М. А. Семенов-Тян-Шанский, Классические r-матрицы и квантование, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1984, том 133, 228–235

М.А.Семенов-Тян-Шанский

КЛАССИЧЕСКИЕ r-МАТРИЦЫ И КВАНТОВАНИЕ

Настоящая заметка продолжает статью автора [I], посвященную алгебраической природе классических r-матриц. Напомню основное определение работы [I].

Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли, $R \in \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ - линейный оператор. Будем говорить, что R задает на $\mathfrak{g}$ структуру двойной алгебры Ли, если скобка *)

$$[X,Y]_R = \frac{1}{2}([RX,Y] + [X,RY]) \quad (I)$$

удовлетворяет тождеству Якоби. Алгебру $\mathfrak{g}$, снабженную скобкой (I), обозначим $\mathfrak{g}_R$. Линейный оператор R называется классической r-матрицей.

Отмеченный класс двойных алгебр Ли образуют алгебры, для которых оператор R удовлетворяет модифицированному тождеству Янга - Бакстера

$$[RX,RY] = R([RX,Y]+[X,RY]) - [X,Y]. \quad (2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть оператор $R \in \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ удовлетворяет тождеству (2). Тогда (i) $(\mathfrak{g}, R)$ - двойная алгебра Ли (ii). Операторы $R_\pm = \frac{1}{2}(R \pm 1)$ - гомоморфизмы из $\mathfrak{g}_R$ в $\mathfrak{g}$.

Мы отсылаем читателя к [I], [2] по поводу связи определений (I), (2) с традиционными тензорными обозначениями.

ПРИМЕР I. Пусть $\mathfrak{g}_+, \mathfrak{g}_-$ - подалгебры $\mathfrak{g}$ такие, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \dot{+} \mathfrak{g}_-$ как линейное пространство. Пусть $P_\pm$ - проектор на $\mathfrak{g}_\pm$ параллельно дополнительной подалгебре, $R = P_+ - P_-$. Нетрудно видеть, что оператор R удовлетворяет тождеству (2); алгебра $\mathfrak{g}_R$ - прямая сумма $\mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$ со скобкой Ли $[X,Y]_R = [X_+,Y_+] - [X_-,Y_-]$. Приведенный пример соответствует так называемой схеме Адлера - Костанта. Он наиболее важен в приложениях.

На двойственном пространстве к двойной алгебре Ли определены две пуассоновых структуры - скобки Ли-Пуассона алгебр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_R$. Напомним, что скобка Ли-Пуассона алгебры Ли вырождена; ее центр образуют функции, постоянные на орбитах коприсоединенного пред-

*) Это определение отличается от принятого в [I] нормировкой.

ставления соответствующей группы Ли ("функции Казимира").

ТЕОРЕМА I. Элементы Казимира алгебры $\mathfrak{g}$ коммутируют относительно скобки Ли-Пуассона алгебры $\mathfrak{g}_R$.

Теорема I была первоначально доказана для двойных алгебр Ли, описанных в примере I. Она охватывает многочисленные частные случаи доказательства инволютивности интегралов движения вполне интегрируемых гамильтоновых систем, решаемых методом задачи Римана [I].

Представляется интересным, что все основные результаты классической теории - инволютивность интегралов, построение обобщенной задачи Римана и группы одевающих преобразований - можно вывести непосредственно из уравнения Янга - Бакстера (2), не используя классификации его решений.

В квантовой механике скобку Ли-Пуассона заменяет коммутатор в универсальной обертывающей алгебре. Возникают естественные вопросы:

(I) каков квантовый аналог теоремы I.

(2) какова связь этой теоремы с квантовым методом обратной задачи.

В настоящей заметке мы приведем квантовый вариант теоремы I для произвольных r-матриц, удовлетворяющих тождеству (2). (Для случая схемы Костанта - Адлера (пример I) этот результат был получен Костантом на примере незамкнутой цепочки Тоды [3]). Мы изложим также некоторые соображения по поводу второго вопроса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 ([I], [4]). Пусть оператор $R \in \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ удовлетворяет тождеству (2). Пусть $\mathfrak{g}_\pm = \mathrm{Im}\,R_\pm$, $k_\pm = \mathrm{Ker}\,R_\mp$. Тогда ($i$) $\mathfrak{g}_\pm \subset \mathfrak{g}$ - подалгебра Ли.(ii) $k_\pm \subset \mathfrak{g}_\pm$ идеал (iii) Отображение $\theta : \mathfrak{g}_+/k_+ \longrightarrow \mathfrak{g}_-/k_-$, заданное формулой $\theta : R_+X \longmapsto R_-X$ - изоморфизм алгебр Ли Отображение

$$\mathfrak{g}_R \xrightarrow{(R_+,\, R_-)} \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_-$$

- мономорфизм, образ которого совпадает с подалгеброй

$$\tilde{\mathfrak{g}}_R = \{(X_+, X_-) \in \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_- \;;\; \theta(\overline{X}_+) = \overline{X}_-\}$$

(мы обозначаем $\overline{X}_\pm$ класс вычетов $X_\pm \,(\mathrm{mod}\, k_\pm)$)

(v) Любой элемент $X \in \mathfrak{g}$ однозначно представим в виде $X = X_+ - X_-$, $(X_+, X_-) \in \tilde{\mathfrak{g}}_R$.

Отображение θ называется преобразованием Кэли оператора R.

Пусть $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_R)$ - универсальные обертывающие алгебры алгебр Ли $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_R$. В силу теоремы Пуанкаре – Биркгофа – Витта алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ и $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_R)$ изоморфны как фильтрованные линейные пространства. Мы построим канонический линейный изоморфизм $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_R) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ и опишем связь умножений в алгебрах $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_R)$. Будем обозначать гомоморфизмы обертывающих алгебр теми же буквами, что и соответствующие гомоморфизмы алгебр Ли. Для любой алгебры Ли ℓ пусть $\varepsilon : \mathcal{U}(\ell) \longrightarrow \mathbb{C}$ – проекция на $\mathbb{C}$ в разложении

$$\mathcal{U}(\ell) = \mathbb{C} \oplus \ell\,\mathcal{U}(\ell).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\mu : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_R) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-)$ – гомоморфизм, заданный на образующих $X \in \mathfrak{g}_R$ формулой

$$\mu(X) = X_+ \otimes 1 + 1 \otimes X_-, \quad X_\pm = R_\pm X$$

(i) Отображение μ – мономорфизм.
(ii) Пусть $\pi_\pm : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\pm) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_\pm / k_\pm)$ – каноническая проекция, Образ μ – подалгебра

$$\widetilde{\mathcal{U}} = \{ x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-);\ \theta \circ \pi_+ (\varepsilon \otimes 1) x = \pi_- (1 \otimes \varepsilon) x \}.$$

(iii). Пусть $x \longmapsto {}^t x$ – антиавтоморфизм $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, равный -1 на $\mathfrak{g}$. Пусть

$$p : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_+) \otimes \mathcal{U}(\mathfrak{g}_-) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}) : x \otimes y \longmapsto x \cdot {}^t y.$$

Сквозное отображение

$$p \circ \mu : \mathcal{U}(\mathfrak{g}_R) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$$

– линейный изоморфизм. Любой элемент $x \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_k x_k^+ \cdot {}^t x_k^-, \quad \sum_k x_k^+ \otimes x_k^- \in \widetilde{\mathcal{U}}. \tag{3}$$

КОММЕНТАРИЙ. Представление $X = X_+ - X_-$, построенное в предложении 2 (v) – инфинитезимальная версия задачи факторизации ("задача о скачке"). Представление (3) – задача факторизации в универсальной обертывающей алгебре $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$. (Ср.роль задачи факторизации в классической механике [1]).

Обозначим $\delta = (\rho \circ \mu)^{-1}$ и положим

$$x \times y = \delta^{-1}(\delta(x)\cdot\delta(y)) .$$

Операцияя $*$ - это умножение в $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, перенесенное в $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ с помощью изоморфизма δ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Для любых $x, y \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})$

$$x * y = \sum_{k} x_k^{+}\, y\, {}^{t}x_k^{-} , \tag{4}$$

где $x = \sum_k x_k^{+} \cdot {}^{t}x_k^{-}$, $\sum_k x_k^{+} \otimes x_k^{-} \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Пусть Z - центр алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^{K}$.

ТЕОРЕМА 2. Сужение отображение $\delta: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ на Z - кольцевой гомоморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x, y \in Z$. Имеем в силу (4)

$$x * y = \sum_k x_k^{+} \cdot y \cdot {}^{t}x_k^{-} = xy = yx = y * x .$$

Для того, чтобы симметричным элементам $z \in Z$ (т.е. таким, что $z = {}^{t}z$) соответствовали самосопряженные операторы в унитарных представлениях алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, отображение δ нужно слегка подправить. Определим функционал $\rho \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^{*}$ формулой

$$\rho(X) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}} X) .$$

Пусть α - автоморфизм алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$, заданный на образующих $X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ формулой

$$\alpha(X) = X - \rho(X) .$$

Положим $\gamma = \alpha \circ \delta$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ унимодулярна, т.е. $\operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} X = 0$ для всех $X \in \mathfrak{g}$. Тогда гомоморфизм $\gamma: Z \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ симметричен, т.е. $\gamma({}^{t}z) = {}^{t}\gamma(z)$ (См. [5]).

Пусть gr - канонический функтор из категории фильтрованных алгебр в категорию градуированных алгебр. Напомним, что $gr\,\mathcal{U}(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. Пусть $\mathcal{U} = \bigcup_n \mathcal{U}_n$ - каноническая фильтрация, $S = \bigoplus_n S_n$ - соответствующая ей каноническая градуировка. Пусть $u \in \mathcal{U}_k$. Элемент $gr_k u \in S_k$ называется старшим символом u.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. (i) Отображение $\gamma: \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_{\mathbb{R}})$ сохраняет каноническую фильтрацию. (ii) Диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U}(\mathfrak{g})_k \arrow[r] \arrow[d, "gr_k"'] & \mathcal{U}(\mathfrak{g}_R)_k \arrow[d, "gr_k"] \\ S(\mathfrak{g})_k \arrow[r] & S(\mathfrak{g}_R)_k \end{tikzcd}$$

в которой нижняя стрелка - канонический изоморфизм, коммутативна.

Таким образом, старшие символы операторов z и $\gamma(z)$ совпадают.

Напомним, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{l}$ алгебра $S(\mathfrak{l})$ снабжена естественной скобкой Ли, которая при изоморфизме $S(\mathfrak{l}) \simeq P(\mathfrak{l}^*)$ переходит в скобку Ли-Пуассона алгебры $\mathfrak{l}$. Для любых $u \in \mathcal{U}(\mathfrak{l})_k$, $v \in \mathcal{U}(\mathfrak{l})_m$

$$gr_{k+m-1}(u \cdot v - v \cdot u) = \{ gr_k u, gr'_m v \} . \qquad (5)$$

Пользуясь (5) и предложением 6, нетрудно вывести теорему I из теоремы 2.

Между квантовыми операторами $\gamma(z)$ и их символами можно установить взаимно однозначное соответствие. Напомним, что квантованием симметрической алгебры $S(\mathfrak{l})$ называется отображение $q: S(\mathfrak{l}) \to \mathcal{U}(\mathfrak{l})$, согласованное с фильтрацией и сохраняющее старший символ. Другими словами, если $x \in S_k$, то $q(x) \in \mathcal{U}_k$ и $gr_k q(x) = x$. Примером квантования является отображение симметризации β. Потребуем, чтобы квантование Q алгебры $S(\mathfrak{g}_R)$ переводило алгебру $J = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ в коммутативную алгебру $\gamma(Z)$ и было кольцевым гомоморфизмом. Эти условия определяют Q однозначно.

Чтобы построить отображение Q, напомним сначала конструкцию изоморфизма Дюфло.

Определим формальный ряд $j \in \hat{P}(\mathfrak{g})$ равенством

$$j(X) = \det(\operatorname{sh} \operatorname{ad} X / \operatorname{ad} X).$$

Ряд j - обратимый элемент в кольце формальных степенных рядов. Пусть j^{-1} - обратный ряд. Определено каноническое спаривание

$$\hat{P}(\mathfrak{g}) \times S(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C} ,$$

которое позволяет рассматривать формальные ряды как дифференциальные операторы (бесконечного порядка) на $S(\mathfrak{g})$. Обозначим $\mathcal{D}(j^{-1})$ дифференциальный оператор, соответствующий ряду j^{-1}. Пусть $\beta: S(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g})$ – отображение симметризации.

ТЕОРЕМА (Дюфло, [6]). Отображение

$$\Delta: S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \longrightarrow Z \qquad u \longmapsto \beta_0 \mathcal{D}(j^{-1})\, u$$

– кольцевой изоморфизм.
(Для полупростых алгебр Ли этот результат (в несколько иной форме) был получен Хариш-Чандрой).

Нетрудно проверить, что если $u \in S(\mathfrak{g})_K$, то $\mathfrak{gr}_K \Delta u = u$. Таким образом, отображение Δ – квантование алгебры $S(\mathfrak{g})$. Пусть $Q = \gamma \circ \Delta$ – сквозное отображение

$$Q : S(\mathfrak{g}_R) \longrightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{g}_R).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. (i) Отображение Q – квантование $S(\mathfrak{g}_R)$.
(ii) Сужение Q на $J = S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ – кольцевой гомоморфизм.
Теоремы I и 2 не зависят от выбора модели, т.е. от конкретного вида лаксова оператора. Чтобы конкретизировать выбор модели в классической механике нужно выбрать орбиту присоединенной группы алгебры Ли. $\mathfrak{g}_R$. В квантовой механике выбор модели соответствует переходу к представлению алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{g}_R)$. (Напомним, что между орбитами и представлениями существует естественное соответствие).

Закончим эту заметку замечанием о соотношении теоремы 2 с квантовым методом обратной задачи. Различие между ними состоит в их исходном пункте – выборе пуассоновой структуры. Пуассонова структура, возникающая в методе обратной задачи, не линейна, как скобка Ли – Пуассона, а квадратична. (Квадратичные скобки Пуассона впервые исследованы в [8], [9]).

Пусть G – редуктивная матричная группа Ли. Отождествим ее алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с двойственным пространством с помощью инвариантного скалярного произведения $\operatorname{tr} XY$. Предположим, что оператор $R \in \operatorname{End} \mathfrak{g}$ кососимметричен ("условие унитарности") и удовлетворяет модифицированному уравнению Янга – Бакстера (2). Определим скобку Пуассона функций на группе G, положив

$$\{h_1,h_2\}(L) = tr(LX_2R(LX_1) - X_2LR(X_1L)) , \qquad (6)$$
$$X_i = grad\, h_i(L).$$

ТЕОРЕМА ([7], [I]). (i) Скобка (4) кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби (ii). Умножение $G \times G \longrightarrow G$ – пуассоново отображение относительно скобки (4)
(iii) Центральные функции на G коммутируют относительно скобки (6).

Свойство (ii) скобки (4) – это, в точности, хорошо известное свойство матриц монодромии разностных систем ("скобки Пуассона элементов матрицы монодромии воспроизводят скобки Пуассона элементов лаксова оператора в одном узле", см. [I], [8]).

Алгебра операторов в квантовом методе обратной задачи представляет собой деформацию алгебры функций на группе G с квадратичной скобкой Пуассона (4). Построение такой деформации давало бы "универсальные" (т.е. не зависящие от модели) коммутационные соотношения между квантовыми операторами. Е.К.Склянин в [9] изучает факторалгебру этой универсальной алгебры, получающуюся при выборе модели. "Универсальная" алгебра построена В.Г.Дринфельдом [IO] для классических r-матриц, удовлетворяющих вместо (2) вырожденному тождеству

$$[RX, RY] = R([X,RY] + [RX,Y]) . \qquad (7)$$

К сожалению, с тождеством (7) не связана разумная задача факторизации и оно не выполняется в реалистических примерах.

Задача изучения деформаций квадратичных скобок (7) интересна в особенности потому, что она приводит нас к новому классу некоммутативных алгебр, для которых существует содержательная теория представлений [6].

Автор благодарен А.Г.Рейману, Н.Ю.Решетихину и Е.К.Склянину за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

I. С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Что такое классическая r-матрица. – Функц.анализ и его прилож., 1983, т.17, № 4, с.17-33.

2. С е м е н о в - Т я н - Ш а н с к и й М.А. Классические r-матрицы и метод орбит. – В кн.: Дифференциальная геометрия,

группы Ли и механика.У. Зап.научн.семин.ЛОМИ, 1983, т.123, с. 77-91.

3. K o s t a n t B. Quantization and representation theory. - Lecture Notes of the London Math.Sci., 1979, v.34, p.287-316.

4. Б е л а в и н А.А., Д р и н ф е л ь д В.Г. Уравнения треугольников и простые алгебры Ли. - Препринт ИТФ, 1982-18. Черноголовка, 33 с.

5. R e y m a n A.G., S e m e n o v - T i a n - S h a n s k y M.A. Reduction of Hamiltonian systems, affine Lie algebras and Lax equations I. - Inv.math.. 1979, v.54, p.81-100.

6. D u f l o M. Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie. - Ann.Sci.Ecile Norm.Sup., 1977, v.10, p.265-283.

7. Д р и н ф е л ь д В.Г. Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл уравнения Янга - Бакстера. - Докл. АН СССР, 1983, т.268, № 5, с.285-287.

8. Р е ш е т и х и н Н.Ю., Ф а д д е е в Л.Д. Гамильтоновы структуры интегрируемых моделей теории поля. - ТМФ, 1983, т.56, № 3, с.323-343.

9. С к л я н и н Е.К. О некоторых алгебраических структурах, связанных с уравнением Янга - Бакстера I,II. - Функц.анализ и его прилож., 1982, т.16, в.4, с.27-34; 1983, т.17, в.4, с.34-48.

10. Д р и н ф е л ь д В.Г. О постоянных квазиклассических решениях квантового уравнения Янга - Бакстера. - Докл. АН СССР, 1983, т.273, № 3, с.531-535.