Ф. Г. Авхадиев, Л. А. Аксентьев, Достаточные условия однолистности аналогических функций, *Докл. АН СССР*, 1971, том 198, номер 4, 743–746

Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 517.54 **МАТЕМАТИКА**

Ф. Г. АВХАДИЕВ, Л. А. АКСЕНТЬЕВ

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОДНОЛИСТНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 2 XII 1970)

1. Пусть $g(t)$ — мероморфная в области $\mathscr{D}$ функция, $\{g, t\} = [g''(t)/g'(t)]' - [g''(t)/g'(t)]^2/2$ — шварциан. Нехари ([1]) доказал следующее. Если функция $g(t)$ неоднолистна, т. е. $g(t_1) = g(t_2)$ для некоторых t_1 и $t_2 \in \mathscr{D}$, $t_1 \neq t_2$, то найдется нетривиальное решение $u_0(t)$ уравнения

$$u''(t) + {}^1/_2\{g, t\}u(t) = 0, \tag{N}$$

обращающееся в нуль в тех же точках t_1 и t_2. Пусть $p(t)$ регулярна в $\mathscr{D}$. Полагая $w(t) = u(t)\exp\int[p(t)/2]dt$, получим новое уравнение

$$w''(t) + p(t)w'(t) + q(t)w(t) = 0 \tag{1}$$

с регулярными в $\mathscr{D}$ коэффициентами $p(t)$ и $q(t)$, удовлетворяющими условию

$$-p'(t) - p^2(t)/2 + 2q(t) = \{g, t\}. \tag{2}$$

(см. также ([2]), стр. 300). Считая $w_0(t) = u_0(t)\exp\int[p(t)/2]dt$, получим, что $w_0(t) \not\equiv 0$ и $w_0(t_1) = w_0(t_2) = 0$. Поэтому исследование однолистности функции $g(t)$ сводится к исследованию неколеблемости решения уравнения (1) с условием (2). Используя уравнение (N), Нехари получил достаточные условия однолистности, выражающиеся через шварциан (см. ([1, 3, 4])). Мы найдем более простые условия, которые оказываются удобными в приложениях.

Теорема 1. *Регулярная в круге $|z| < 1$ функция $f(z)$ будет однолистной в этом круге, если*

$$|f''(z)/f'(z)| \leqslant C/(1 - |z|^2), \quad C \leqslant {}^2/_3, \quad |z| < 1. \tag{3}$$

Доказательство ведется от противного. Пусть $f(z_1) = f(z_2)$, $z_1 \neq z_2$, $|z_1| = |z_2| < 1$. Обозначим через $z_0 = r_0e^{i(\gamma+\pi/2)}$, $0 \leqslant r_0 < 1$, среднюю точку дуги, ортогональной к $|z| = 1$ окружности, проходящей через z_1 и z_2. Тогда для функции

$$g(t) = f(z(t)) = f(e^{i\gamma}(t + r_0i)/(1 - r_0it)), \quad |t| < 1,$$

будем иметь

$$g(-\rho) = g(\rho), \quad 0 < \rho < 1.$$

Рассматривая уравнение (1) при

$$p(t) = -\frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t), \quad q(t) = -\frac{f''(z)}{2f'(z)}z''(t) \quad (z = z(t))$$

(соотношение (2) для функций $p(t)$, $q(t)$ и $g(t)$ при этом будет выполнено), нетрудно прийти к равенству

$$\int_{-\rho}^{\rho}|w_0'(t)|^2dt + \int_{-\rho}^{\rho}\frac{f''(z)}{f'(z)}z'(t)w_0'(t)\overline{w_0(t)}\,dt +$$

$$+\int_{-\rho}^{\rho}\frac{f''(z)}{2f'(z)}z''(t)\,|w_0(t)|^2\,dt=0, \tag{4}$$

где $w_0(t)$ — решение уравнения (1) при выбранных $p(t)$ и $q(t)$, причем $w_0(-\rho)=w_0(\rho)=0$.

Но при выполении условия (3) равенство (4) невозможно. Действительно,

$$\int_{-\rho}^{\rho}\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right||z'(t)||w_0'(t)\overline{w_0(t)}|\,dt\leqslant{}^2/_3\int_{-\rho}^{\rho}\frac{|w_0'(t)w_0(t)|}{1-t^2}\,dt\leqslant$$

$$\leqslant{}^2/_3\left(\int_{-\rho}^{\rho}|w_0'(t)|^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\rho}^{\rho}\frac{|w_0(t)|^2}{(1-t^2)^2}\,dt\right)^{1/2}<{}^2/_3\int_{-\rho}^{\rho}|w_0'(t)|^2\,dt,$$

$$\int_{-\rho}^{\rho}{}^1/_2\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right||z''(t)||w_0(t)|^2\,dt\leqslant{}^1/_3\int_{-\rho}^{\rho}\frac{2|w_0(t)|^2}{1-t^2}\,dt<{}^1/_3\int_{-\rho}^{\rho}|w_0'(t)|^2\,dt.$$

Мы здесь воспользовались (при $\lambda=1$ и 2) неравенствами

$$\int_{-\rho}^{\rho}\frac{2^{2-\lambda}u^2(t)}{(1-t^2)\lambda}\,dt<\int_{-\rho}^{\rho}u'^2(t)\,dt,\qquad 0<\rho<1,$$

справедливыми для $1\leqslant\lambda\leqslant2$ и любых непрерывно дифференцируемых в интервале $(-1,1)$ вещественных функций $u(t)\not\equiv0$, $u(-\rho)=u(\rho)=0$.

Теорема 2. *Функция $f(\zeta)$, регулярная в области $|\zeta|>1$ за исключением точки $\zeta=\infty$, где она имеет простой полюс, будет однолистной в $|\zeta|>1$, если*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)|\leqslant C(|\zeta|)/(|\zeta|^3-|\zeta|),\quad |\zeta|>1, \tag{5}$$

причем неотрицательная непрерывная при $|\zeta|=R\geqslant1$ функция $C(R)$ удовлетворяет неравенству

$$\max_{R\geqslant1}C(R)/2+\max_{R\geqslant1}[C(R)/R]\leqslant1. \tag{6}$$

Схема доказательства этой теоремы аналогична предыдущей. Функции $g(t)$, $p(t)$ и $q(t)$ выбираются следующим образом:

$$g(t)=f(1/z(t)),\quad z=z(t)\equiv e^{i\gamma}(t+r_0i)/(1-r_0it),\quad 0\leqslant r_0<1,$$

$$p(t)=\frac{f''(1/z)}{z^2f'(1/z)}z'(t),\quad q(t)=-\frac{f''(1/z)}{z^3f'(1/z)}\left(z'^2(t)-\frac{zz''(t)}{2}\right).$$

Следствие 1. *Если*

$$|f''(\zeta)/f'(\zeta)|\leqslant C/(|\zeta|^3-|\zeta|),\quad C\leqslant{}^2/_3,\quad |\zeta|>1, \tag{7}$$

то функция $f(\zeta)=a\zeta+a_0+a_1\zeta^{-1}+a_2\zeta^{-2}+\ldots$ однолистна в $|\zeta|>1$.

Отметим, что условия (3) и (7) ранее были получены в работах ([5]) и ([6]) соответственно лишь при $C=2(\sqrt{5}-2)=0{,}47\ldots$ на основании достаточного условия Нехари ([1]).

2. При исследовании однолистной разрешимости основных обратных краевых задач (([7]), гл. 1; ([8]), § 33) нужны условия однолистности, выражающиеся через область изменения производной отображающей функции. В частности, возникает следующая задача. Пусть $m\leqslant|f'(z)|\leqslant M$ и $|\arg f'(z)|\leqslant\alpha$ при $|z|<1$ или $|z|>1$. При каких α и $q=\ln(M/m)$ функция $f(z)$ будет однолистной? В следующих теоремах указаны некоторые ограничения на q и α, которые охватывают интересный случай $\alpha>\pi/2$, не исследованный ранее (см. ([9-12])).

Теорема 3. *Регулярная в* $|z|<1$ *функция* $f(z)$ *будет однолистной в* $|z|<1$, *если*

$$q\,/\,[(\lambda+1)K(\lambda)]\leqslant 2/3, \tag{8}$$

где $K(\lambda)=\int\limits_0^1[(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)]^{-1/2}dx,$ а $\lambda=\lambda(q,\,\alpha)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, *определяется из уравнения* $4\alpha K(\lambda)=qK(\lambda')$, $\lambda'=\sqrt{1-\lambda^2}$.

Наметим доказательство, которое приводит к оценке

$$|f''(z)\,/\,f'(z)|\leqslant q[(\lambda+1)K(\lambda)]^{-1}/\,(1-|z|^2)\leqslant 2/3\,/\,(1-|z|^2),\quad |z|<1. \tag{9}$$

Рассмотрим функцию $t=t(z)\equiv\ln f'(z)-\ln m-q/2+i\alpha$, $|z|<1$, значения которой лежат в прямоугольнике $|\mathrm{Re}\,t|\leqslant q/2$, $0\leqslant\mathrm{Im}\,t\leqslant 2\alpha$. Отобразим круг $|w|<1$ на этот прямоугольник с помощью функции ([13], стр. 166)

$$t=\frac{q}{2K(\lambda)}\int\limits_0^{\zeta(w)}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)}},$$

где $\zeta=\zeta(w)=2(w+i)/([1-\lambda+i(1+\lambda)]w+1+\lambda+i(1-\lambda))$, причем λ и $K(\lambda)$ — указанные в условии теоремы величины. Определим теперь функцию $w=w(z)$, $|z|<1$, неявным уравнением

$$\ln f'(z)-q/2+i\alpha=\frac{q}{2K(\lambda)}\int\limits_0^{\zeta(w)}\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\lambda^2x^2)}},$$

дифференцирование которого приводит к равенству

$$\frac{f''(z)}{f'(z)}dz=\frac{q}{\delta K(\lambda)}\,\frac{2(1+\lambda)}{\sqrt{(w^2-1)(w-a_1)(w-a_2)}}dw, \tag{10}$$

где $\delta^2=-2(1+\lambda)^2[3-\lambda+i(1+\lambda)][1-3\lambda+i(1+\lambda)]$, а точки a_1 и a_2 лежат на окружности $|w|=1$ и соответствуют точкам (-1) и $1/\lambda$ на плоскости ζ.

Поскольку $|w(z)|<1$, то по принципу гиперболической метрики справедливо неравенство (см., например, ([14]), стр. 319)

$$|dw|/(1-|w|^2)\leqslant|dz|/(1-|z|^2),\qquad |z|<1,$$

или, с учетом (10),

$$\frac{|\delta|K(\lambda)}{2(1+\lambda)q}\,\frac{\sqrt{|(w^2-1)(w-a_1)(w-a_2)|}}{1-|w|^2}\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right|\leqslant\frac{1}{1-|z|^2},\quad |z|<1.$$

Но
$$\frac{\sqrt{|(w^2-1)(w-a_1)(w-a_2)|}}{1-|w|^2}\geqslant\sqrt{\frac{|a_1-a_2|}{2}}=2(1+\lambda)^2|\delta|^{-1},$$

и окончательно имеем (9). Остается воспользоваться теоремой 1. Предельному случаю этой теоремы с $\lambda=0$ $(\alpha=\infty)$ соответствует

Следствие 2. *Регулярная в* $|z|<1$ *функция* $f(z)$ *будет однолистной в* $|z|<1$, *если* $m\leqslant|f'(z)|\leqslant M$, $q=\ln(M/m)\leqslant\pi/3$.

Результат следствия 2 получен в ([15]) лишь для $q=\pi(\sqrt{5}-2)$.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(\zeta)$ *регулярна в области* $|\zeta|>1$ *за исключением точки* $\zeta=\infty$, *где она имеет простой полюс*;

$$m\leqslant|f'(\zeta)|\leqslant M,\qquad q=\ln(M/m),\qquad |\arg f'(\zeta)|\leqslant\alpha.$$

Тогда $f(\zeta)$ *будет однолистной в* $|\zeta|>1$, *если*

$$q\,/[(\lambda+1)K(\lambda)]\leqslant 1/2, \tag{11}$$

где λ *и* $K(\lambda)$ *определяются так же, как и в теореме* 3.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме 3. А именно, с использованием (11) получаем неравенство

$$\left|\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}\right| \leqslant \frac{2q\,[(\lambda+1)K(\lambda)]^{-1}}{|\zeta|^4-1}|\zeta| \leqslant \frac{|\zeta|}{|\zeta|^4-1}, \quad |\zeta|>1,$$

и однолистность функции $f(\zeta)$ следует из теоремы 2 при $C(R)=(1+R^{-2})^{-1}$.

Следствие 3. *Функция* $f(\zeta)=a\zeta+a_0+a_1\zeta^{-1}+a_2\zeta^{-2}+\ldots$ *будет однолистной в* $|\zeta|>1$, *если выполнено одно из условий*:

1^0. $m\leqslant|f'(\zeta)|\leqslant M$, $q=\ln(M/m)\leqslant\pi/4$ (*предельный случай теоремы* 4 *с* $\lambda=0$);

2^0. $|\arg f'(\zeta)|\leqslant\alpha\leqslant\pi/8$ (*предельный случай теоремы* 4 *с* $\lambda=1$).

Утверждения этого следствия получены в ([15]) лишь при $q\leqslant\pi(\sqrt{5}-2)/2$ и $\alpha\leqslant\pi(\sqrt{5}-2)/4$.

Достаточные условия однолистности решения внутренней (внешней) обратной краевой задачи (([7]), гл. 1; ([8]), § 33) сформулируем в виде следующего утверждения.

Теорема 5. *Функция*

$$f(z)=\int\exp\left\{\begin{smallmatrix}+\\(-)\end{smallmatrix}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}p(\theta)\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}d\theta\right\}dz$$

будет однолистной в области $|z|<1$ ($|z|>1$), *если вещественная* 2π-*периодическая функция* $p(\theta)$ *удовлетворяет двум условиям*:

1) $|p(\theta_1)-p(\theta_2)|\leqslant N|\theta_1-\theta_2|^\nu$, $0<\nu\leqslant1$;

2) $|p(\theta_1)-p(\theta_2)|\leqslant q(\leqslant N\pi^\nu)$,

где величины q *и*

$$\alpha=N\frac{2^\nu}{\pi}\int\limits_0^{\tau_0}\frac{\tau^\nu}{\sin\tau}d\tau+\frac{q}{\pi}\ln\operatorname{ctg}\frac{\tau_0}{2}\quad(\tau_0=2^{-1}q^{1/\nu}N^{-1/\nu})\tag{12}$$

удовлетворяют предположениям теоремы 3 (*теоремы* 4).

Доказательство основано на теореме 3 (4), на представлении $\ln|f'(e^{i\theta})|=p(\theta)$ и на оценке $|\arg f'(e^{i\theta})|\leqslant\alpha$, где $\alpha=\alpha(N,q,\nu)$ имеет вид (12). Оценка $|\arg f'(e^{i\theta})|\leqslant\alpha$ при $q=N\pi^\nu$ получена в ([16]), случай $q<N\pi^\nu$ доказывается аналогично.

Авторы глубоко благодарны проф. Н. А. Лебедеву за ценные советы.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
29 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Z. Nehari, Bull. Am. Math. Soc., 55, № 6, 545 (1949). [2] В. В. Голубев, Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М.—Л., 1950. [3] Z. Nehari, Proc. Am. Math. Soc., 5, 700 (1954). [4] Z. Nehari, Lect. Funct. Complex Variable. Ann. Arbor, 1955, p. 49. [5] P. L. Duren, H. S. Shapiro, A. L. Shields, Duke Math. J., 33, № 2, 247 (1966). [6] Ф. Г. Авхадиев, ДАН, 190, № 3, 495 (1970). [7] Г. Г. Тумашев, М. Т. Нужин, Обратные краевые задачи и их приложения, Казань, 1965. [8] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. [9] В. А. Зморович, УМН, 9, в. 4, 175 (1954). [10] В. S. Рогожин, Уч. зап. физ.-матем. фак. унив. Ростов-на-Дону, 32, 4, 135 (1955). [11] Л. А. Аксентьев, УМН, 15, в. 6, 119 (1960). [12] С. Н. Кудряшов, Тр. семинара по обратным краевым задачам, Казань, в. 2, 1964, стр. 72. [13] Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, М., 1970. [14] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966. [15] Ф. Г. Авхадиев, Изв. высш. учебн. завед., Матем., № 11, 3 (1970). [16] Л. А. Аксентьев, Там же, № 3, 3 (1968).