Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

П. Картье, Введение в теорию многопараметрического броуновского движения,
Математика, 1974, том 18, выпуск 2, 162–175

https://www.mathnet.ru/mat721

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
14 декабря 2025 г., 07:43:11

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ [1])

П. Картье

Цель этой статьи — дать изложение сравнительно простых результатов, полученных для случайных функций от многих переменных, введенных П. Леви под названием «многопараметрического броуновского движения». Наиболее новым при этом является тот случай, когда число параметров бесконечно. Кроме этого, в статье разрешается противоречие между результатами П. Леви [2] и Маккина [1] в пользу результатов последнего.

1. Гауссовские случайные величины

Будем предполагать фиксированным некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, и все случайные величины рассматриваются на этом пространстве.

Пусть $\sigma > 0$ и g_σ — вероятностная мера на R, определенная следующим образом:

a) мера g_0 есть единичная масса в точке 0,

b) для $\sigma > 0$ мера g_σ имеет плотность $(2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}$ по отношению к лебеговской мере на R^1.

Для каждого из этих случаев преобразование Фурье меры g_σ задается формулой

$$\int e^{iux} g_\sigma(dx) = e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \quad (u \in R^1). \tag{1}$$

Этой формулой мера g_σ определяется однозначно, поэтому ее можно положить в основу определения меры g_σ.

Говорят, что (действительная) случайная величина X является гауссовской с нулевым средним и квадратичным отклонением σ (для краткости пишут $X \sim N(0, \sigma)$, если ее распределение вероятностей задается мерой g_σ, или, что то же самое,

$$Ee^{iux} = e^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}} \quad (u \in R^1). \tag{2}$$

В частности, $EX = 0$ и $EX^2 = \sigma^2$. Поэтому σ является нормой X в гильбертовом пространстве $L^2 = L^2(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Для всех $p \geqslant 1$ положим $C(p) = \pi^{-1/2} 2^{p/2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)$, где $\Gamma(s)$ — есть гамма-функция Эйлера, $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$, $s > 0$. Простой под-

---

[1]) Cartier P., Introduction à l'étude des mouvements browniens à plusieurs paramètres, Séminaire de Probabilités V, Lecture Notes in Mathematics, v. 191, Springer — Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1971.

счет показывает, что если $X \sim N(0, \sigma)$, то $E[|X|^p] = C_p \sigma^p$. Следовательно, случайная величина X принадлежит $L^p = L^p(\Omega, \mathscr{F}, P)$ и $\|X\|_p = C_p^{1/p} \|X\|_2$.

Лемма 1. *Случайная величина $X \in L^2$, являющаяся пределом (в L^2) гауссовской последовательности случайных величин X_n, $n = 1, 2, \ldots$, также является гауссовской.*

Доказательство. Обозначим $\sigma_n = \|X_n\|_2$, $\sigma = \|X\|_2$. Тогда $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости

$$Ee^{iuX} = \lim_{n\to\infty} Ee^{iuX_n}, \quad u \in R^1.$$

Но

$$Ee^{iuX_n} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma_n^2 u^2\right), \quad \sigma = \lim_{u\to\infty} \sigma_n.$$

Поэтому

$$Ee^{iuX} = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2\right),$$

что и доказывает гауссовость случайной величины X.

Лемма 2. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайные величины. Для всякого вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$ положим $X(u) = u_1 X_1 + \ldots + u_n X_n$, $u \in R^n$.*

a) *Если $X_1, \ldots, X_n$ есть последовательность независимых гауссовских величин, то $X(u)$ является также гауссовской;*

b) *Обратно, пусть $X(u)$ является гауссовской величиной для любого вектора $u \in R^n$ и $EX_iX_j = 0$ для $i \neq j$. Тогда $X_1, \ldots, X_n$ есть последовательность независимых гауссовских случайных величин.*

Доказательство. a) Пусть $X_j \sim N(0, \sigma_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда для всех $t \in R^1$

$$Ee^{itX(u)} = E\left\{\prod_{j=1}^n e^{itu_jX_j}\right\} = \prod_{j=1}^n Ee^{itu_jX_j} = \prod_{j=1}^n e^{-t^2u_j^2\frac{\sigma_j^2}{2}} = e^{-t^2\frac{\sigma^2}{2}},$$

где $\sigma^2 = u_1^2\sigma_1^2 + \ldots + u_n^2\sigma_n^2$. Поэтому $X \sim N(0, \sigma)$.

b) Поскольку $X_j = X(u^j)$, где $u^j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{j-1}, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-j})$, то каждая из величин $X_1, \ldots, X_n$ является гауссовской. Обозначим $\sigma_j = (EX_j^2)^{1/2}$. В силу предположения об ортогональности, $EX_jX_i = 0$, $i \neq j$, $EX^2(u) = u_1^2\sigma_1^2 + \ldots + u_n^2\sigma_n^2$ и поскольку величина $X(u)$ является гауссовской, то

$$Ee^{iX(u)} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(u_1^2\sigma_1^2 + \ldots + u_n^2\sigma_n^2\right)\right\} = \prod_{j=1}^n Ee^{iu_jX_j},$$

что доказывает независимость величин $(X_1, \ldots, X_n)$.

2. Ковариации

Для каждого гильбертова пространства обозначим $(a|b)$ скалярное произведение векторов a и b и $\|a\|$ норму вектора a.

Лемма 3. *Пусть T — некоторое множество и $C=C(t, t')$ — действительная функция, заданная на $T\times T$. Следующие условия эквивалентны:*

a) *Существует отображение $f=f(t)$ множества T в действительное гильбертово пространство $\mathscr{H}$, такое, что $C(t, t')=(f(t)|f(t'))$ для всех $t, t'\in T$.*

b) *$C(t, t')=C(t', t)$, $t, t'\in T$ и каковы бы ни были $t_1, \ldots, t_n$ и числа $u_1, \ldots, u_n$*

$$\sum_{i,j=1}^{n} C(t_i, t_j)u_iu_j \geqslant 0;$$

c) *Существует (счетное) семейство (f_i), $i\in I$, действительных функций на T, таких, что $\sum_{i\in I} f_i^2(t)<\infty$ для всех $t\in T$ и $C(t, t')=\sum_{i\in I} f_i(t)\cdot f_i(t')$, $t, t'\in T$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H}$ — действительное гильбертово пространство и $(e_i)_{i\in I}$ ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Формула $f(t)=\sum_{i\in I} f_i(t)e_i$ $(t\in T)$ определяет взаимно однозначное соответствие между отображением f (множества T в $\mathscr{H}$) и семейством действительных функций $(f_i)_{i\in T}$, таких, что $\sum_{i\in T} f_i^2(t)<\infty$ для всех $t\in T$. Откуда

$$(f(t)|f(t'))=\sum_{i\in I} f_i(t)f_i(t') \quad (t, t'\in T), \tag{3}$$

что доказывает эквивалентность утверждений a) и c).

Далее, используя a), получаем

$$\sum_{i,j=1}^{n} C(t_i, t_j)u_iu_j=\left\|\sum_{i=1}^{n} u_i f_i(t_i)\right\|^2. \tag{4}$$

Поэтому из a) следует b).

Пусть, наконец, выполнено b). Рассмотрим действительное векторное пространство V с базисом $(v_t)_{t\in T}$. Функция C на $T\times T$ определяет симметрическую билинейную форму B на $V\times V$: $B(v_t, v_{t'})=C(t, t')$. Каждый элемент v из V записывается в виде $v=\sum_{i=1}^{n} u_iv_{t_i}$, с разными $t_1, \ldots, t_n$ из T и действительными $u_1, \ldots, u_n$. Тогда

$$B(v, v)=\sum_{i,j=1}^{n} C(t_i, t_j)u_iu_j \geqslant 0. \tag{5}$$

Хорошо известно, что множество N элементов $v\in V$, таких, что $B(v, v)=0$, есть векторное подпространство V. Обозначая π каноническое отображение V на $\mathscr{H}_0=V/N$, построим билинейную симметрическую форму $(.|.)$ на $\mathscr{H}_0$, такую, что $B(v, v')=(\pi(v)|\pi(v))$, где

$v, v' \in V$. Тогда $(x|x) > 0$ для $x \neq 0$ в $\mathscr{H}_0$ и, следовательно, можно дополнить $\mathscr{H}_0$ до гильбертова пространства $\mathscr{H}$.

Достаточно теперь положить $f(t) = \pi(v_0)$. Это отображение удовлетворяет соотношению $C(t, t') = (f(t)|f(t'))$, что и доказывает лемму.

Функция C, заданная на $T \times T$ и удовлетворяющая одному из эквивалентных условий леммы 3, называется ковариацией (на T). Из свойства b) видно, что сумма двух ковариаций и произведение ковариации на положительное число также являются ковариациями. Свойство c) показывает, что произведение двух ковариаций есть ковариация.

Лемма 4. *Пусть T есть некоторое множество и d — действительная положительная функция, заданная на $T \times T$. Предположим, что $d(t, t) = 0$ и $d(t, t) = d(t', t)$ для всех $t, t' \in T$.*

Следующие условия эквивалентны:

a) *Существует отображение g множества T в гильбертово пространство $\mathscr{H}$, такое, что*

$$d(t, t') = \|g(t) - g(t')\| \text{ для всех } t, t' \in T.$$

b) *Каковы бы ни были $t_1, \ldots, t_n \in T$ и действительные числа $u_1, \ldots, u_n$, $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$, имеет место неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{n} d^2(t_i, t_j) u_i u_j \leqslant 0.$$

c) *Для всякого действительного числа $s > 0$ функция e^{-sd^2}, заданная на $T \times T$, есть ковариация.*

Доказательство. Пусть выполнено a). Определим ковариацию C на T как $C(t, t') = (g(t)|g(t'))$. Из свойств ковариаций получаем, что функция $e^{sC} = \sum_{n=0}^{\infty} s^n C^n n!$, заданная на $T \times T$, есть ковариация для всех $s > 0$. Если $t_1, \ldots, t_n \in T$ и $u_1, \ldots, u_n \in R$, то

$$\sum_{i,j=1}^{n} [\exp(-sd^2(t_i, t_j))] u_i u_j = \sum_{i,j=1}^{n} [\exp 2sC(t_i, t_j)] v_i v_j \geqslant 0, \quad (6)$$

поскольку e^{2sC} есть ковариация (здесь $v_i = u_i \exp(-s\|g(t_i)\|^2)$. Следовательно, e^{-sd^2} есть ковариация и из a) следует c).

Пусть выполнено c). Выберем элементы $t_1, \ldots, t_n \in T$ и числа $u_1, \ldots, u_n \in R^n$, $\sum_{i=1}^{n} u_i = 0$, и определим функцию действительного переменного

$$\varphi(s) = \sum_{i,j=1}^{n} [\exp(-sd^2(t_i, t_j)] u_i u_j. \quad (7)$$

Так как $\varphi(s) \geqslant 0$ для $s > 0$,

$$\varphi(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right) = 0$$

и

$$\varphi'(0) = \sum_{i,j=1}^{n} -d^2(t_i, t_j) u_i u_j$$

и так как $\varphi'(0)=\lim\limits_{s\to 0}[\varphi(s)-\varphi(0)]/s$, то $\varphi'(0)\geqslant 0$.

Значит, из c) следует b).

Пусть теперь выполнено b). Выбрав нулевой элемент 0 из T, положим $T_1=T-\{0\}$ и

$$C(t,t')=\frac{1}{2}[d^2(0,t)+d^2(0,t')-d^2(t,t')] \text{ для } t,t'\in T.$$

Пусть $t_1,\ldots,t_n$ — элементы из T_1 и $u_1,\ldots,u_n\in R^n$. Положим $t_0=0$ и $u_0=-(u_1+\ldots+u_n)$, тогда простой подсчет дает

$$2\sum_{i,j=1}^{n} C(t_i,t_j)u_i,u_j=-\sum_{i,j=1}^{n} d^2(t_i,t_j)u_iu_j. \tag{8}$$

Отсюда, используя определение d, получаем, что C есть ковариация на T_1. Мы можем, следовательно, найти гильбертово пространство $\mathscr{H}$ и отображение g_1 множества T_1 в $\mathscr{H}$, удовлетворяющее условию $C(t,t')=(g_1(t)\,|\,g_1(t'))$ для t, t' в T_1, т. е.

$$d^2(t,t')=d^2(0,t)+d^2(0,t')-2(g_1(t)\,|\,g_1(t')) \text{ для } t,t'\in T. \tag{9}$$

Продолжая g_1 в отображение g множества T в $\mathscr{H}$ (полагая $g(0)=0$), получим простым подсчетом искомое соотношение

$$d(t,t')=\|g(t)-g(t')\| \quad (t,t'\in T).$$

Следовательно, из b) вытекает a).

3. Гауссовские пространства и гауссовские случайные функции

Назовем гауссовским пространством всякое векторное подпространство $\mathscr{H}$ в L^2, элементами которого являются гауссовские величины. Тогда, если $X\in\mathscr{H}$, то

$$Ee^{iX}=\exp\left\{-\frac{1}{2}EX^2\right\}. \tag{10}$$

Обратно, если $\mathscr{H}$ — векторное подпространство L^2, удовлетворяющее (10), то оно является гауссовским, что следует из замены X на uX в (10) ($u\in R^1$).

Следующая теорема описывает свойства гауссовских пространств.

Теорема 1. a) *Замыкание (в L^2) гауссовского пространства является также гауссовским.*

b) *Пусть элементы $X_1,\ldots,X_n$ попарно ортогональны в гауссовском пространстве. Тогда последовательность $(X_1,\ldots,X_n)$ независима.*

c) *Пусть $(X_i)_{i\in I}$ — семейство независимых гауссовских величин. Замкнутое векторное подпространство в L^2, заданное этим семейством, есть гауссовское.*

d) *Пусть $\mathscr{K}$ — некоторое гильбертово пространство. Существует изоморфизм $\mathscr{K}$ на гауссовское пространство $\mathscr{H}$, определенный на подходящем вероятностном пространстве.*

Утверждения a), b) и c) вытекают непосредственно из лемм 1 и 2 п. 1.

Чтобы доказать d), введем ортонормированный базис $(e_i)_{i\in I}$ в $\mathscr{K}$. Пусть для всякого $i\in I$ Ω_i есть множество действительных чисел, $\mathscr{F}_i$ — σ-алгебра на Ω_i и $P_i=g_1$. Обозначим $(\Omega,\mathscr{F},P)$ вероятностное простран-

ство, являющееся прямым произведением пространств $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$, и X_i отображение индекса i в Ω. Тогда $(X_i)_{i\in I}$ есть семейство независимых гауссовских величин и $EX_i^2=1$,

$$E[X_iX_j]=EX_i\cdot EX_j=0 \text{ для } i\neq j.$$

Из c) следует, что семейство $(X_i)_{i\in I}$ образует ортонормированный базис в гауссовском пространстве $\mathcal{H}$ и, следовательно, существует изоморфизм $\mathcal{K}$ на $\mathcal{H}$, отображающий e_i на X_i для любого $i\in I$.

Случайной гауссовской функцией, заданной на множестве T, называется семейство $X=(X(t))_{t\in T}$ случайных величин, такое, что всякая конечная линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} u_iX(t_i)$

$$(t_1, \ldots, t_n\in T, \quad u_1, \ldots, u_n\in R^n)$$

является гауссовской величиной. Заметим, что все $X(t)$ принадлежат к одному и тому же гауссовскому пространству. Если для $t, t'\in T$ обозначить через $C_X(t, t')$ скалярное произведение $E[X(t)X(t')]$ в гильбертовом пространстве L^2, то C_X будет ковариацией на T, которую называют ковариацией случайной гауссовской функции X. Если $t_1, \ldots, t_n\in T$ и $u_1, \ldots, u_n\in R^n$, то из (4) и (10) вытекает, что

$$E\left[\exp i\sum_{j=1}^{n}u_jX(t_j)\right]=\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}C_X(t_j,t_k)u_ju_k\right\}. \tag{11}$$

Следовательно, ковариацией C_X определяется закон распределения случайной функции X.

Пусть C — ковариация на множестве T, тогда существует гауссовская случайная функция X на T, такая, что $C=C_X$. Действительно, если существует отображение f множества T в гильбертово пространство $\mathcal{K}$, такое, что $C(t, t')=(f(t)\mid f(t'))$ для $t, t'\in T$ (лемма 3, a) и изоморфизм π пространства $\mathcal{K}'$ на гауссовское пространство $\mathcal{H}$, то достаточно положить $X(t)=\pi(f(t))$ для $t\in T$.

4. Броуновское движение и белый шум

Согласно классическому определению (Эйнштейн — Смолуховский), броуновское движение есть случайная функция $W=W(t)$, $t\geqslant 0$, такая, что

a) $W(0)=0$;

b) для $t<t'$ случайная величина $W(t')-W(t)$ есть гауссовская с нулевым средним и квадратичным отклонением $|t-t'|^{1/2}$;

c) для $t_0<t_1<\ldots<t_n$ последовательность случайных величин $W(t_i)-W(t_{i-1})$, $1\leqslant i\leqslant n$, независима.

Пусть $\mathcal{E}$ — векторное пространство действительных ступенчатых функций на R, и пусть f—функция из $\mathcal{E}$. Существуют числа $t_0, t_1, \ldots, t_n$ и $u_1, \ldots, u_n$, такие, что $t_0<t_1<\cdots<t_n$ и $f(t)=u_i$, если $t_{i-1}<u\leqslant t_i$, причем $f(t)=0$, если $t\leqslant t_0$ или $t>t_n$. Полагая

$$J_0(f)=\sum_{i=1}^{n}u_i(W(t_i)-W(t_{i-1})), \tag{12}$$

получаем отображение J_0 пространства E в L^2. Из леммы 2,a) и пункта c) настоящего параграфа вытекает, что случайная величина $J_0(f)$ есть гауссовская и

$$E[J_0^2(f)]=\sum_{i=1}^{n}u_i^2|t_i-t_{i-1}|=\int f^2(t)\,dt. \tag{13}$$

Поскольку $\mathscr{E}$ плотно в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}=L^2(R, dt)$, то отображение J_0 продолжается единственным образом в изоморфизм гильбертова пространства $\mathscr{H}$ на гауссовское пространство случайных величин (теорема 1, а). Для $f \in \mathscr{H}$ вместо $J(f)$ пишут $\int f(t)dw(t)$ (стохастический интеграл Винера).

Для любого действительного t определим функцию

$$f_t(x)=\begin{cases} 1, \text{ если } t \geqslant 0, & 0<x\leqslant t, \\ -1, \text{ если } t\leqslant 0, & t<x\leqslant 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях.} \end{cases} \tag{14}$$

Параметризованная кривая $\Gamma=(f_t)_{t\in R}$ в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ обладает следующими свойствами:

a′) $f_0=0$,

b′) $\|f_t-f_{t'}\|=|t-t'|^{1/2}$,

c′) если $t<u<v<w$, то элементы f_u-f_t $f_w-f_v\in\mathscr{H}$ ортогональны.

Более наглядно условие c) означает, что если четыре точки A, B, C, D следуют друг за другом на кривой Γ, то хорды AB и CD ортогональны. Можно также сказать, что если за начало отсчета в $\mathscr{H}$ взята некоторая точка A кривой Γ, то обе части кривой Γ, разграниченной этой точкой, расположены в ортогональных пространствах. Вообще всякую кривую в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, обладающую перечисленными свойствами, называют спиралью.

Вернемся к процессу броуновского движения. Поскольку $W(t)=$ $=J(f_t)$, то W есть случайная гауссовская функция на R с ковариацией

$$C_W(t, t')=\frac{1}{2}E[W^2(t)+W^2(t)-W^2(t-t')]=$$

$$=\frac{1}{2}\{|t|+|t'|-|t-t'|\}. \tag{15}$$

Тогда для $t\leqslant t^1$

$$C_W(t,t')=C_W(t',t)=\begin{cases} t, \text{ если } 0\leqslant t, \\ 0, \text{ если } t\leqslant 0\leqslant t', \\ -t', \text{ если } t'\leqslant 0. \end{cases} \tag{16}$$

Для всякого борелевского множества $A\in R$ обозначим I_A его индикатор и $m(A)$ его лебеговскую меру. Если мера $m(A)$ конечна, то функция $I_A\in H=L^2(R, m)$ и величина $M(A)=J(I_A)$ определена. Имеют место следующие свойства:

a″) для всякого множества A случайная величина $M(A)$ есть гауссовская с нулевым средним и квадратичным отклонением $m^{1/2}(A)$.

b″) если $A_1,\ldots, A_n$ попарно непересекаются, то последовательность случайных величин $(M(A_1), \ldots, M(A_n))$ независима и

$$M(A_1\cup\ldots\cup A_n)=M(A_1)+\ldots+M(A_m).$$

Процесс

$$W(t)=\begin{cases} M([0,t]), & \text{если } t\geqslant 0, \\ -M([t,0]), & \text{если } t\leqslant 0, \end{cases} \tag{17}$$

является процессом броуновского движения. В общем случае пусть $(T, \mathscr{A}, m)$ — измеримое пространство. Тогда случайной гауссовской мерой на $(T, \mathscr{A})$ с дисперсией m называют отображение M множеств $A\in\mathscr{A}$, $m(A)<\infty$ в множество случайных величин, удовлетворяющих свойствам a″), b″). С точки зрения некоторых физических приложений рассматриваемых процессов такую случайную меру называют «белым

шумом». Как и выше, можно установить, что существует изоморфизм гильбертовых пространств пространства $L^2(T, \mathcal{A}, m)$ на гауссовское пространство, характеризуемый тем, что $J(I_A) = M(A)$. Величину $J(f)$ будем обозначать также $\int_T f(t)\, M(dt)$.

5. Процесс Леви

Теорема 2. *Пусть T — действительное гильбертово пространство. Существует случайная гауссовская функция X на T, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$X(0) = 0, \tag{18}$$

$$E[(X(t) - X(t'))^2] = \|t - t'\|. \tag{19}$$

Ее ковариация определяется равенством

$$C_X(t, t') = \frac{1}{2}\{\|t\| + \|t'\| - \|t - t'\|\}. \tag{20}$$

Доказательство. Формула (20) следует из (18) и (19). Так как всякое гильбертово пространство изоморфно некоторому гауссовскому пространству (теорема 1, d), то достаточно построить отображение f множества $\mathcal{T}$ в некоторое гильбертово пространство $\mathcal{H}$, которое удовлетворяет соотношениям $f(0) = 0$ и

$$\|f(t) - f(t')\| = \|t - t'\|^{1/2}. \tag{21}$$

Впрочем, можно и не предполагать условия $f(0) = 0$, поскольку (21) не зависит от значения $f(0)$.

Согласно лемме 4, существование такой функции f эквивалентно следующим неравенствам:

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} u_i u_j \|t_i - t_j\| \leqslant 0 \tag{22}$$

для $u_1, \ldots, u_n \in R^n$, $\sum_i u_i = 0$, $t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$.

Так как каждое из этих неравенств справедливо только для конечного числа векторов в $\mathcal{T}$, то мы приходим к случаю, когда $\mathcal{T}$ имеет конечную размерность $d \geqslant 1$. С учетом этого замечания пусть m есть нормированная мера Хаара на $\mathcal{T}$ и $\mathcal{H}$ — действительное гильбертово пространство комплексных функций, интегрируемых с квадратом на $\mathcal{T}$ (m), со скалярным произведением

$$(f \mid g) = \int_{\mathcal{T}} \operatorname{Re}\{\overline{f(x)}\, g(x)\, m(dx)\}.$$

Для всех $t \in \mathcal{T}$ формула

$$f_t(x) = \|x\|^{\frac{-(d+1)}{2}} (1 - e^{i(t/x)}) \tag{23}$$

определяет непрерывную функцию на $\mathcal{T} - \{0\}$. Из неравенства $1 - \cos a \leqslant a^2/2$ вытекает, что

$$|f_t(x)|^2 \leqslant \inf(\|x\|^2 \|x\|^{1-d}, 4\|x\|^{-1-d}). \tag{24}$$

Этого достаточно для доказательства того, что $f_t \in \mathscr{H}$. Положим

$$U(t) = \int_{\mathscr{T}} |f_t(x)|^2 m(dx) \quad \text{для} \quad t \in \mathscr{T}.$$

Отсюда вытекает, что $U(0)=0$, $U(\lambda, t) = \lambda U(t)$ для $\lambda > 0$ и что функция U на $\mathscr{T}$ инвариантна по отношению к автоморфизму $\mathscr{T}$. Следовательно, существует такая константа $C_d > 0$, что $U(t) = C_d^{-2} \|t\|$. Так как $|f_t - f_{t'}| = |f_{t-t'}|$, то отображение f множества $\mathscr{T}$ в $\mathscr{H}$, определенное формулой $f(t) = C_d f_t$, удовлетворяет (21).

Случайная функция, определенная в теореме 2, называется процессом Леви или многопараметрическим броуновским движением. При $\mathscr{T} = \mathscr{R}$ приходим к обычному броуновскому движению. Когда $\mathscr{T}$ имеет конечную размерность $d \geqslant 1$, предыдущее рассмотрение показывает, что X можно рассматривать как интеграл от белого шума M на $(\mathscr{T}, m)$:

$$X(t) = C_d \int_{\mathscr{T}} \|x\|^{-\frac{(d+1)}{2}} (1 - e^{i(t|x)}) M(dx).$$

Для $d=1$ получаем следующее выражение для обычного броуновского движения:

$$W(t) = (2\pi)^{-1/2} \int (1 - e^{ist}) |s| M(ds),$$

что по существу есть преобразование Фурье представления (17), данного выше.

Первым, кто показал, что функция C_X, определенная формулой (20), есть ковариация, был Л. Шварц. (Согласно легенде, в награду за это математическое открытие он получил руку дочери П. Леви.) Впрочем, П. Леви обобщил теорему 2, получив процессы, удовлетворяющие соотношению

$$E|X(t) - X(t')|^2 = \|t - t'\|^\alpha$$

(для $0 < \alpha \leqslant 2$). Случай $\alpha = 2$ тривиален (теорема 1, d). Из леммы 4 следует, что функция $C_{\alpha, s}(t, t') = e^{-s} \|t - t'\|^\alpha$ есть ковариация для $s > 0$ и $0 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

6. Марковские свойства процесса Леви

Из леммы 2 следует, что две гауссовские случайные величины, ортогональные в гауссовском пространстве, независимы. Это свойство влечет за собой ряд интересных соотношений независимости для гауссовских процессов. Чтобы их сформулировать, приведем некоторые вспомогательные результаты.

Пусть $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ — два векторных замкнутых подпространства в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, и пусть $P_i (i=1,2)$ — ортогональный проектор $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}_i$. Говорят, что $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ перестановочны, если $P_1 P_2 = P_2 P_1$.

Предположим, что $P_2(\mathscr{H}_1) \in \mathscr{H}_1$ и что всякий вектор из $\mathscr{H}_1$, ортогональный $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2$, ортогонален и $\mathscr{H}_2$. Пусть теперь $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ и $\mathscr{G}$ — подмножества $\mathscr{F}$. Говорят, что $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ условно независимы по отношению к $\mathscr{G}$, если

$$P[A_1 \cap A_2 | \mathscr{G}] = P[A_1 | \mathscr{G}] P[A_2 | \mathscr{G}] \tag{25}$$

для $A_1 \in \mathscr{F}_1$, $A_2 \in \mathscr{F}_2$.

Лемма 5. *Пусть $\mathscr{H}$ есть некоторое гауссовское пространство, а $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ — два векторных замкнутых подпространства в $\mathscr{H}$. Обозначим $\mathscr{F}_i$ σ-алгебру на $\mathscr{H}_i$ и $\mathscr{G}$ σ-алгебру на $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2$.*

a) *Для всякого $X \in \mathscr{H}$ $E[X \mid \mathscr{F}_1] \in \mathscr{H}_1$ и $X \mapsto E[X \mid \mathscr{F}_1]$ есть оператор ортогонального проектирования $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}_1$.*

b) *Чтобы σ-алгебры $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ были условно независимы по отношению к $\mathscr{G}$, необходимо и достаточно, чтобы подпространства $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ пространства $\mathscr{H}$ были перестановочны.*

Доказательство.

a) Если $X \in \mathscr{H}_1$, то $X = E[X \mid \mathscr{F}_1]$. Если X ортогонально $\mathscr{H}_1$, то X не зависит от $\mathscr{F}_1$, откуда $E[X \mid \mathscr{F}_1] = EX = 0$. Это доказывает a), если учесть линейность оператора условного математического ожидания.

b) Предположим сначала, что $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ перестановочны. Пусть $\mathscr{K}$ — множество векторов из $\mathscr{H}_1$, ортогональных $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2$. Из сделанных предположений следует, что $\mathscr{H}_1$ есть прямая сумма $\mathscr{K}$ и $\mathscr{H}_1 \cap \mathscr{H}_2$ и что $\mathscr{K}$ ортогонально $\mathscr{H}_2$. Обозначим $\mathscr{A}$ σ-алгебру $\mathscr{F}$ на $\mathscr{K}$ и $\mathscr{C}$ — класс множеств вида $\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap G_i)$ (непересекающихся) с $A_i \in \mathscr{A}$, $G_i \in \mathscr{G}$. Отсюда сразу же получим, что $\mathscr{C}$ есть булевская алгебра и что $\mathscr{F}_1$ есть σ-алгебра, порожденная $\mathscr{C}$.

Для доказательства того, что $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ условно независимы по отношению к $\mathscr{G}$, достаточно установить, что $P[A_1 | \mathscr{F}_2] \in \mathscr{G}$ для $A_1 \in \mathscr{F}_1$. Из сказанного выше и из свойств условных вероятностей следует, что этот факт достаточно доказать для множеств A_1 вида $A \cap G$, где $A \in \mathscr{A}$ и $G \in \mathscr{G}$. Так как $\mathscr{K}$ ортогонально $\mathscr{H}_2$, то σ-алгебры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{F}_2$ независимы (лемма 2, b). Откуда

$$P[A \cap G \mid \mathscr{F}_2] = P[A] I_G \in \mathscr{G}.$$

Обратно, предположим, что $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ условно независимы по отношению к $\mathscr{G}$ и обозначим P_2 ортогональный проектор $\mathscr{H}$ на $\mathscr{H}_2$. Пусть $X \in \mathscr{H}_1$, тогда $P_2(X) = E[X \mid \mathscr{F}_2]$, что следует из a) и $E[X \mid \mathscr{F}_2] \in \mathscr{G}$, согласно сделанному предположению о независимости. Отсюда $P_2(\mathscr{H}_1) \in \mathscr{H}_1$, что и доказывает перестановочность $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$.

Марковское свойство броуновского движения W можно легко интерпретировать в такой форме. Для всякого $a > 0$ определим гауссовское «внутреннее» пространство $\mathscr{T}_a$ как гильбертово пространство, образованное величинами $W(t)$ для $|t| \leqslant a$ и таким же образом внешнее пространство $\mathscr{E}_a$ как пространство, образованное $W(t)$ при $|t| \geqslant a$. Ясно, что ортогональная проекция $W(t)$ на $\mathscr{T}_a$ равна $W(a)$, если $t \geqslant a$ и $W(-a)$, если $t \leqslant -a$. Следовательно, подпространства $\mathscr{T}_a$ и $\mathscr{E}_a$ пространства L^2 перестановочны и их пересечением является подпространство $\mathscr{P}_a$, образованное величинами $W(a)$ и $W(-a)$. Из леммы 5 следует тогда, что процессы $(W(t))_{|t| \leqslant a}$ и $(W(t))_{|t| \geqslant a}$ условно независимы по отношению к $(W(a), W(-a))$.

Перейдем теперь к процессу Леви X на некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{T}$ конечной размерности $d \geqslant 1$. Для всякого $a > 0$ подпространство $\mathscr{T}_a$ (соответственно $\mathscr{E}_a$), образуемое случайными величинами $X(t)$ с $\|t\| \leqslant a$ (соответственно с $\|t\| \geqslant a$). Маккин получил следующие результаты, обобщенные П. Ассуадом (последний привлекал к рассмотрению пространства Соболева; его статья готовится к печати).

a) Если d — нечетно, то подпространства $\mathscr{T}_a$ и $\mathscr{E}_a$ пространства L^2 перестановочны и их пересечение порождается случайными величинами

вида $(\partial/\partial r)^i X(ru)|_{r=a}$, $0 \leqslant i \leqslant \frac{a-1}{2}$ и $\|u\|=1$. (Эти нормальные производные требуют аккуратности при их определении.)

b) Если же d четно, то подпространства $\mathcal{J}_a$ и $\mathcal{E}_a$ пространства L^2 не являются перестановочными.

Можно также сказать, что если d нечетно, то значения процесса Леви X, внутренние по отношению к сфере с центром в точке 0, не зависят от значений X, внешних по отношению к этой сфере, при условии, что X и производные X имеют величину порядка $\leqslant \frac{a-1}{2}$ на поверхности сферы. Напротив, если d четно, то подобного марковского свойства не существует.

Предположим, что $\mathcal{T}$ имеет конечную размерность $d \geqslant 1$. Расстояние от $X(t)$ до подпространства $\mathcal{J}_a$ пространства L^2 есть квадратичная ошибка $E[X(t)-E[X(t) \mid \mathcal{J}_a])^2]^{1/2}$, возникающая при замене $X(t)$ на экстраполированную величину $X(t)$, начиная со значений процесса $X(s)$ при $\|s\| \leqslant a$. Отсюда сразу же видно, что эта ошибка имеет вид $\pi_d(\|t\|)$, где функция π_d зависит только от d. Больше того, можно показать, что $\pi_a(r) \to 0$ для любого r при $d \to \infty$. Это вытекает из равенства $\mathcal{J}_a = \mathcal{J}_b$ для $0 < a < b$ в том случае, когда $\mathcal{T}$ имеет бесконечную размерность. Именно этот результат позволил П. Леви сказать, что процесс X является «детерминистским», когда $\mathcal{T}$ имеет бесконечную размерность.

7. Среднесферические процессы

Предположим, что $\mathcal{T}$ имеет конечную (нечетную) размерность $d=2n+1$. Из формулы (19) вытекает, что отображение X множества $\mathcal{T}$ в L^2 непрерывно, и можно определить интеграл

$$W_{d,r} = \int_S X(rt)\sigma(dt) \quad (r \geqslant 0), \tag{26}$$

где S есть единичная сфера в $\mathcal{T}$, а σ — вероятностная мера на S, инвариантная по отношению к вращениям. Таким образом, мы получаем случайную гауссовскую функцию $(W_{d,r})_{r \geqslant 0}$, ковариация которой получается из ковариации C_X величины X двойным интегрированием. Эта ковариация имеет вид

$$C_d(r, r') = \frac{1}{2}\left\{r + r' - a_d^{-1} \int_{-1}^{1} (r^2 + r'^2 - 2rr'x)^{1/2}(1-x^2)^{n-1}\,dx\right\}, \tag{27}$$

где $a_d = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{n-1}\,dx$.

Из (27) легко получить, что производные $\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^i \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^j C_d(r, r')$ существуют и непрерывны для $r > 0$, $r' > 0$, $0 \leqslant i \leqslant n$, $0 \leqslant j \leqslant n$.

Согласно результатам Лоэва, отображение $r \mapsto W_{d,r}$ $(0, \infty)$ в L^2 является n раз непрерывно дифференцируемым. Следовательно, можно определить среднеквадратические производные

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^i \int_S X(r, t) \cdot \sigma(dt)$$

для $r > 0$ и $0 \leqslant i \leqslant n$. Именно на эти средние сферические нормированные производные мы упоминали в пункте 6.

Перейдем теперь к рассмотрению ограничений на d. Если $\mathcal{T}$ имеет бесконечную размерность, то уже нельзя определить средние сферические значения, однако формула (27) показывает, что предел

$$C_\infty(r, r') = \lim_{d\to\infty} C_d(r, r')$$

существует и задается выражением

$$C_\infty(r, r') = \frac{1}{2}\{r + r' - (r^2 + r'^2)^{1/2}\}. \tag{28}$$

Так как функция C_∞ аналитична на $(0, \infty)\times(0, \infty)$, то классические результаты Лоэва дают, что отображение $r \mapsto W_{\infty, r}$ из $(0, \infty)$ в L^2 аналитично для всякой гауссовской случайной функции $(W_{\infty, r})_{r\geqslant 0}$ с ковариацией C_∞. Такая случайная функция детерминистична в согласии с детерминистическим характером процесса X, когда $\mathcal{T}$ имеет бесконечную размерность (см. п. 6).

8. Аналитическое продолжение

Проблема, поставленная Леви в [2],— это проблема существования аналитического продолжения в комплексную плоскость процесса с ковариацией C_∞. Рассуждения Маккина в [1] показывают, что максимальная область аналитического продолжения есть множество комплексных чисел r, таких, что $|\operatorname{Arg} r| < \frac{\pi}{4}$. Метод Маккина достаточно сложен и основан на исследовании радиуса сходимости некоторого ряда. Мы приведем здесь упрощенный вариант этого результата.

Заметим сначала, что процесс $(W_{\infty, \sqrt{u}})_{u\geqslant 0}$ имеет ковариацию, описываемую формулой

$$\mathcal{D}(u, u') = \frac{1}{2}\{u^{1/2} + u'^{1/2} - (u + u')^{1/2}\}. \tag{29}$$

Используя очевидную замену переменных, можно получить результаты Маккина как следствие следующей теоремы.

Теорема 3. *Пусть $(A_u)_{u>0}$ есть гауссовская случайная функция с ковариацией $\mathcal{D}$. Пусть Π есть множество комплексных чисел с положительной действительной частью и U — внутренняя часть Π. Тогда существует некоторый гауссовский процесс $(B_u)_{u\in\Pi}$ со следующими свойствами:*

a) *$B_u = A_u$ для действительных $u > 0$,*

b) *отображение $u \mapsto B_u$ множества Π в L^2 непрерывно и его ограничение на U голоморфно. Больше того, U есть область максимального аналитического продолжения A_u.*

Доказательство. Обозначим $\mathcal{H}$ гильбертово пространство $L^2(0, \infty)$ (с лебеговской мерой). Для комплексного u и $x > 0$ положим

$$F(u, x) = \frac{1}{2}\pi^{-1/4}x^{-3/4}(1 - e^{-ux}). \tag{30}$$

Так как $1-e^{-ux}$ эквивалентно ux при $x\to 0$ и фиксированном u, то функция $F(u, \cdot)$ на $(0, \infty)$ может быть продолжена в непрерывную функцию на $[0, \infty)$, обращающуюся в нуль в начальной точке. Экспоненциальный множитель в (30) дает, что функция $F(u, \cdot)$ интегрируема с квадратом в том и только том случае, если действительная часть $u > 0$. Для любого $u \in \Pi$

$$\pi^{1/2}|F(u, x)|^2 \leqslant \inf(|u|^2x^{1/2}, x^{3/2})\ (x > 0). \tag{31}$$

Поэтому теорема о мажорируемой сходимости позволяет показать, что отображение $u \mapsto F(u, \cdot)$ множества Π в $\mathscr{H}$ непрерывно и что его ограничение на U голоморфно.

Предположим, что U_1 есть открытое связное подмножество множества комплексных чисел, содержащих U, и что F_1 есть голоморфное отображение U_1 в $\mathscr{H}$, такое, что $F_1(u) = F(u, \cdot)$ для $u \in U$. Пусть h есть некоторая непрерывная функция с комплексным носителем в $(0, \infty)$. Положим $\Phi(u) = \int_0^\infty F(u, x) h(x) dx$ для комплексных u и $\Phi_1(u) = (F_1(u) \mid h)$ для $u \in U$. Тогда Φ голоморфно в $\mathscr{C}$, а Φ_1 в U_1. Причем Φ и Φ_1 совпадают в U. Таким образом, получаем, что Φ и Φ_1 совпадают в U_1. Пусть $u \in U_1$ и $C = \|F_1(u)\|$. Тогда

$$\left|\int_0^\infty F(u, x) h(x) dx\right|^2 \leqslant C^2 \int_0^\infty |h(x)|^2 dx \tag{32}$$

для любой функции h с комплексным носителем в $(0, \infty)$ и, следовательно, функция $F(u, \cdot)$ интегрируема с квадратом на $(0, \infty)$. Как мы уже видели, отсюда следует, что $u \in \Pi$, значит, $U_1 \in \Pi$ и $U_1 \in U$. Следовательно, мы доказали, что U есть область максимального аналитического продолжения отображения $u \mapsto F(u, \cdot)$ на $(0, \infty)$. Пусть u и u' строго положительны. Тогда

$$\int_0^\infty F(u, x) \cdot F(u', x) dx = T(u) + T(u') - T(u + u'), \tag{33}$$

причем

$$T(u) = \frac{1}{4} \pi^{-1/2} \int_0^\infty x^{-3/2} (1 - e^{-ux}) dx. \tag{34}$$

Интегрируя по частям в (34) и используя классическое определение Г-функции Эйлера, получаем $T(u) \frac{1}{2} u^{1/2}$ $\left(\text{мы учли, что } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \pi^{1/2}\right)$. Следовательно,

$$\mathscr{D}(u, u') = \int_0^\infty F(u, x) \cdot F(u', x) dx \, (u > 0, \ u' > 0). \tag{35}$$

Если $\mathscr{K}$ есть гауссовское подпространство пространства L^2, образованное случайными величинами A_u, $u > 0$ и $\mathscr{H}_1$ — замкнутое подпространство пространства $\mathscr{H} = L^2(0, \infty)$, образованное функциями $F(u, \cdot)$, то существует изоморфизм σ подпространства $\mathscr{H}_1$ на $\mathscr{K}$, такой, что $\sigma(F(u, \cdot)) = A_u$ для $u > 0$.

Для всякого $h \in \mathscr{H}$ функция $u \mapsto (F(u, \cdot) \mid h)$ непрерывна в Π и голоморфна в U. Если h ортогонально $\mathscr{H}$, то эта функция обращается в 0 на $(0, \infty)$ и, следовательно, везде на Π. Поэтому $F(u, \cdot) \in \mathscr{H}_1$ для $u \in \Pi$. Если положить $B_u = \sigma(F(u, \cdot))$ для $u \in \Pi$, то будут удовлетворяться условия a) и b) теоремы 3. Рассуждения аналогичные предыдущим показывают, что всякое аналитическое продолжение отображения $u \mapsto A_u$ из $(0, \infty)$ в L^2 принимает значения из $\mathscr{K}$, откуда сразу следует последнее утверждение теоремы 3.

9. Некоторые замечания

Во всей статье мы неявно рассматривали случайные величины как класс эквивалентных измеримых функций на $(\Omega, \mathscr{F})$, а некоторый процесс — как семейство таких случайных переменных. На самом деле, П. Леви построил почти наверное непрерывный процесс X. Можно также показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} A_n \cdot Z^n$, где $(A_n)_{n\geqslant 0}$ — гауссовская последовательность, имеет тот же радиус сходимости в L^2 в смысле сходимости почти всюду, что позволяет продолжить результаты п. 8 и получить голоморфные модификации (почти наверное) процесса $(B_u)_{u\in U}$.

В [2] П. Леви показывает, что область максимального аналитического продолжения процесса $(W_{\infty, r})$ дается неравенством $|\operatorname{Arg} r| < \frac{\pi}{6}$. В действительности его рассуждение на стр. 164 ошибочно. П. Леви пытается перейти к пределу в своем интеграле (5.21), но в (5.22) два члена из правой части выражения одинаковы по порядку величины для u в окрестности единицы. Таким образом,

$$\sigma^2_{\omega, h}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^h \left(\frac{\partial}{\partial t'}\right)^h C_\infty(t, t')|_{t=t'}.$$

Прямой подсчет дает $\sigma^2_{\omega, 1}(t) = 2^{-5/2} t^{-1}$ и $\sigma^2_{\omega, 2}(t) = 7{,}2^{-9/2} t^{-3}$ вместо коэффициентов $2^{-7/2}$ и 15.2, найденных П. Леви для этих случаев.

В заключение отметим, что формула П. Леви (5.2.7), на которой основан расчет радиусов сходимости, неверна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. McKean H. P., Brownian motion with a several-dimensional time, Теория вероятн. и ее примен., VII, 4 (1963), 357—378.
2. Lévy P., A special problem of brownian motion and a general theory of gaussian random functions, Proc. III Berkeley Symp. on Mathem. Statistics and Probability, v. II (1956), 133—175, Univ. of California Press.