Л. Д. Пустыльников, Об алгебраической структуре пространств теплицевых и ганкелевых матриц, *Докл. АН СССР*, 1980, том 250, номер 3, 556–559

https://www.mathnet.ru/dan43303

на расстоянии δ от точки x_0. Теперь в области G': $x_1^2/\delta^2 + c'(x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)/\delta <$ < 1 зададим функцию

$$h'' = \delta\, c''(x_1^2/\delta^2 + c'(x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)/\delta - 1).$$

При достаточно большом c' область G' содержится в G и на ее границе $h \leqslant h''$, а при достаточно большом c'' найдутся точки, где $h > h''$. Следовательно, в некоторой точке $x \subset G'$ будет $\| h_{ij} \| \leqslant \| h''_{ij} \|$. Но $\| h''_{ij} \|$ имеет порядок $1/\delta$, а $\| h_{ij} \|$ имеет порядок $1/k$. Поэтому $k/\delta > \mathrm{const} > 0$. А это противоречит условию теоремы: $k/\delta \to 0$. Итак, $|\nabla h|$ неограниченно растет по мере приближения к границе области G.

Единственность решения основной задачи следует из единственности решения краевой задачи для уравнения (3). Известно, что для двух решений этого уравнения, совпадающих на границе, их разность не может иметь положительного максимума или отрицательного минимума.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР, Харьков

Поступило
5 XI 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А.В. Погорелов*, Многомерная проблема Минковского, "Наука", 1975.

УДК 512.83

МАТЕМАТИКА

Л.Д. ПУСТЫЛЬНИКОВ

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПРОСТРАНСТВ ТЕПЛИЦЕВЫХ И ГАНКЕЛЕВЫХ МАТРИЦ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 21 VI 1979)

Ганкелевыми матрицами занимаются с конца прошлого века, а теплицевыми – с начала этого; подробный обзор работ можно найти в книгах ([1,2]). В наше время интерес к этим классам матриц велик в связи с большим количеством применений их алгебраических и аналитических свойств к другим областям математики и к смежным наукам. Несмотря на то, что внешний вид этих матриц достаточно прост, трудности, возникающие при работе с ними, большие. Природа трудностей связана с тем, что пространства этих матриц относительно операции умножения не обладают групповой структурой. Это приводит к тому, что при решении ряда задач линейной алгебры с ганкелевыми и теплицевыми матрицами мы не можем эффективно воспользоваться их внешней простотой. В настоящей работе показано, что хотя пространства теплицевых и ганкелевых матриц с алгебраической точки зрения устроены сложно, каждое из них можно разложить в сумму двух подпространств, которые уже устроены алгебраически просто. Для теплицевых матриц это означает следующее (см. теорему 1): пространство комплексных квадратных теплицевых матриц T порядка n можно представить в виде суммы двух подпространств T_1 и T_2, пересекающихся по пространству скалярных матриц, каждое из которых есть алгебра, сопряженная алгебре комплексных диагональных матриц порядка n, причем сопрягающие матрицы и векторы с координатами, являющимися собственными значениями матриц из T_1 и T_2, имеют простую структуру и выписываются в явном виде при любом n.

Что касается алгебры T_1, то она хорошо известна: это алгебра циклических матриц (см. ([1])). Алгебра же T_2 в литературе не встречалась. Автор назвал матрицы из T_2 кососциклическими. Подобная теорема имеет место в случае квадратных комплексных ганкелевых матриц (теорема 2). Здесь соответствующие подпространства уже не являются алгебрами, хотя будут связаны с алгеброй комплексных диагональных матриц достаточно просто. Матрицы, входящие в эти подпространства, называются в работе соответственно антициклическими и кососантициклическими.

В дальнейших работах будет показано применение этих теорем к быстрым вычислениям при решении задач линейной алгебры и к быстрому прогнозированию и фильтрации случайных процессов в теории вероятностей и ее приложениях. В частности, теорема 1 позволяет решать относительно x систему линейных алгебраических уравнений вида $Ax = b$ с теплицевой матрицей A порядка n широкого класса, выполняя $O(n \log_2 n)$ арифметических операций, что на порядок сильнее результата, который дает метод работы ([3]) для симметрических матриц (в работе ([3]) для симметрических теплицевых матриц порядка n получена оценка $O(n^2)$).

1. Основные определения. Пусть n – фиксированное число. Все матрицы, рассматриваемые в этой работе, квадратные, комплексные и имеют порядок n, т.е. содержат n строк и n столбцов; при этом строки нумеруются числами $0, 1, \ldots, n-1$ сверху вниз, а столбцы – числами $0, \ldots, n-1$ слева направо.

Если A – матрица порядка n, то будем ее и ее элементы обозначать как $A = (a_{ij})$, $i = 0, \ldots, n-1$; $j = 0, \ldots, n-1$; i – номер строки, j – номер столбца. Иногда для четкости при обозначении матричных элементов a_{ij} между индексами будем писать запятую: $a_{i,j}$

Определение 1. Матрица $A = (a_{ij})$ называется теплицевой, если $a_{ij} = a_{kl}$ при $i - j = k - l$; ганкелевой, если $a_{ij} = a_{kl}$ при $i + j = k + l$; циклической, если $a_{ij} = a_{kl}$ при $i - j \equiv k - l \bmod n$; антициклической, если $a_{ij} = a_{kl}$ при $i + j \equiv k + l \bmod n$; кососциклической, если A теплицева и $a_{ij} = -a_{kl}$ при $i - j = k - l + n$; кососантициклической, если A ганкелева и $a_{ij} = -a_{kl}$ при $i + j = k + l + n$.

Определение 2. Пусть $d = (d_0, \ldots, d_{n-1})$ – вектор размерности n. Определим преобразование Фурье $d^* = Fd$ вектора d по формулам

$$d^* = Fd = (d_0^*, \ldots, d_{n-1}^*), \quad d_k^* = \sum_{j=0}^{n-1} e^{-2\pi i kj/n} d_j, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

(i – мнимая единица).

Замечание 1. Известно, что введенное таким образом преобразование Фурье невырождено и обратное к нему преобразование F^{-1} вектора d^* задается формулами

$$d = F^{-1} d^* = (d_0, \ldots, d_{n-1}), \quad d_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi i kj/n} d_j^*, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

2. Основные обозначения.

1) Обозначим: T – множество теплицевых матриц, T_1 – множество циклических матриц, T_2 – множество кососциклических матриц, Γ – множество ганкелевых матриц, Γ_1 – множество антициклических матриц, Γ_2 – множество кососантициклических матриц, D – множество диагональных матриц, S – множество скалярных матриц.

2) Обозначим через $\mathcal{L} = (l_{ij})$ циклическую матрицу, у которой верхняя строка $(l_{00}, \dots, l_{0,n-1})$ имеет вид

$$l_{0k} = -\frac{2}{n\left(\exp\left(\frac{\pi i}{n}(2k-1)\right)-1\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где i — мнимая единица.

Замечание 2. Легко видеть, что $\mathcal{L}$ — невырожденная матрица, а обратная к ней матрица $\mathcal{L}^{-1} = (\mu_{ij})$ — циклическая, и ее верхняя строка $(\mu_{00}, \dots, \mu_{0,n-1})$ имеет вид

$$\mu_{0k} = -\frac{2}{n\left(\exp\left(\frac{\pi i}{n}(2k+1)\right)-1\right)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

где i — мнимая единица.

3) Обозначим через $\hat{E}$ матрицу, у которой на диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний угол, стоят единицы, а остальные элементы — нули.

4) Обозначим через $J = (J_{ij})$ антициклическую матрицу, у которой верхняя строка $(J_{00}, J_{01}, \dots, J_{0,n-1})$ имеет вид

$$J_{00} = 1, \quad J_{0k} = 0$$

при $k \neq 0$.

5) Обозначим через Φ, Φ^{-1} матрицы такие, что для любого n-мерного вектора d

$$Fd = \Phi d, \quad F^{-1}d = \Phi^{-1}d.$$

6) Если A, B — фиксированные матрицы порядка n, а R — некоторое множество матриц порядка n, то записи AR, RB, ARB обозначают множества матриц, состоящие соответственно из матриц вида AC, CB и ACB, где $C \in R$.

3. Основные теоремы.

Теорема 1. *Линейное пространство T есть сумма двух подпространств T_1 и T_2 таких, что:*

1) $T_1 \cap T_2 = S$;

2) $T_1 = \Phi^{-1} D \Phi, \quad T_2 = \Phi^{-1}\mathcal{L}^{-1} D \mathcal{L}\Phi$;

3) *если матрица $A' = (a'_{ij})$ такая, что $A' \in T_1$, то $A' = \Phi^{-1}\Lambda'\Phi$, где Λ' — диагональная матрица,*

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} l'_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l'_{n-1} \end{pmatrix},$$

с диагональными числами $l'_0, \dots, l'_{n-1}$, причем вектор $l' = (l'_0, \dots, l'_{n-1})$ имеет вид $l' = Fa'$, где $a' = (a'_0, \dots, a'_{n-1})$ — вектор с координатами

$$a'_0 = a'_{00}, \quad a'_1 = a'_{0,n-1}, \dots, a'_{n-1} = a'_{01};$$

4) *если матрица $A'' = (a''_{ij})$ такая, что $A'' \in T_2$,* то *$A'' = \Phi^{-1}\mathcal{L}^{-1}\Lambda''\mathcal{L}\Phi$, где Λ'' — диагональная матрица,*

$$\Lambda'' = \begin{pmatrix} l''_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l''_{n-1} \end{pmatrix},$$

с диагональными числами $l''_0, \ldots, l''_{n-1}$, *причем вектор* $l'' = (l''_0, \ldots, l''_{n-1})$ *имеет вид* $l'' = \mathcal{L}Fa''$, *где* $a'' = (a''_0, \ldots, a''_{n-1})$ – *вектор с координатами*

$$a''_0 = a''_{00}, \quad a''_1 = -a''_{0,n-1}, \ldots, a''_{n-1} = -a''_{01}.$$

Теорема 2. *Линейное пространство* Γ *есть сумма двух линейных подпространств* Γ_1 *и* Γ_2 *таких, что*:

1) $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \hat{E}S$;

2) $\Gamma_1 = \Phi^{-1}JD\Phi, \quad \Gamma_2 = \Phi^{-1}\mathcal{L}^{-1}\hat{E}D\mathcal{L}\Phi$;

3) *если матрица* $B' = (b'_{ij})$ *такая, что* $B' \in \Gamma_1$, *то* $B' = \Phi^{-1}J\Lambda'\Phi$, *где* Λ' – *диагональная матрица,*

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} l'_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l'_{n-1} \end{pmatrix},$$

с диагональными числами $l'_0, \ldots, l'_{n-1}$, *причем вектор* $l' = (l'_0, \ldots, l'_{n-1})$ *имеет вид* $l' = Fb'$, *где* $b' = (b'_0, \ldots, b'_{n-1})$ – *вектор с координатами*

$$b'_0 = b'_{00}, \quad b'_1 = b'_{0,n-1}, \ldots, b'_{n-1} = b'_{01};$$

4) *если матрица* $B'' = (b''_{ij})$ *такая, что* $B'' \in \Gamma_2$, *то* $B'' = \Phi^{-1}\mathcal{L}^{-1}\hat{E}\Lambda''\mathcal{L}\Phi$, *где* Λ'' – *диагональная матрица,*

$$\Lambda'' = \begin{pmatrix} l''_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l''_{n-1} \end{pmatrix},$$

с диагональными числами $l''_0, \ldots, l''_{n-1}$, *причем вектор* $l'' = (l''_0, \ldots, l''_{n-1})$ *имеет вид* $l'' = \mathcal{L}Fb''$, *где* $b'' = (b''_0, \ldots, b''_{n-1})$ – *вектор с координатами*

$$b''_0 = b''_{00}, \quad b''_1 = -b''_{0,n-1}, \ldots, b''_{n-1} = -b''_{01}.$$

Автор выражает глубокую благодарность М.А. Рабиновичу за то, что он заинтересовал автора этой тематикой, и за многочисленные полезные обсуждения.

Всесоюзный государственный проектно-изыскательский и научно-исследовательский институт "Энергосетьпроект", Москва

Поступило 2 VII 1979

ЛИТЕРАТУРА

[1] *У. Гренандер, Г. Сегё,* Теплицевы формы и их приложения, ИЛ, 1961. [2] *И.С. Иохвидов,* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы, "Наука", 1974. [3] *N. Levinson,* J. Math. Phys., v. 25, № 4 (1947).