B. M. Gurevich, On an addition theorem for the Weierstrass $\mathscr{P}$-function,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 1987, Number 3, 73–75

липтическим оператором с потерей $\delta=k/(k+1)$ *производных тогда и только тогда, когда выполнено условие* $(M-\Psi)$.

В доказательстве теоремы 3 используются результаты работы [4].

Следствие. *Пусть выполнены условия теоремы* 3. *Тогда оператор* P *является гипоэллиптическим в обычном смысле.*

Теорема 4. *Пусть* $P\in OPS_M{}^m(\Omega)$ — *дифференциальный оператор* M-*главного типа.* P *является* M-*субэллиптическим тогда и только тогда, когда* $k_1(x, \xi)$ *принимает четные значения, не превосходящие некоторого целого числа* k. *В этом случае* $\delta=k/(k+1)$. *Если функция* $k_1(x, \xi)$ *принимает в некоторой точке* (x_0, ξ^0) *нечетное значение, то оценка* (1) *не может выполняться ни на каком компакте* K, *содержащем точку* x_0, *ни при каком* $\delta\in\mathbf{R}$.

В заключение автор выражает благодарность Ю. В. Егорову за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lascar R. Propagation des singularites des solutions d'equations pseudo-differentielles quasi homogenes//Ann. Inst. Fourier. 1977. **27**, N 2. 79—123.
2. Parenti C., Segala F. Propagation and reflection of singularities for a class of evolution equations //Communs P. D. E. 1981. **6**, N 7. 741—782.
3. Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М., 1984.
4. Шананин Н. А. О локальной неразрешимости и негипоэллиптичности (псевдо-) дифференциальных уравнений с взвешанным символом//Матем. сб. 1982. **119**, № 4. 548—563.
5. Lorenz M. Microlocal parametrices for anisotropic operators (complex case)//Seminar Analysis 1983/84. Berlin, 1984. 121—140.
6. Hunt C., Piriou A. Majorations L^2 et inegalite sous-eliptique pour les operateurs pseudo-differentiels anisotropes d'ordre variable//C. r. Acad. sci. A. 1969. **268**. 214—217.

Поступила в редакцию
02.01.86

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1987. № 3

УДК 517.5

Б. М. Гуревич

О ТЕОРЕМЕ СЛОЖЕНИЯ ДЛЯ $\mathscr{P}$-ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

Эллиптическая $\mathscr{P}$-функция Вейерштрасса удовлетворяет, как известно [1], функционально-дифференциальному уравнению

$$f'(x)[f(y)-f(x+y)]+f'(y)[f(x+y)-f(x)]+f'(x+y)[f(y)-f(x)]=0, \quad (1)$$

которое называется теоремой сложения. То же уравнение возникает в задаче об аддитивных интегралах движения частиц с попарным взаимодействием как условие на потенциал $U(q_1, q_2)=f(|q_1-q_2|)$, необходимое для существования аддитивных интегралов, отличных от линейных комбинаций классических [2]. Учитывая это, естественно интересоваться множеством всех решений уравнения (1) в классе функций, заданных лишь на $(0, +\infty)$ и удовлетворяющих менее жестким, чем аналитичность, условиям регулярности. В этой заметке доказывается следующая

Теорема. *Всякое комплекснозначное решение класса* $C^1(0, \delta)$, $0<\delta\leqslant\infty$, *уравнения* (1) *(в котором* $0<x, y, x+y<\delta$) *является ограничением на* $(0, \delta)$ *функции вида* $\gamma_1\mathscr{P}+\gamma_2$, $\gamma_1, \gamma_2=\mathrm{const}$.

Замечание 1. Здесь и ниже не делается различия между $\mathscr{P}$-функцией в собственном смысле слова и ее вырожденными случаями (см. [1]).

З а м е ч а н и е 2. Аналогичный результат при гораздо более сильных ограничениях на f (мероморфность) получен в [3]. Другое функционально-дифференциальное уравнение, приводящее к $\mathscr{P}$-функции, исследовано в [4, 5].

Доказательство теоремы начнем с нескольких вспомогательных предложений, в которых под f понимается любое решение класса $C^1(0, \delta)$ уравнения (1).

Л е м м а 1. *Если* $f\not\equiv\text{const}$, *то*

$$\text{а)}\ \lim_{y\to 0}|f(y)|=\infty,\quad \text{б)}\ \lim_{y\to 0}|yf'(y)|=\infty. \tag{2}$$

Не приводя доказательства этой леммы, заметим лишь, что сначала доказывается от противного первое из соотношений (2), а затем с его помощью — второе.

Л е м м а 2. $f\in C^3(0, \delta)$.

Н а б р о с о к д о к а з а т е л ь с т в а. Достаточно рассмотреть случай $f\not\equiv\text{const}$. Заменив в (1) y на $2x+y$ и устремив y к нулю, нетрудно доказать существование и непрерывность f'' в окрестности любой точки $x\in(0, \delta/2)$, для которой $f(2x)\neq f(x)$, а затем — существование и непрерывность f''' в окрестности любой точки $x\in(0, \delta/4)$, для которой $f(x)\neq f(2x)\neq f(4x)$. Из леммы 1 вытекает, что множество точек x с последним из указанных свойств непусто на $(0, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon>0$. С помощью леммы 1 и уравнения (1) (которое следует разрешить относительно $f'(x+y)$) утверждение о существовании и непрерывности f''' распространяется на (ε, δ). Так как ε сколь угодно мало, лемма доказана.

Л е м м а 3. *Если* $f\not\equiv\text{const}$, *то* $\lim\limits_{y\to 0}[2+yf'(y)/f(y)]=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью формулы Тейлора, примененной к f и f' (с учетом леммы 2), можно привести уравнение (1) при $x\in(0, \delta)$ и достаточно малом y к виду

$$\begin{gathered}2f'(x)f(y)-2f'(x)f(x)-[f'(x)]^2y+f'(x)yf'(y)+\\ +\frac{1}{2}f''(x)y^2f'(y)+\frac{1}{6}f'''(x)y^3f'(y)+f''(x)yf(y)+\\ +\frac{1}{2}f'''(x)y^2f(y)-f''(x)f(x)y+r(x, y)=0,\end{gathered} \tag{3}$$

где $r(x, y)/y^2\to 0$ при $y\to 0$. После деления на $f'(x)f(y)$, пользуясь равенством а) из (2), получаем при $f'(x)\neq 0$

$$\lim_{y\to 0}\left[\frac{yf'(y)}{f(y)}+\frac{y^2f'(y)}{f(y)}\left(\frac{f''(x)}{2f'(x)}+\frac{f'''(x)y}{6f'(x)}\right)\right]=-2,$$

что в силу равенства б) из (2) дает нужный результат.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Согласно лемме 3 при $f\not\equiv\text{const}$

$$yf'(y)/f(y)=-2+\varphi(y), \tag{4}$$

где $\varphi(y)\to 0$ при $y\to 0$. Фиксировав произвольное $x=x_0\in(0, \delta)$, для которого $f'(x_0)\neq 0$, подставим (4) в (3) и результат разделим на $f'(x_0)yf(y)$ при достаточно малом y (таком, что $f(y)\neq 0$). Имеем

$$\begin{gathered}-2f(x_0)/yf(y)-f'(x_0)/f(y)+\varphi(y)/y+\\ +f''(x_0)\varphi(y)/2f'(x_0)+f'''(x_0)y/6f'(x_0)-\\ -f''(x_0)f(x_0)/f'(x_0)f(y)+r_1(x_0, y)=0,\end{gathered} \tag{5}$$

где $r_1(x_0, y)/y \to 0$ при $y \to 0$. В силу равенства а) из (2) найдется такое $x_1 \in (0, \delta)$, что $f'(x_1) \neq 0$, $f(x_1) \neq f(x_0)$. Подставив x_1 вместо x_0 в (5), вычтем из (5) полученное равенство:

$$2\,\frac{f(x_1)-f(x_0)}{yf(y)}+\frac{f'(x_1)-f'(x_0)}{f(y)}+$$
$$+\frac{1}{2}\varphi(y)\left[\frac{f''(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)}\right]+\frac{1}{6}y\left[\frac{f'''(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f'''(x_1)}{f'(x_1)}\right]+$$
$$+\frac{1}{f(y)}\left[\frac{f''(x_1)f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f''(x_0)f(x_0)}{f'(x_0)}\right]+r_1(x_0, y)-r_1(x_1, y)=0. \qquad (6)$$

Из (6) видно, что $1/yf(y) \to 0$ при $y \to 0$. Возвращаясь с учетом этого к (5), заключаем, что и $\varphi(y)/y \to 0$ при $y \to 0$. Теперь из (6) и (2) вытекает, что существует конечный предел $\lim\limits_{y\to 0}[y^2 f(y)]^{-1}=A$. Но тогда в силу (5)

$$\lim_{y\to 0}\varphi(y)/y^2=2Af(x_0)-f'''(x_0)/6f'(x_0).$$

Левая часть этого равенства не зависит от x_0 (при условии, что $f'(x_0) \neq 0$). Обозначив ее через B, получим уравнение

$$f'''(x)/6+Bf'(x)-2Af'(x)f(x)=0,$$

которое выполняется на множестве, где $f'(x) \neq 0$, и, тем самым, всюду на $(0, \delta)$. Перепишем его в виде $f'''+c_1 f'f+c_2 f=0$, $c_1, c_2=\mathrm{const}$, $c_1 \neq 0$, затем (после интегрирования) – в виде $f''+c_1 f^2/2+c_2 f+c_3=0$, $c_3=\mathrm{const}$, и, наконец (после умножения на f'), – в виде $(f')^2=P(f)$, где P – многочлен 3-й степени. Линейной заменой неизвестной функции последнее уравнение приводится к стандартной форме

$$(\psi')^2=4\psi^3-a\psi-b,\ a,\ b=\mathrm{const}. \qquad (7)$$

Нетрудно показать, что всякое решение класса C^2 уравнения (7), удовлетворяющее условию $\lim\limits_{x\to 0}|\psi(x)|=\infty$, есть $\mathcal{P}$-функция (для решений класса C^1 это уже не так). Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 3. М., 1963.
2. Gurevich B. M. Additive integrals of motion of point particle systems in one dimension//Ergodic theory and related topics: Proc. conf. in Vitte (GDR). Berlin, 1982. 59—63.
3. Мусина И. Ю. Об одном дифференциально-функциональном уравнении, возникающем в задаче о первых интегралах//Дифференц. уравнения и их прил. Темат. сб. науч. тр. Алма-Ата, 1984. 33—36.
4. Пидкуйко С. И., Степин А. М. О решении одного дифференциально-функционального уравнения//Функц. анализ и его прил. 1976. **10**, № 2. 84—85.
5. Пидкуйко С. И. Первые интегралы многочастичных систем с взаимодействием: Автореф. канд. дис. М., 1978.

Поступила в редакцию
27.01.86