отрезке  $\left[-\sqrt{\frac{\gamma}{q}}, \sqrt{\frac{\gamma}{q}}\right]$ , монотонна и, следовательно, для нее существует обратная функция  $\Psi = \Psi(\Theta)$ , определенная на отрезке  $\left[-\frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}, \frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}\right]$ . Таким образом, решение уравнения (3.25) имеет вид

$$\Psi = \Psi(\pm B_1 x + b).$$

Сначала будем искать решения неравенств (3.19) в виде  $\Psi = \Psi(B_1 x + b)$ . Пусть теперь  $b = b(x)$ . Подставив решение  $\Psi = \Psi(B_1 x + b)$  во второе неравенство (3.19), получим

$$\begin{aligned} |\Psi'(x)| \sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} &= |\Psi'(\Theta)| |B_1 + b'(x)| \sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} = \\ &= \frac{|B_1 + b'(x)| \sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{\Theta'(\Psi)} \leq |B_1 + b'(x)| \leq B_1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Следовательно,  $-2B_1 \leq b'(x) \leq 0$ . Подставив решение  $\Psi = \Psi(B_1 x + b)$  в первое неравенство (3.19), получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(x)|} &= \frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(\Theta)| |B_1 + b'(x)|} = \frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} |\Theta'(\Psi)|}{|B_1 + b'(x)|} = \\ &= \frac{\gamma - q\Psi^2(x)}{|B_1 + b'(x)|} \leq \frac{\gamma}{|B_1 + b'(x)|} \leq c_1, \end{aligned} \quad (3.27)$$

откуда

$$|B_1 + b'(x)| \geq \frac{\gamma}{c_1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b'(x) \geq \frac{\gamma}{c_1} - B_1, \\ b'(x) \leq -\frac{\gamma}{c_1} - B_1. \end{cases} \quad (3.28)$$

С учетом неравенства  $-2B_1 \leq b'(x) \leq 0$  будем иметь следующие ограничения на  $b = b(x)$ :

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{c_1} - B_1 \leq b'(x) \leq 0, \\ -2B_1 \leq b'(x) \leq -\frac{\gamma}{c_1} - B_1, \end{cases} \quad (3.29)$$

при условии  $c_1 B_1 \geq \gamma$ ; в противном случае решений нет.

Положим  $\chi(\Theta) = \gamma - q\Psi^2(\Theta)$ . Функция  $\chi(\Theta)$  определена на отрезке  $\left[-\frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}, \frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}\right]$ . Продолжим эту функцию на всю числовую ось периодически с периодом  $\frac{\pi\gamma}{2\sqrt{q}}$  и обозначим ее также через  $\chi(\Theta)$ . В этих обозначениях ограниченное решение уравнения (2.8) можно записать следующим образом

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\chi(B_1 x + b(x))}{|B_1 + b'(x)|} \leq c_1, \\ B(x) = |B_1 + b'(x)| \leq B_1, \end{cases} \quad (3.30)$$

где  $b = b(x)$  — дифференцируемая функция, удовлетворяющая одному из условий (3.29) и  $c_1 B_1 \geq \gamma$ .

Аналогично можно рассмотреть случай  $\Psi = \Psi(-B_1 x + b)$ . По существу он дает решение того же вида (3.30).

**З а м е ч а н и е 3.2.** В силу условий (3.29), наложенных на функцию  $b = b(x)$ , существуют такие значения  $x_0$ , что  $\chi(B_1 x_0 + b) = 0$ , и, следовательно,  $c(x_0) = 0$ .

**З а м е ч а н и е 3.3.** В силу замечаний 3.1. и 3.2. ограниченные решения, задаваемые формулами (3.24) и (3.30), являются сингулярными.

Результаты работы можно сформулировать в виде следующих утверждений.

**Т е о р е м а 3.1.** Любое решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}}{|F'(x)|}, \\ B(x) = |F'(x)|\sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}, \end{cases}$$

где  $F = F(x)$  — произвольная дифференцируемая функция,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

**Т е о р е м а 3.2.** Ограниченные решения уравнения (2.8), заданные на всей числовой оси и не обращающиеся в ноль (несингулярные), существуют только при  $p = 0$  и имеют вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)} \leq c_1, \\ B(x) = \sqrt{\beta}\Psi(x) \leq B_1, \end{cases}$$

где  $\Psi(x)$  — любая дифференцируемая функция,  $\beta \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющие условиям

$$0 < \frac{\sqrt{\beta}}{c_1} \leq \Psi(x) \leq \frac{B_1}{\sqrt{\beta}}, \quad c_1 B_1 \geq \beta > 0.$$

*Благодарности.* Авторы выражают благодарность проф. И.П. Рязанцевой за полезное обсуждение работы и ценные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-6637.2016.5, а также гранта РФФИ 16-02-00167.

Дата поступления 25.10.2016

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Б. Шварцбург, “Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели)”, *Успехи физ. наук*, **170**:12 (2000), 1297–1324.
2. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, T. Soomere, “Long surface wave dynamics along a convex bottom”, *J. Geophysical Research – Oceans*, **114** (2009), C07006.
3. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, “Non-dispersive traveling waves in strongly inhomogeneous water channels”, *Physics Letters A.*, **373**:42 (2009), 3883–3887.

4. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, “Homogenization of the variable-speed wave equation”, *Wave Motion*, **47**:12 (2010), 496–507.
5. Е. Н. Пелиновский, Т. Г. Талипова, “Безотражательное распространение волн в сильно неоднородных средах”, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, 2010, № 3, 4–13.
6. Н. С. Петрухин, Е. Н. Пелиновский, Е. К. Бацына, “Безотражательные волны в атмосфере Земли”, *Письма в ЖЭТФ*, **93**:10 (2011), 625–628.
7. Н. С. Петрухин, Е. Н. Пелиновский, Е. К. Бацына, “Безотражательное распространение акустических волн в атмосфере Солнца”, *Письма в Астрономический Журнал*, **38**:6 (2012), 439–445.
8. M. S. Ruderman, E. Pelinovsky, N. S. Petrukhin, T. Talipova, “Non-reflective propagation of kink waves in solar magnetic tubes”, *Solar Physics*, **286** (2013), 417–426.
9. Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, О. Е. Куркина, Е. А. Рувинская, А. Р. Гиниятуллин, А. А. Наумов, “Безотражательное распространение внутренних волн в канале переменного сечения и глубины”, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, **6**:3 (2013), 46–53.
10. В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков, *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*, СО РАН, Новосибирск, 2000, 419 с.
11. G. Bluman, “On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1259–1273.
12. E. Varley, B. Seymour, “A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients”, *Stud. Appl. Math.*, **78** (1988), 183–225.

## The configuration of the variable cross-section channel allowed reflectionless propagation of internal waves in the ocean

© A. V. Bagaev<sup>3</sup>, E. N. Pelinovsky<sup>4</sup>

**Abstract.** Mathematical problem discussed in the paper is about determination of configuration of variable-cross-section channels that allow so-called reflectionless propagation of internal waves in the ocean. The problem is reduced to searching for bounded solutions of ordinary second-order differential equation with two unknown functions. It is shown that such solutions exist, and they are obtained in explicit form.

**Key Words:** variable-coefficient wave equation, Klein–Gordon equation, travelling waves in heterogeneous media, stratified fluid

<sup>3</sup> Associate professor of Applied Mathematics Department, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod; a.v.bagaev@gmail.com

<sup>4</sup> Professor of Applied Mathematics Department, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Professor of Information Systems Department, Nizhny Novgorod Branch of National Research University – Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; pelinovsky@gmail.com