

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Зайков, М. Х. Стрелец, М. Л. Шур, Расчет стационарных турбулентных течений химически реагирующих газовых смесей в каналах при произвольных числах Маха,  
*ТВТ*, 1994, том 32, выпуск 6, 850–862

<https://www.mathnet.ru/tvt3182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

19 апреля 2025 г., 10:45:33



УДК 532.5:536.46

## РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩИХ ГАЗОВЫХ СМЕСЕЙ В КАНАЛАХ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧИСЛАХ МАХА

© 1994 г. Л. А. Зайков, М. Х. Стрелец, М. Л. Шур

Российский научный центр "Прикладная химия", г. Санкт-Петербург

Поступила в редакцию 21.03.94 г.

На основе обобщения метода масштабирования сжимаемости, предложенного ранее для расчета стационарных ламинарных течений вязких газов и газовых смесей при произвольных числах Маха, разработан алгоритм расчета аналогичных турбулентных течений в рамках полной системы уравнений Навье–Стокса в сочетании с низкорейнольдсовой версией  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности. Возможности разработанного метода продемонстрированы на примерах расчетов дозвуковых, смешанных и сверхзвуковых турбулентных течений в плоских и осесимметричных каналах различной конфигурации.

**Введение.** Оптимизация режимных и геометрических параметров различных топков, до- и сверхзвуковых камер сгорания, сопел реактивных двигателей, а также ряда других аналогичных устройств требует разработки экономичных численных алгоритмов расчета многомерных турбулентных внутренних течений газов и газовых смесей, обеспечивающих возможность проведения численных исследований течений данного класса в широком диапазоне изменения определяющих параметров (чисел Маха, Рейнольдса, Дамкелера и т.п.).

Среди многих проблем, возникающих при построении таких алгоритмов, важное место занимает проблема обеспечения их универсальности по отношению к числу Маха потока. Интенсивные исследования, проводившиеся в последние годы для решения аналогичной проблемы применительно к расчету ламинарных течений на основе полных уравнений Навье–Стокса, привели к созданию ряда методов [1 - 5], которые в отличие от традиционных алгоритмов расчета сжимаемых газовых потоков не теряют работоспособности при низких значениях числа Маха и обеспечивают тем самым возможность исследования широкого круга не только сверхзвуковых, но также смешанных и дозвуковых течений (включая предельный случай течения несжимаемой жидкости) с помощью единого алгоритма. В данной работе один из таких методов (метод масштабирования сжимаемости [5, 6]) обобщен на случай расчета аналогичных турбулентных течений.

В первом разделе статьи представлена постановка рассматриваемой задачи (осредненная по Фавру система уравнений Навье–Стокса, замкнутая с помощью низкорейнольдсовой формы  $k$ - $\epsilon$

модели турбулентности [7]) и проведена регуляризация исходных уравнений, исключаяющая их акустическую жесткость при малых дозвуковых скоростях течения подобно тому, как это делается в [5] для уравнений Навье–Стокса. Во втором разделе описана предложенная неявная конечно-разностная схема расщепления по направлениям и физическим процессам, являющаяся обобщением на рассматриваемый случай схемы [5, 6], а в третьем – приведены результаты расчетов, иллюстрирующие возможности разработанной методики на примере решения ряда типичных задач о турбулентных течениях газов и реагирующих газовых смесей в плоских и осесимметричных каналах и соплах Лавала.

**Преобразование исходных уравнений.** Как уже отмечалось, основная идея метода масштабирования сжимаемости [5] состоит в регуляризации нестационарных членов уравнений Навье–Стокса, исключаяющей акустическую жесткость, присущую этим уравнениям при малых значениях числа Маха. При этом искомое стационарное решение задачи, очевидно, не меняется, что открывает возможность построения эффективных и универсальных по отношению к числу Маха потока неявных конечно-разностных схем для численного интегрирования регуляризованной системы в рамках релаксационной процедуры, подобной методу установления применительно к исходной (нерегуляризованной) системе. Следуя этой идее, проведем аналогичную регуляризацию замкнутых с помощью низкорейнольдсовой версии  $k$ - $\epsilon$  модели турбулентности [7] уравнений Рейнольдса, описывающих нестационарное турбулентное течение химически неравновесной смеси совершенных газов. Выбор для

описания процессов турбулентного переноса именно  $k-\epsilon$  модели объясняется двумя причинами. Во-первых, несмотря на известные недостатки этой модели, она широко используется в настоящее время для расчета самых разнообразных внутренних течений. Кроме того, с вычислительной точки зрения используемая версия данной модели [7] является одной из наиболее сложных, что позволяет оценить работоспособность предлагаемого численного метода в наиболее жестких условиях.

Будем исходить из неконсервативной формы записи исходной системы уравнений и ограничимся рассмотрением двумерных течений в произвольной криволинейной системе координат  $\xi, \eta$ , связанных с физическими координатами  $x, y$  соотношениями

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y). \quad (1)$$

Переходя в этой системе к безразмерному виду и вводя одновременно в качестве основной переменной динамическое (избыточное) давление  $p' = p - p_0$  ( $p_0$  - характерное значение статического давления  $p$ ), получим (черта над безразмерными переменными для краткости опущена)

$$A \partial g / \partial t + W_1 = 0, \quad (2)$$

где вектор основных переменных

$$g = \| p', u, v, k, \epsilon, h, c_1, \dots, c_{N_k} \|^T \equiv \| p', u, v, k, \epsilon, h, c_k \|^T \quad (3)$$

есть  $(6 + N_k)$ -мерный вектор-столбец, а матрица коэффициентов при производных по времени  $A$  и вектор  $W_1$  имеют вид

$$A = \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\gamma_0 M_0^2 m}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho}{c_p T} \rho \left[ \frac{h_k}{c_p T} - \frac{m}{m_k} \right] \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-(\gamma_0 - 1) M_0^2}{\rho} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|, \quad (4)$$

$$W_1 = A \left( U \frac{\partial g}{\partial \xi} + V \frac{\partial g}{\partial \eta} \right) + D + \frac{1}{\rho} Q_c + \frac{1}{\rho} Q_t + \frac{1}{\rho} \left( \xi_x \frac{\partial M_v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial M_v}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial N_v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial N_v}{\partial \eta} \right). \quad (5)$$

Вектор-столбец  $D$ , входящий в (5), имеет следующий вид:

$$D = \left\| \begin{array}{c} \rho \left( \xi_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial u}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \\ \rho^{-1} \left( \xi_x \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right) \\ \rho^{-1} \left( \xi_y \frac{\partial p'}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right) \\ 0 \\ 0 \\ -2(\mu + \mu_t)(\gamma_0 - 1) M_0^2 \Phi \\ \frac{\phantom{-2(\mu + \mu_t)(\gamma_0 - 1) M_0^2 \Phi}}{\text{Re}_0 \rho} \\ 0 \end{array} \right\|. \quad (6)$$

метрические множители  $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$  определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \xi_x &= J y_{\eta}, & \xi_y &= -J x_{\eta}, \\ \eta_x &= -J y_{\xi}, & \eta_y &= J x_{\xi}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $J = (x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi})$  - якобиан преобразования координат (1), а источниковые члены уравнений, входящие в вектор  $W_1$ , определяются следующим образом:

$$Q_c = \left\| 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\sum_{s=1}^{N_r} \text{Da}_{s_0} \dot{w}_{ks} \right\|^T, \quad (8)$$

$$Q_t = \| 0, 0, 0, -S_k, -S_{\epsilon}, 0, 0 \|^T,$$

где  $\dot{w}_{ks}$  представляет собой массовую скорость образования (исчезновения) компонента  $k$  в результате  $s$ -й химической реакции

$$\begin{aligned} \dot{w}_{ks} &= (v''_{ks} - v'_{ks}) m_k K_s^+ \rho^{v_s} \left\{ \prod_{i=1}^{N_k} \left( \frac{c_i}{m_i} \right)^{v'_{is}} - \right. \\ &\left. - K_{ps_0}^{-1} \rho_0^{\Delta v_s} K_{ps}^{-1} [m(1 + \gamma_0 M_0^2 p')]^{\Delta v_s} \prod_{i=1}^{N_k} \left( \frac{c_i}{m_i} \right)^{v''_{is}} \right\}, \end{aligned}$$

$$v_s = \sum_{i=1}^{N_k} v'_{is}, \quad \Delta v_s = \sum_{i=1}^{N_k} (v''_{is} - v'_{is}),$$

$$k = 1, \dots, N_k; \quad s = 1, \dots, N_r.$$

Здесь  $N_k$  – число компонентов смеси;  $N_R$  – число протекающих в ней химических реакций;  $v_{ks}^i$  и  $v_{ks}^n$  – стехиометрические коэффициенты реагентов и продуктов  $s$ -й химической реакции;  $K_s^+$  – константа скорости этой реакции;  $K_{ps}$  – константа ее равновесия, построенная по парциальным давлениям.

Величины  $S_k$  и  $S_\varepsilon$  в (8) представляют собой генерационные и диссипативные члены уравнений баланса кинетической энергии турбулентности  $k$  и скорости ее диссипации  $\varepsilon$  и определяются по формулам [7]

$$S_k = G - \rho\varepsilon - \frac{2\mu k}{d^2},$$

$$S_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k} \left( C_1 G - C_2 \rho \varepsilon f - \frac{2\mu k \exp(-C_4 d^+)}{d^2} \right),$$

$$G = \left( 2\mu_s S - \frac{2}{3} \mu_t (\nabla \cdot \mathbf{V}) E - \frac{2}{3} \rho k E \right) : \dot{S}, \quad (9)$$

$$f = 1 - \frac{0.4}{1.8} \exp \left[ - \left( \frac{\rho k^2}{6\mu\varepsilon} \right)^2 \right],$$

$$\mu_t = c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} [1 - \exp(-C_3 d^+)], \quad d^+ = d(\tau_w \rho_w)^{1/2} / \mu_w,$$

причем, согласно [7], эмпирические константы, входящие в эти уравнения, полагаются равными

$$C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3, \quad C_1 = 1.35,$$

$$C_2 = 1.8, \quad C_3 = 0.01, \quad C_4 = 0.5, \quad Pr_t = 0.9, \quad Sc_t = 1.0.$$

Наконец, вязкие члены исходных уравнений, входящие в  $W_1$ , могут быть записаны в форме

$$M_v = Re_0^{-1} \left\| \left\| 0, -\tau_{xx}, -\tau_{xy}, -(\mu + \mu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x}, \right. \right.$$

$$\left. \left. -(\mu + \mu_t / \sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, q_x / Pr_0, j_k / Sc_0 \right\| \right\|^T,$$

$$N_v = Re_0^{-1} \left\| \left\| 0, -\tau_{xy}, -\tau_{yy}, -(\mu + \mu_t / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial y}, \right. \right.$$

$$\left. \left. -(\mu + \mu_t / \sigma_\varepsilon) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, q_y / Pr_0, j_k / Sc_0 \right\| \right\|^T. \quad (10)$$

Входящие в (10) компоненты тензора напряжений включают в себя как вязкую часть, так и

турбулентные слагаемые, т.е. тензор  $\tau$  определяется следующим образом:

$$\tau = 2(\mu + \mu_t) \dot{S} - \frac{2}{3} (\mu + \mu_t) (\nabla \cdot \mathbf{V}) E - \frac{2}{3} \rho k E. \quad (11)$$

Эффективные тепловые потоки и диффузионные потоки отдельных компонентов вычисляются с помощью соотношений

$$q = - \left( \lambda + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \nabla T + \frac{1}{Le_0} \sum_{k=1}^{N_k} h_k j_k,$$

$$j_k = -\rho \left( D_k + \frac{\mu_t}{\rho Sc_t} \right) \nabla c_k. \quad (12)$$

При записи исходных уравнений (2) - (12) введены следующие обозначения:  $t$  – время,  $u, v$  – проекция вектора осредненной скорости смеси  $\mathbf{V}$  на оси физической системы координат,  $\Phi = \dot{S}^2 - (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 / 3$  – диссипативная функция,  $\dot{S}$  – тензор скоростей деформаций,  $U = \xi_x u + \xi_y v$ ,  $V = \eta_x u + \eta_y v$  – контравариантные компоненты вектора скорости,  $E$  – единичный тензор,  $\rho, m, T$  – плотность, молекулярная масса и температура смеси соответственно,  $c_k$  – относительная массовая концентрация  $k$ -го компонента,  $h_k$  – удельная энтальпия смеси,  $h_k$  – удельная энтальпия  $k$ -го компонента,  $c_p$  – удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении,  $c_{pk}$  – удельная теплоемкость  $k$ -го компонента,  $\mu, \lambda, D_k$  – коэффициенты динамической вязкости, теплопроводности смеси и диффузии  $k$ -го компонента,  $\mu_t$  – коэффициент турбулентной вязкости,  $d$  – расстояние от рассматриваемой точки потока до стенки. Индекс  $w$  относится к параметрам на стенке, а индексом 0 обозначены безразмерные комплексы, построенные по характерным значениям соответствующих величин, принятых за масштабы

$$Re_0 = \frac{\rho_0 u_0 l_0}{\mu_0}, \quad Pr_0 = \frac{\mu_0 c_{p0}}{\lambda_0}, \quad Sc_0 = \frac{\mu_0}{\rho_0 D_0},$$

$$Le_0 = \frac{\lambda_0}{\rho_0 D_0 c_{p0}}, \quad M_0^2 = \frac{\gamma_0 R T_0}{m_0}, \quad \gamma_0 = \frac{c_{p0}}{c_{p0} - R / m_0},$$

$$Da_{s_0} = \frac{l_0}{u_0} \left( \frac{m_0}{\rho_0} \right)^{1-\nu} K_{s_0}^+.$$

Для замыкания системы уравнений (2) используются зависимости теплофизических и переносных свойств смеси от ее состава, давления и температуры и уравнение состояния, безразмерная форма которого для смеси совершенных газов имеет вид

$$\rho = (1 + \gamma_0 M_0^2 p') m / T.$$

Отметим, что использование в качестве основной переменной динамического давления  $p'$  позволяет в явном виде выделить в исходных уравнениях все члены, стремящиеся к нулю при стремлении к нулю числа Маха, и делает очевидной сингулярность задачи при  $M_0 \rightarrow 0$  (матрица коэффициентов при производных по времени  $A$  в (2) становится вырожденной при  $M_0 = 0$ ), благодаря чему удается легко провести регуляризацию исходных уравнений и устранить их жесткость при малых значениях числа Маха.

Следуя методу масштабирования сжимаемости, детали которого подробно описаны в [5, 6], заменим матрицу  $A$  (4) на матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_0 a m}{T} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho}{c_p T} \rho \left[ \frac{h_k}{c_p T} - \frac{m}{m_k} \right] \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где коэффициент  $a$  полагается равным  $M_0^2$  при  $M_0 \geq 1$  и единице при  $M_0 < 1$ , и вместо исходной системы уравнений (2) будем решать систему

$$\tilde{A} dg / dt + W_1 = 0, \quad (14)$$

имеющую, очевидно, то же стационарное решение, что и система (2), но не обладающую жесткостью, присущей (2) при малых числах Маха потока.

**Конечно-разностная схема.** Для построения конечно-разностной схемы численного интегрирования системы уравнений (14) представим предварительно вектор  $W_1$  из (5) в следующей форме расщепления по пространственным направлениям и физическим процессам:

$$W_1 = \sum_{i=1}^4 \Omega_i g + \frac{1}{\rho} Q_c + \frac{1}{\rho} Q_t + G. \quad (15)$$

Здесь

$$\Omega_l = \begin{pmatrix} \gamma_0 M_0^2 \frac{m}{T} U_l \frac{\partial}{\partial \xi_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(\gamma_0 - 1) M_0^2 \frac{U_l}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$$l = 1, 2, \quad U_1 = U, \quad U_2 = V, \quad \xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \eta,$$

$$\Omega_3 = \begin{pmatrix} 0 & \rho \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\xi_x}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + Q_1 U \frac{\partial}{\partial \xi} - \quad (17)$$

$$- \frac{1}{\text{Re}_0 \rho} \left[ \xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi_x Q_2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \xi_y \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi_y Q_3 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right],$$

$$\Omega_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \rho \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta_y}{\rho} \frac{\partial}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + Q_1 V \frac{\partial}{\partial \eta} - \quad (18)$$

$$- \frac{1}{\text{Re}_0 \rho} \left[ \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta_x Q_2 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \eta_y \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta_y Q_3 \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right].$$

Матрицы  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$  в (17), (18) имеют вид

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-\rho}{c_p T} \rho \left[ \frac{h_k}{c_p T} - \frac{v}{m_k} \right] \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}(\mu + \mu_t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu + \mu_t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Pr_0} \left( \frac{\lambda}{c_p} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) & \omega_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Sc_0} \left( \rho D_k + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \end{pmatrix},$$

$$Q_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu + \mu_t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3}(\mu + \mu_t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Pr_0} \left( \frac{\lambda}{c_p} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) & \omega_k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Sc_0} \left( \rho D_k + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \end{pmatrix},$$

$$\omega_k = -h_k \left[ \frac{1}{Pr_0} \left( \frac{\lambda}{c_p} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) - \frac{1}{Sc_0} \left( \rho D_k + \frac{\mu_t}{Sc_t} \right) \right],$$

а в вектор  $\mathbf{G}$  входят все остальные, не включенные в операторы  $\Omega_i$  и вектор  $\mathbf{Q}_c$ , члены вектора  $\mathbf{W}_1$ .

Отметим, что вектор  $\mathbf{W}_1$  в (14) записан в неконсервативной форме, поскольку именно эта форма используется при построении стабилизирующих операторов предлагаемой неявной конечно-разностной схемы расщепления. Однако для обеспечения консервативности разностной схемы в явной части алгоритма, как и в [5, 6], используется квазиконсервативная форма записи исходных уравнений, для чего применяется специальный прием, предложенный в [8] и состоящий в следующем.

Представим вектор  $\mathbf{W}_1$  в виде

$$\mathbf{W}_1 = \mathbf{B}\mathbf{W}, \quad (19)$$

где  $\mathbf{W}$  – стационарная часть уравнений Рейнольдса, записанных в квазиконсервативной форме

$$\partial \mathbf{Q} / \partial t + \mathbf{W} = 0, \quad (20)$$

$$\mathbf{Q} = \left\| \rho, \rho u, \rho v, \rho k, \rho \epsilon, \rho H - (\gamma_0 - 1) M_0^2 p', \rho c_k \right\|^T,$$

$$H = h + [(\gamma_0 - 1)/2] M_0^2 (u^2 + v^2), \quad (21)$$

$$\mathbf{W} = \xi_x \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \eta} + \xi_y \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} + \eta_y \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} + \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_v,$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_v + \left\| \rho u, \rho u^2 + p', \rho u v, \rho u k, \rho u \epsilon, \rho u H - (\gamma_0 - 1) M_0^2 (u \tau_{xx} + v \tau_{xx}) / Re_0, \rho u c_k \right\|^T, \quad (21a)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_v + \left\| \rho v, \rho u v, \rho v^2 + p', \rho v k, \rho v \epsilon, \rho v H - (\gamma_0 - 1) M_0^2 (u \tau_{xy} + v \tau_{yy}) / Re_0, \rho v c_k \right\|^T, \quad (21b)$$

а  $B$  – невырожденная матрица, определяемая соотношением

$$B = (\partial F / \partial f)^{-1},$$

$$F = \|\rho, \rho u, \rho v, \rho k, \rho \epsilon, \rho H, \rho c_k\|^T, \quad (22)$$

$$f = \|\rho, u, v, k, \epsilon, h, c_k\|^T.$$

Тогда систему уравнений (14) можно записать в виде

$$\tilde{A} \partial g / \partial t + BW = 0. \quad (23)$$

Очевидно, что стационарное решение этой системы совпадает с решением системы стационарных уравнений Рейнольдса, записанных в консервативной форме  $W = 0$ .

В итоге конечно-разностная схема, предлагаемая для численного интегрирования (23), может быть записана в следующем виде:

$$(\tilde{A}^n + \tau^n \Omega_0^n) \Delta g^{n+1/5} = -\tau^n B^n W^n,$$

$$(\tilde{A}^n + \tau^n \Omega_1^n) \Delta g^{n+2/5} = \tilde{A}^n \Delta g^{1/5},$$

$$(\tilde{A}^n + \tau^n \Omega_2^n) \Delta g^{n+3/5} = \tilde{A}^n \Delta g^{2/5}, \quad (24)$$

$$(\tilde{A}^n + A' + \tau^n \Omega_3^n) \Delta g^{n+4/5} = \tilde{A}^n \Delta g^{3/5},$$

$$(\tilde{A}^n + A' + \tau^n \Omega_4^n) \Delta g^{n+1} = (\tilde{A}^n + A') \Delta g^{4/5},$$

$$g^{n+1} = g^n + \Delta g^{n+1}.$$

Здесь  $n$  – номер временного слоя (итерация);  $\tau^n$  – шаг по времени (итерационный параметр); вектор  $g^n$  и матрица  $\tilde{A}^n$  – дискретные аналоги вектора основных переменных  $g$  (3) и матрицы  $\tilde{A}$  (13);  $\Delta g^{n+l/5}$ ,  $l = 1, \dots, 4$  – вспомогательные векторы, определяемые соотношениями

$$\Delta g = \|\Delta p', \Delta u, \Delta v, \Delta k, \Delta \epsilon, \Delta h, \Delta c_k\|^T,$$

а  $\Delta g^{n+1}$  – вектор невязок (приращений) основных переменных  $g$  на одной итерации. Стабилизирующие разностные операторы схемы (24)  $\Omega_l$  выполняют следующие функции. Оператор  $\Omega_0^n$  обеспечивает частично неявную аппроксимацию химических источников членов в уравнениях баланса массы отдельных компонентов смеси  $\dot{w}_{ks}$

$$\Omega_0^n \Delta g = \left\| 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{1}{\rho^n} \sum_{s=1}^{N_r} Da_{s_0} \left( \frac{\partial \dot{w}_{ks}}{\partial c_k} \right) \Delta c_k \right\|^T, \quad (25)$$

а операторы  $\Omega_l^n$ ,  $l = 1, \dots, 4$ , аппроксимирующие с первым порядком точности, соответствующие

дифференциальные операторы  $\Omega_l$  из (16) - (18) – частично неявную аппроксимацию всех невязких и вязких членов исходных уравнений за исключением членов со смешанными производными. Наконец, вектор  $W^n$  аппроксимирует со вторым порядком точности “квазиконсервативный” вектор  $W$  из (20). Что касается дискретизации пространственных производных в схеме (24), то она осуществляется точно так же, как в схеме [5, 6].

Таким образом, отличие схемы (24) от аналогичной схемы для расчета ламинарных режимов течения [5, 6] состоит лишь в наличии в (24) матрицы  $A'$ , обеспечивающей неявную аппроксимацию источников членов в уравнениях баланса кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации, что является весьма важным для сохранения высокой устойчивости метода при расчете рассматриваемых течений. Эта матрица получена в результате линеаризации источников членов в уравнениях переноса величин  $k$  и  $\epsilon$  относительно компонентов вектора приращений  $g$  и имеет следующий вид:

$$A' = \tau^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{kk} & A_{k\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{\epsilon k} & A_{\epsilon\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

где

$$A_{kk} = \left[ \frac{4}{3} \frac{\mu_t}{\rho k} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 + \frac{2\mu}{\rho d^2} \right]^n, \quad A_{k\epsilon} = 1,$$

$$A_{\epsilon k} = \left[ \frac{2}{3} C_1 \frac{\mu_t}{\rho k^2 / \epsilon} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \right]^n,$$

$$A_{\epsilon\epsilon} = \left[ 2 \frac{\epsilon}{k} C_2 f + \frac{2\mu \exp(-C_4 d^+)}{\rho d^2} \right]^n.$$

Отметим, что описанный способ аппроксимации источников членов в уравнениях  $k$ - $\epsilon$  модели (неявная аппроксимация только заведомо отрицательных составляющих этих членов) обеспечивает усиление диагонального преобладания в матрице коэффициентов системы конечно-разностных уравнений и, тем самым, повышение устойчивости схемы.

Что касается реализации схемы (24), то она осуществляется с помощью скалярных трехточечных прогонок и векторных прогонок для блочно-трехдиагональных матриц с размерностью блоков  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ . При этом уравнения  $k$ - $\epsilon$  модели решаются совместно с помощью векторной

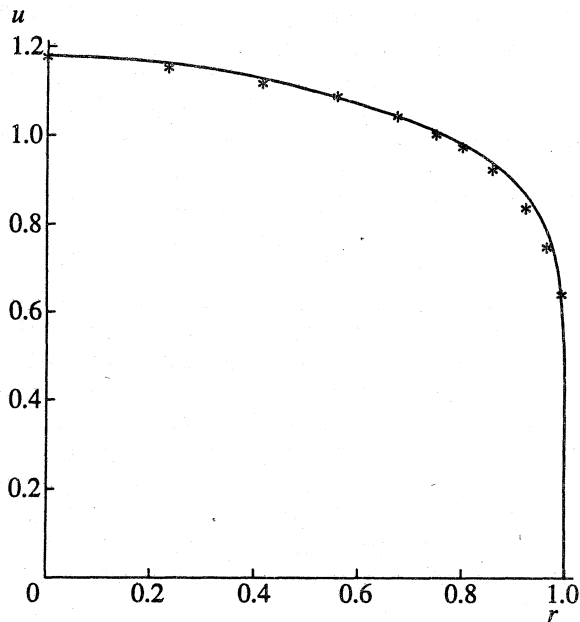


Рис. 1. Профиль продольной скорости в трубе при  $x = 57R$ : кривые — данная работа; точки — экспериментальные данные [9].

прогонки, что обеспечивает большую согласованность полей  $k$  и  $\varepsilon$  в процессе установления.

Одной из важных особенностей методов расчета пристенных турбулентных течений в рамках низкорейнольдсовых моделей турбулентности является необходимость использования неравномерных расчетных сеток с сильным сгущением узлов в пристенной области. Это связано с тем, что универсальная координата первого пристенного узла сетки  $Y_1^+$  не должна в этом случае превышать 1.5 - 2.0. Для выполнения данного условия при разумном общем числе узлов (порядка  $10^2$ ) шаги сетки должны изменяться в пределах расчетной области примерно на три порядка. В этих условиях возникают определенные трудности с выбором оптимального временного шага (релаксационного параметра)  $\tau$ , поскольку в случае, если он задается постоянным по пространству, значения локального числа Куранта, от которого сильно зависит скорость сходимости неявных схем приближенной факторизации, также изменяется в пределах расчетной области на несколько порядков.

После ряда численных экспериментов в данной работе был выбран следующий алгоритм определения релаксационного параметра  $\tau$ .

Во всех точках расчетной области, за исключением  $n$  ближайших к стенке узлов, этот параметр выбирается из условия постоянства числа Куранта, которое задается как один из основных схемных параметров. В ближайших же к стенке  $n$  узлах значение  $\tau$  полагается равным его величине

в  $(n + 1)$ -м от стенки узле соответствующего сечения канала. Такая процедура позволяет избежать чрезмерного уменьшения  $\tau$  в пристенной области, где шаг сетки очень мал, не нарушая при этом устойчивости схемы. Течение в этой области является параболическим и, следовательно, условие устойчивости, накладывающее ограничение на число Куранта, в ней может нарушаться. Таким образом, кроме числа Куранта при проведении расчетов должен задаваться еще один схемный параметр  $n$ , определяющий размеры пристенной области постоянного "временного шага". Очевидно, что по порядку величины  $n$  должно совпадать с числом узлов, лежащих в пределах пограничного слоя, так как именно в этой области преобладают параболические свойства исходных уравнений Навье-Стокса.

**Результаты расчетов.** Для оценки возможностей разработанного алгоритма с его помощью был проведен расчет ряда типичных турбулентных течений в каналах, для которых имеются экспериментальные или расчетные данные других авторов.

В качестве первого примера рассмотрим результаты расчетов изотермического течения несжимаемой (число Маха  $M_0 = 0$ ) жидкости в круглой трубе постоянного сечения.

При решении этой задачи на входе в трубу задавалось нулевое значение поперечной составляющей скорости и однородные профили продольной составляющей скорости, кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации, причем значения  $k$  и  $\varepsilon$  определялись следующим образом:

$$k = C_k^0 u_0^2, \quad \varepsilon = C_\varepsilon^0 \frac{k^{3/2}}{r}, \quad (27)$$

где  $r_w$  — радиус трубы, а  $C_k^0$  и  $C_\varepsilon^0$  — константы, значения которых определяют уровень турбулентности входного потока. Распределение давления на входе определялось путем линейной экстраполяции из внутренних точек расчетной области. В выходном сечении трубы задавалось постоянное значение давления, а все остальные величины также определялись путем линейной экстраполяции.

На стенках трубы ставились условия прилипания для скорости, давление определялось из уравнения переноса импульса в проекции на нормаль к стенке, а величины  $k$  и  $\varepsilon$  полагались равными нулю.

Наконец, на оси трубы ставились условия симметрии, т.е. полагались равными нулю нормальная к оси составляющая вектора скорости и производные от всех остальных переменных по нормали к оси.



Конкретные расчеты проводились для течения с числом Рейнольдса, построенным по параметрам на входе и радиусу трубы, равным  $1.9 \times 10^5$ , а значения коэффициентов  $C_k^0$  и  $C_\epsilon^0$  в (27) полагались равными 0.005 и 3.0 соответственно. При этом использовалась сетка с общим числом узлов  $N_x \times N_y = 120 \times 65$  и с сильным сгущением по поперечной координате (отношение максимального шага по  $y$  к минимальному составляло 350, а значение универсальной координаты первого пристенного узла 1.0 - 1.5).

Полученные результаты свидетельствуют о том, что используемая методика позволяет достаточно точно рассчитать не только осредненные параметры рассматриваемого течения (сопоставление профиля осредненной скорости в сечении, отстоящем от входа в трубу на расстояние, равное 57 радиусам, с экспериментальными данными [9], представлено на рис. 1), но и его пульсационные характеристики, в частности, поперечное распределение кинетической энергии турбулентности на установившемся участке течения, измерявшееся в экспериментах [10] (рис. 2). Отметим также, что для расчета профилей скорости в трубе может с успехом использоваться алгебраическая модель турбулентности Себеси-Смита.

Для оценки возможности использования разработанного алгоритма для расчета турбулентных течений с отрывом и присоединением потока и с обширными зонами рециркуляции с его помощью были выполнены расчеты изотермического течения несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным расширением, экспериментально исследовавшимся в [12]. При этом модель турбулентности [7] была несколько модифицирована с тем, чтобы учесть специфические особенности течений данного класса.

Во-первых, для учета демпфирующего влияния на течение в угловой области канала обеих (вертикальной и горизонтальной) стенок в данной работе вместо членов  $2\mu k/d^2$  и  $2\mu k \exp(-C_4 d^+) / d^2$  в (9) использовались суммы соответствующих слагаемых для каждой из стенок, т.е.

$$2\mu k \sum_i (1/d_i^2) \text{ и } 2\mu k \sum_i [\exp(-C_4 d_i^+) / d_i^2], \quad (28)$$

а вместо члена  $[1 - \exp(-C_3 d^+)]$  – произведение соответствующих сомножителей, т.е.

$$\prod_i [1 - \exp(-C_3 d_i^+)], \quad (29)$$

где  $d_i$  и  $d_i^+$  соответствуют  $i$ -й (1-й или 2-й) стенке.

Очевидно, что эта или подобные ей не вполне строгие модификации необходимы не только для модели [7], но и для всех других “нелокальных” (содержащих трение на стенке) моделей в случае,

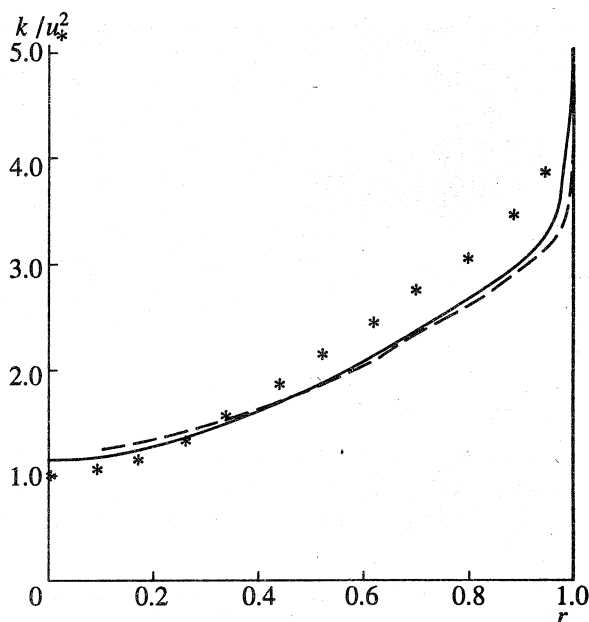


Рис. 2. Профиль кинетической энергии турбулентности в трубе при  $x = 160R$ : сплошная кривая – данная работа; штриховая кривая – расчет [11] (модель Лэма-Брэмхорста); точки – экспериментальные данные [10].

если в расчетах используются сетки, “необтекающие” угловые точки рассматриваемой области.

Вторая модификация модели [7] оказалась необходимой в силу того, что трение на стенке  $\tau_w$ , используемое для определения величины  $d^+$ , входящей в демпфирующие множители модели, принимает очень малые значения в угловой области канала и в окрестности точки присоединения потока к горизонтальной стенке. Вследствие этого значения  $d^+$  на соответствующих (исходящих из точек с низким трением) координатных линиях также оказываются очень малыми. Это приводит к неоправданно сильному подавлению процессов турбулентного переноса на значительных расстояниях от стенок канала и связано, очевидно, с тем, что трение на стенке не является определяющим параметром течения в указанных сечениях потока. Следует отметить, что упоминания о проблемах, связанных с определением  $d^+$  при расчете течений с зонами рециркуляции в рамках низкорейнольдсовых  $k$ - $\epsilon$  моделей турбулентности, содержатся в ряде работ (например, [12]), однако их авторы, к сожалению, не приводят деталей алгоритмов, используемых для преодоления описанных выше трудностей. В данной работе с этой целью используется следующий прием.

Основываясь на допущении о том, что в области действия логарифмического закона стенки ( $d^+ = 30 - 100$ ) выполняется соотношение

$$k = u_*^2 / C_\mu^{1/2}, \quad (30)$$

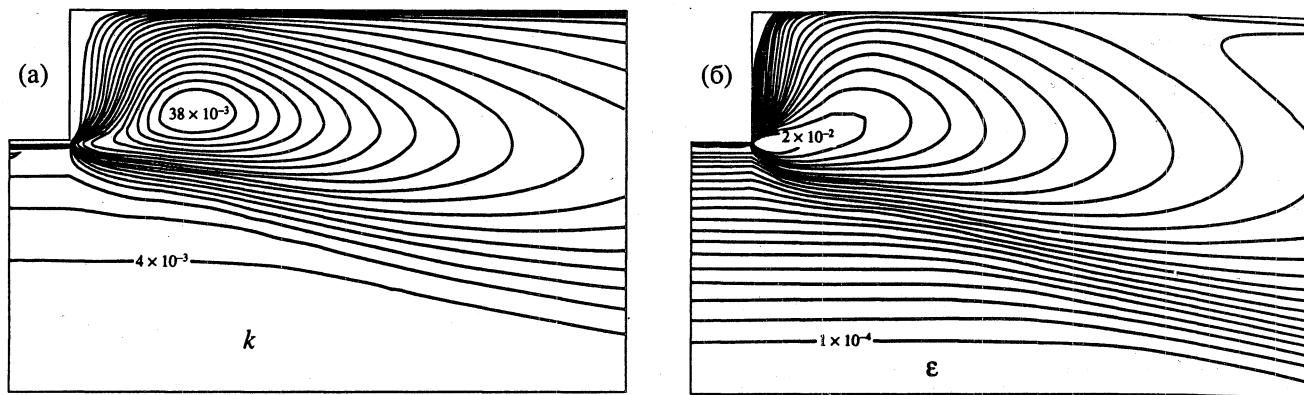


Рис. 3. Изолинии кинетической энергии турбулентности (а) и скорости ее диссипации (б) для течения в канале с внезапным расширением [12]; значения уровней  $k$  изменяются в пределах от  $4 \times 10^{-3}$  до  $38 \times 10^{-3}$  с шагом  $2 \times 10^{-3}$ , а значения уровней  $\epsilon$  – от  $1 \times 10^{-4}$  до  $199.52 \times 10^{-4}$  с постоянным шагом по  $\lg(\epsilon)$ , равным 0.1.

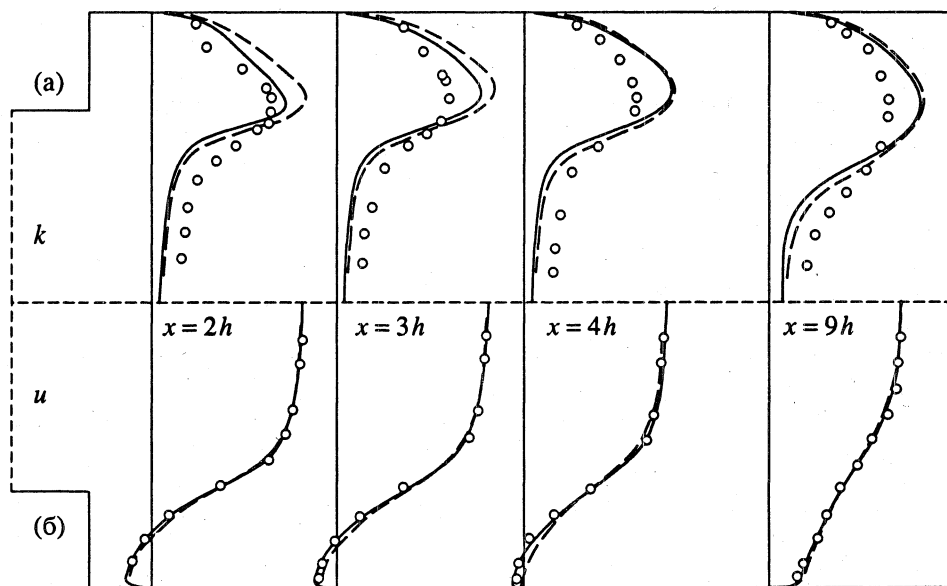


Рис. 4. Профили кинетической энергии турбулентности и продольной скорости в различных сечениях канала с внезапным расширением [12]: сплошные кривые – данная работа; штриховые – расчет [13]; точки – экспериментальные данные [12].

выразим  $u_*$  через  $k$  и подставим полученное выражение в формулу для величины  $d^+$  (9). В результате получим следующее соотношение, которое должно выполняться в логарифмической области:

$$d^+ = d C_\mu^{1/4} k^{1/2} / \nu. \quad (31)$$

Предлагаемый способ определения  $u_*$  базируется на соотношениях (30), (31) и состоит в следующем.

В узлах каждой сеточной линии с помощью формулы (31) вычисляется величина  $d^+$ . В той точке, в которой она достигает некоторого заданного значения  $d_{\max}^+$ , с помощью (30) определяется

значение  $u_*$ , которое и используется для определения  $d^+$  во всех остальных узлах рассматриваемой сеточной линии вместо значения, определяемого по стандартной формуле  $u_*^2 = \tau_w / \rho$ .

Что касается выбора величины  $d_{\max}^+$  то, как показали предварительные численные эксперименты, ее изменение в пределах от 30 до 60 практически не влияет на результаты расчетов, представленные на рис. 3, 4. В этих расчетах использовалась неравномерная сетка с общим числом узлов  $N_x \times N_y = 80 \times 70$  и сильным сгущением в окрестности вертикальных и горизонтальных стенок канала. Отношение максимального шага

сетки к минимальному составляло 700, а универсальная координата первого пристенного узла изменялась в пределах от 0.3 в зоне рециркуляции до 1.3 вниз по потоку от точки присоединения. В соответствии с условиями эксперимента число Рейнольдса, определенное по скорости на входе в канал и полуширине его входного участка, полагалось равным 9142. Граничные условия во входном и выходном сечениях канала и на его стенке задавались так же, как и при расчете рассмотренного выше течения в трубе постоянного сечения.

Результаты расчетов, представленные на рис. 3, 4, позволяют заключить, что разработанная методика пригодна для описания не только простейших (течение в трубе постоянного сечения), но и достаточно сложных (с отрывом и присоединением потока) турбулентных течений несжимаемой жидкости в каналах.

Для оценки возможностей этой методики при расчете сжимаемых течений была рассмотрена задача о течении воздуха в осесимметричном сопле Лавала, экспериментально исследованном в [14].

В качестве граничных условий на входе в сопло задавались давление и температура торможения потока. Распределение продольной составляющей скорости во входном сечении определялось с помощью линейной экстраполяции по ее значениям во внутренних точках, а значения  $k$  и  $\epsilon$  вычислялись через полученное значение скорости в каждой точке входной границы с помощью формул (27). При этом значение коэффициента  $C_k^0$  изменялось в диапазоне 0.0005 - 0.01 (в экспериментах [14] степень турбулентности потока на входе в сопле измерялась), а значение коэффициента  $C_\epsilon^0$  полагалось равным 5.0. Значения всех параметров на выходе из сопла определялись путем линейной экстраполяции.

На стенках сопла использовались те же условия, что и при расчете течений несжимаемой жидкости для скорости и характеристик турбулентности и условие адиабатичности – для температуры.

Расчеты проводились на сетке с 60 узлами в продольном направлении и с 65 – в поперечном. В продольном направлении она имела некоторое сгущение на входе в сопло и в области критического сечения, а в поперечном сильно сгущалась к стенке (рис. 5).

Как показали расчеты, поля осредненных газодинамических параметров потока в сопле (скорость, давление и т.п.) при рассматриваемых условиях практически не зависят от уровня турбулентности на входе в сопло (от величины параметра  $C_k^0$ ) и во всех случаях удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными (рис. 6). Слабая чувствительность этих параметров к изменению  $C_k^0$  связана с тем, что число

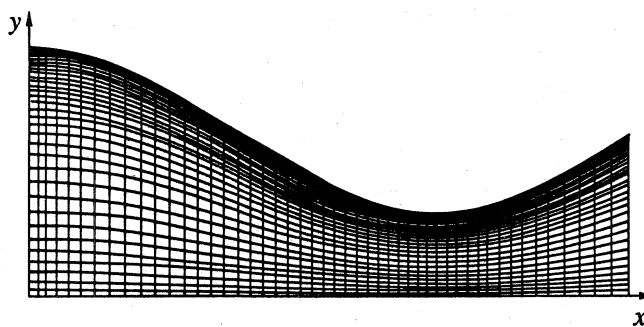


Рис. 5. Схема сопла [14] и расчетная сетка, используемая в данной работе.

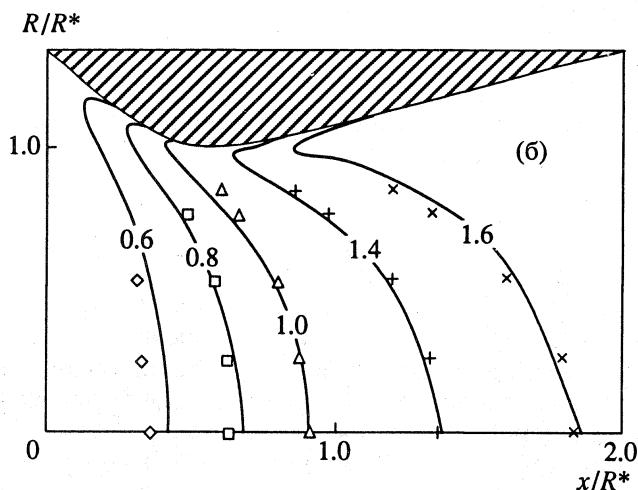
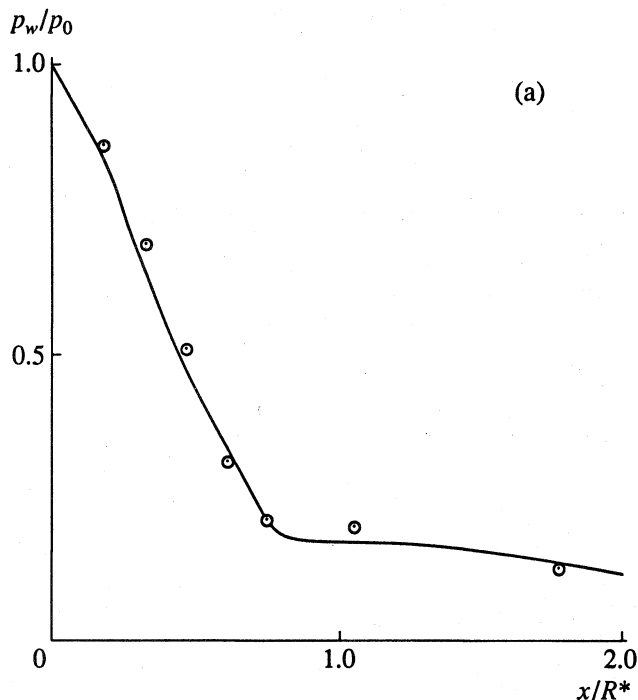


Рис. 6. Распределение давления вдоль стенки сопла (а) и изолинии числа Маха (б): кривые – данная работа; точки – эксперимент [14].

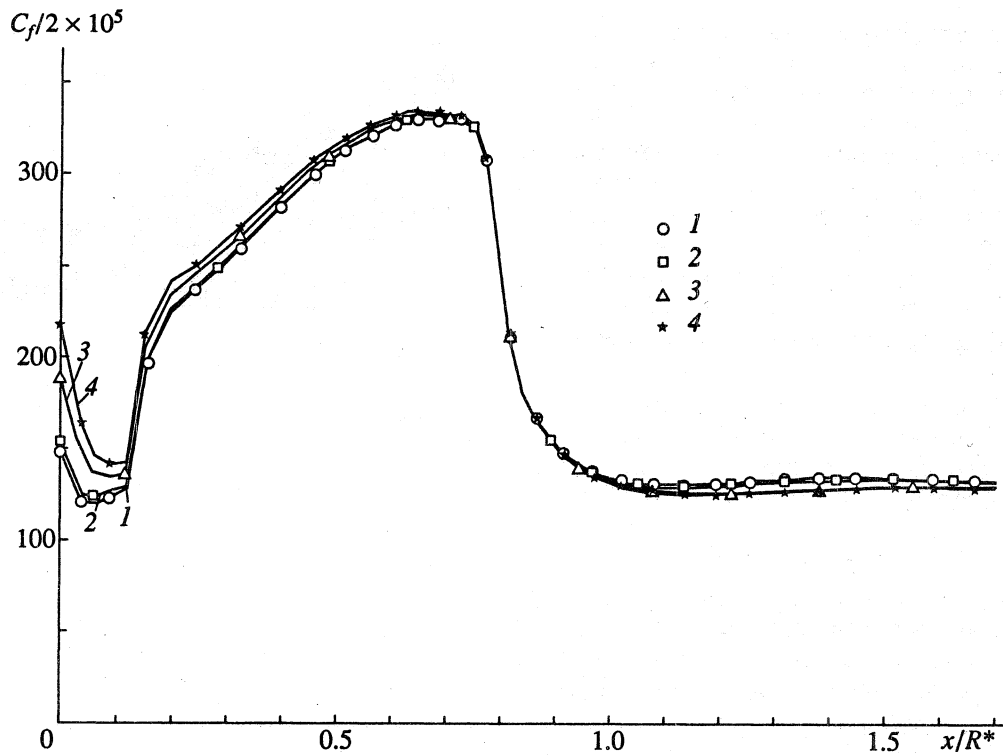


Рис. 7. Распределение коэффициента трения вдоль стенок сопла при различных степенях турбулентности на входе: 1 –  $C_k^0 = 0.0005$ , 2 – 0.0010, 3 – 0.0050, 4 – 0.0100. (Кривые проведены по расчетным точкам.)

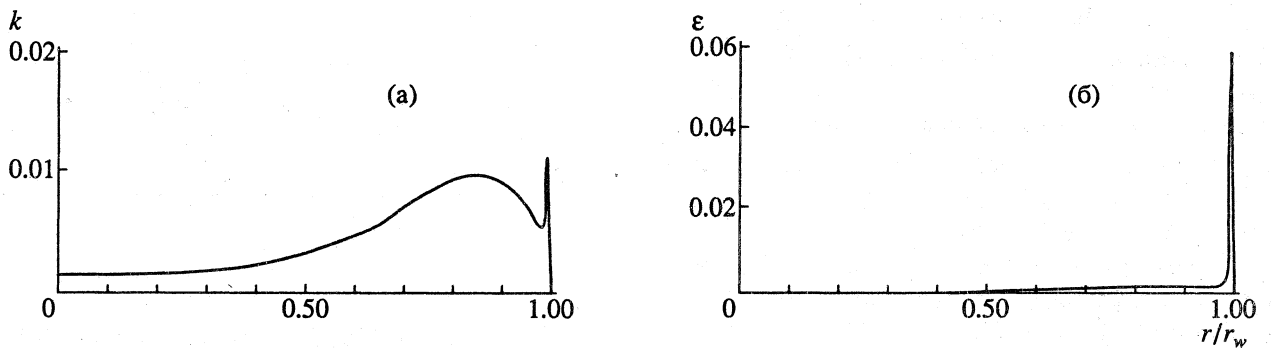


Рис. 8. Профили кинетической энергии турбулентности (а) и скорости ее диссипации (б) в сечении сопла  $x = 1.41r^*$  при  $C_k^0 = 0.0005$ .

Рейнольдса, построенное по радиусу критического сечения сопла, скорости звука и вязкости, определенных при температуре торможения потока, равно для рассматриваемого течения  $10^5$ , т.е. достаточно велико. Поэтому газодинамические характеристики потока определяются, главным образом, невязкими эффектами, что полностью согласуется с результатами численного исследования [14], в котором течение в том же сопле рассчитывалось на основе уравнений Эйлера.

Что касается распределения трения вдоль стенок сопла, то оно также слабо зависит от уровня турбулентности потока на входе (рис. 7), так как определяется, главным образом, процессами генерации турбулентности в пристенной области течения, которые протекают достаточно интенсивно даже при самом низком из рассмотренных уровней турбулентности на входе (рис. 8).

Последняя из рассмотренных в данной работе задач связана с процессами сверхзвукового горе-

ния и иллюстрирует возможности разработанного алгоритма при моделировании сжимаемых течений с неравновесными химическими реакциями.

Схема течения, для которого проводились расчеты, представлена на рис. 9. На вход в камеру сгорания, представляющую собой плоский диффузор, подается сверхзвуковая струя (число Маха равно 2.44), содержащая смесь кислорода ( $C_{O_2} = 0.258$ ), азота ( $C_{N_2} = 0.486$ ) и воды ( $C_{H_2O} = 0.256$ ) при температуре 1270 К, и звуковая струя водорода при температуре 254 К. Давление в обеих струях равно  $10^5$  Па, а температура стенок камеры – 298 К.

Для описания процессов горения кислородо-водородной смеси использовалась кинетическая модель [15], включающая девять реакций между семью компонентами (H, O, OH, H<sub>2</sub>O, H<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>).

Расчеты проводились на неравномерной (с сильным сгущением у стенок) сетке с числом узлов  $60 \times 82$ . В качестве граничных условий на входной границе задавались значения всех параметров потока, а на выходной – использовались мягкие граничные условия (линейная экстраполяция из внутренних точек области) для всех переменных. На стенках канала, которые предполагались абсолютно некаталитическими, использовались условия равенства нулю диффузионных потоков всех компонентов, условие прилипания для скорости и условие первого рода для температуры. Как и во всех предыдущих случаях, значения  $k$  и  $\epsilon$  на стенках полагались равными нулю, а давление определялось из уравнения переноса импульса в проекции на нормаль к стенке.

Сопоставление результатов расчетов с заимствованными из [16] экспериментальными данными по профилям температуры и концентрациям отдельных компонентов смеси представлено на рис. 10 и 11. Как видно из этих рисунков, и в этом случае удалось получить удовлетворительное соответствие расчета и эксперимента, особенно по профилю температуры на выходе из камеры сгорания (рис. 11). Следует также отметить, что результаты, полученные в данной работе, заметно лучше согласуются с экспериментальными данными, чем результаты расчетов [16], полученные в рамках параболизированных уравнений Навье–Стокса.

Таким образом, проведенные численные исследования позволяют заключить, что предложенный в данной работе на основе обобщения метода масштабирования сжимаемости алгоритм расчета турбулентных течений в каналах в рамках полных уравнений Навье–Стокса в сочетании с низкорейнольдсовыми моделями турбулентности обеспечивает возможность достаточно надежного описания основных параметров течений рассматриваемого класса при изменении характерных чисел

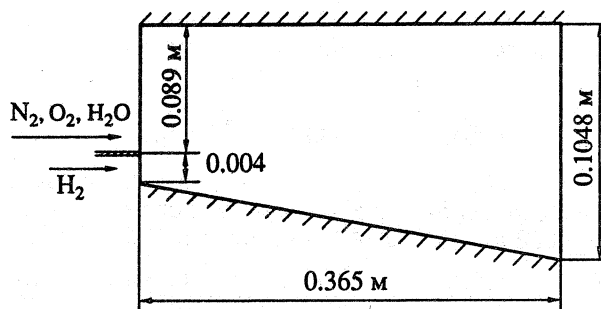


Рис. 9. Схема камеры сгорания.

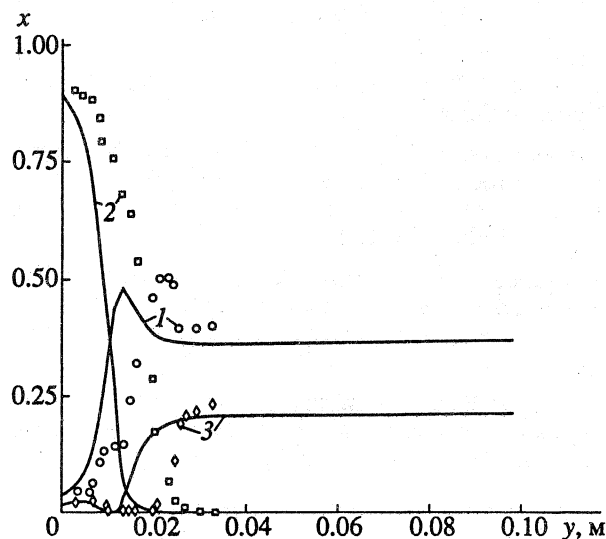


Рис. 10. Профили мольных концентраций компонентов в выходном сечении камеры сгорания: 1 – H<sub>2</sub>O, 2 – H<sub>2</sub>, 3 – O<sub>2</sub> – данная работа; точки – экспериментальные данные из [17].

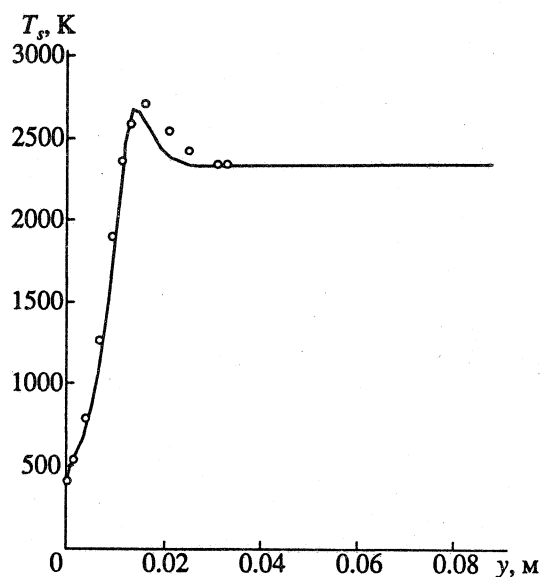


Рис. 11. Профиль температуры торможения в выходном сечении камеры сгорания: кривая – данная работа; точки – экспериментальные данные из [17].

Маха потока от нуля (несжимаемая жидкость) до значений, существенно больших единицы.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Briley W.R., McDonald H., Shamroth S.J.* A low Mach number Euler formulation and application to time-iterative LBI schemes // *AIAA Journal*. 1983. V. 21. P. 1467.
2. *Choi D., Merkle C.L.* Application of time-iterative schemes to incompressible flow // *AIAA Journal*. 1985. V. 23. P. 1518.
3. *Turkel E.* Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations // *J. Comput. Phys.* 1987. V. 72. P. 277.
4. *Turkel E.* Review of preconditioning methods for fluid dynamics // *ICASE Report № 92-47*, NASA Langley Research Center, 1992.
5. *Стрелец М.Х., Шур М.Л.* Метод масштабирования сжимаемости для расчета стационарных течений вязкого газа при произвольных числах Маха // *ЖВМ и МФ*. 1988. Т. 28. № 2. С. 254.
6. *Кузнецов А.Е., Стрелец М.Х., Шур М.Л.* Расчет стационарных трехмерных течений вязких газов и химически реагирующих газовых смесей // *ЖВМ и МФ*. 1991. Т. 31. № 2. С. 300.
7. *Chien J.Y.* Prediction of channel boundary-layer flows with a low-reynolds-number turbulence model // *AIAA Journal*. 1982. V. 20. № 1. P. 33.
8. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Метод расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981.
9. *Barbin A.J., Jones J.B.* Turbulent Flow in the Inlet Region of a Smooth Pipe // *ASME Journal of Basic Engng.* 1963. № 3. P. 29.
10. *Lawn C.J.* Rate of dissipation in turbulent pipe flow // *J. Fluid Mech.* 1971. V. 48. P. 477.
11. *Martinuzzi R., Pollard A.* Comparative study of turbulence models in predicting turbulent pipe flow. Part 1. Algebraic Stress and  $k-\epsilon$  models // *AIAA Journal*. 1989. V. 27. № 1. P. 29.
12. *Nakagawa H., Nezu.* Experimental investigation on turbulent structure of backward facing step flow in open channel // *Journal of Hydraulic Research*. 1987. V. 25. № 1. P. 67.
13. *Martelli F., Michelassi V.* An implicit factored solver for inner turbulent flows // *AIAA Paper*. 1988. 88 - 3099.
14. *Cuffel R.F., Back L.H., Massier P.F.* Transonic flowfield in a supersonic nozzle with small throat radius of curvature // *AIAA Journal*. 1969. № 7. P. 1364.
15. *Oran E.S., Boris J.P.* Weak and strong ignition: II. sensitivity of the hydrogen-oxygen system // *Combustion and Flame*. 1982. V. 48. P. 149.
16. *Wadawadigi G., Tannehill J.C., Buelow Ph.E., Lawrence S.L.* A three-dimensional upwind PNS code for chemically scramjet flowfields // *AIAA Paper*. 1992. 92 - 2898.