П. Н. Вабищевич, Монотонные разностные схемы для задач конвекции / диффузии, *Дифференц. уравнения*, 1994, том 30, номер 3, 503–513

МАРТ 1994 г., ТОМ 30, № 3

УДК 519.63

П. Н. ВАБИЩЕВИЧ

МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ / ДИФФУЗИИ

Решения краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка с первыми производными удовлетворяют принципу максимума [1]. На основе принципа максимума получены соответствующие априорные оценки в равномерной норме. В теории разностных схем [2] принципу максимума уделяется значительное внимание. В частности, он используется для исследования сходимости разностных схем в равномерной норме. Разностные схемы, удовлетворяющие принципу максимума, называются монотонными.

Среди монотонных разностных схем для задач конвекции / диффузии наибольшее (см., например, [3—5]) распространение получили разностные схемы с направленными разностями первого порядка аппроксимации. Обычные схемы с центральными разностями имеют второй порядок, но являются условно монотонными. В работе [6] предложена комбинированная схема, когда в области нарушения монотонности схемы с центральными разностями используется схема первого порядка аппроксимации с направленными разностями. Среди абсолютно монотонных разностных схем отметим экспоненциальную схему [7]. Более простая в реализации разностная схема предложена в работе [8]. Некоторые классы безусловно монотонных схем обсуждаются в работах [9, 10].

Принцип максимума обычно (см. [1, 2]) формулируется для уравнений с конвективными слагаемыми в недивергентной форме. Это относится как к дифференциальной, так и к разностной задачам. Однако не меньший интерес представляют задачи с конвективными слагаемыми в дивергентной форме. В этом случае разностный принцип максимума для одномерных задач сформулирован в [11].

Работа посвящена построению монотонных разностных схем для многомерных задач конвекции / диффузии. В качестве модельной рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с недивергентными и дивергентными конвективными слагаемыми. Формулируется принцип максимума для разностных пятиточечных уравнений. Построение монотонных схем базируется на использовании принципа регуляризации разностных схем, сформулированного в работе [12]. Монотонные схемы строятся на основе возмущения коэффициентов разностной схемы в соответствии с достаточными условиями выполнения принципа максимума. Анализируются ранее предложенные разностные схемы.

1. Модельная задача конвекции / диффузии. Будем считать, что в прямоугольнике $\Omega=\{x\,|\,x=(x_1, x_2),\ 0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1, 2\}$ ищется функция $u(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2}=f(x),\quad x\in\Omega, \tag{1}$$

и простейшим краевым условиям

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega. \tag{2}$$

Заданные функции $v_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$ (компоненты скорости), определяют конвективный перенос.

Будем считать среду несжимаемой, и поэтому

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Такое допущение, оправданное во многих прикладных проблемах, позволяет нам несколько сузить класс рассматриваемых задач и дает возможность строить более ориентированные вычислительные алгоритмы.

Уравнение конвекции / диффузии (1) использует конвективные слагаемые в недивергентном виде. Условие несжимаемости (3) позволяет переписать (1) в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial (v_\alpha u)}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

который соответствует дивергентной записи конвективных слагаемых.

Среди других эквивалентных форм записи уравнения конвекции / диффузии в несжимаемой среде особого внимания заслуживает симметричная форма, когда вместо (1) или (4) используется

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial (v_\alpha u)}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Тем самым конвективные слагаемые берутся в виде полусуммы конвективных слагаемых в дивергентной и недивергентной записях.

В вычислительной гидродинамике (см., например, [13, 14]) часто используются аппроксимации конвективных слагаемых в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2} v_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} u \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{6}$$

Аналогичная форма уравнения конвекции / диффузии на основе конвективных слагаемых в дивергентной форме имеет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial (v_\alpha u)}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} u \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

Тем самым для несжимаемой среды задача конвекции / диффузии может рассматриваться как задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка (1) (или уравнений (4)—(7)).

2. Принцип максимума. Для рассматриваемых задач конвекции / диффузии выполнен принцип максимума, который формулируется в следующем виде.

Теорема 1. *Пусть $u(x) \leqslant 0$ ($u(x) \geqslant 0$) на границе области Ω и $f(x) \leqslant 0$ ($f(x) \geqslant 0$) в уравнении (1) (или в уравнениях (4)—(7)). Тогда $u(x) \leqslant 0$ ($u(x) \geqslant 0$) во всей области Ω.*

Принцип максимума для эллиптических уравнений с недивергентными подчиненными членами (уравнение конвекции / диффузии в форме (1)) хорошо известен [15]. Некоторые более общие результаты в этом направлении приведены в [1]. Остановимся на рассмотрении уравнений (4)—(7).

Доказательство проводится от противного. Будем считать, что при выполнении $u(x)\leqslant 0$, $x\in\partial\Omega$ и $f(x)\leqslant 0$, $x\in\Omega$ имеется область Ω^*, целиком лежащая внутри Ω, в которой $u(x)>0$. Для уравнения (4) с конвективными слагаемыми в дивергентном виде доказательство проведем на основе интегрирования уравнения (4) по подобласти Ω^*. С учетом $u(x)=0$, $x\in\partial\Omega^*$ и теоремы о дивергенции имеем

$$-\int\limits_{\partial\Omega^*}\frac{\partial u}{\partial n}dx=\int\limits_{\Omega^*}f(x)dx, \tag{8}$$

где $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к границе $\partial\Omega^*$. В силу наших предположений о положительности решения в подобласти Ω^* левая часть (8) отрицательна, а правая неотрицательна. Полученное противоречие и дает доказываемое неравенство $u(x)\leqslant 0$, $x\in\Omega$. Доказательство принципа максимума для уравнений (5)—(7) проводится однотипно, поэтому можно ограничиться уравнением (5). В условиях $u(x)\leqslant 0$, $x\in\partial\Omega$ и $f(x)\leqslant 0$, $x\in\Omega$ предположим, что в подобласти Ω^* $((\Omega^*\cup\partial\Omega^*)\subset\Omega)$ $u(x)>0$. Домножим уравнение (5) на $u(x)$ и проинтегрируем его по Ω^*. Используя формулу Грина, приходим к равенству

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\int\limits_{\partial\Omega^*}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2dx=\int\limits_{\Omega^*}f(x)u(x)dx.$$

Снова это равенство не может иметь места, и поэтому $u(x)\leqslant 0$ во всей области Ω. Случай $u(x)\geqslant 0$, $x\in\partial\Omega$ и $f(x)\geqslant 0$, $x\in\Omega$ рассматривается аналогично, переходя к новой неизвестной, равной $-u(x)$. Это завершает доказательство теоремы.

На основе сформулированного принципа максимума устанавливаются однозначная разрешимость краевых задач конвекции / диффузии и соответствующие априорные оценки в равномерной норме.

3. Принцип максимума для разностных уравнений. Естественно требовать от разностного аналога задач конвекции / диффузии выполнения принципа максимума. Для построения разностной схемы на пятиточечном шаблоне «крест» в прямоугольнике Ω введем обычную равномерную по каждому направлению сетку $\bar{\omega}=\omega\cup\partial\omega$ с шагами h_1 и h_2. Пусть ω — множество внутренних узлов, т. е. $\omega=\{x\,|\,x=(x_1,x_2),\ x_\alpha=i_\alpha h_\alpha,\ i_\alpha=1,2,\dots,N_\alpha-1,\ N_\alpha h_\alpha=l_\alpha,\ \alpha=1,2\}$, а $\partial\omega$ — множество граничных узлов. Разностное решение задачи конвекции / диффузии обозначим $y(x)$, $x\in\bar{\omega}$. Прежде чем строить конкретные разностные схемы, сформулируем принцип максимума для разностных уравнений.

Пятиточечное разностное уравнение во внутренних узлах сетки будем записывать в следующей форме:

$$\begin{gathered}A(x)y(x)=B_1^+(x)y(x_1+h_1,x_2)+B_1^-(x)y(x_1-h_1,x_2)+\\+B_2^+(x)y(x_1,x_2+h_2)+B_2^-(x)y(x_1,x_2-h_2)+F(x),\quad x\in\omega.\end{gathered} \tag{9}$$

В граничных узлах в соответствии с (2) положим

$$y(x)=g(x),\quad x\in\partial\omega. \tag{10}$$

Сформулируем достаточные условия выполнения принципа максимума для разностной задачи (9), (10).

Теорема 2. *Пусть в уравнении (9)*

$$A(x)>0,\quad B_\alpha^\pm(x)>0,\quad \alpha=1,2. \tag{11}$$

Если $y(x)\leqslant 0$ $(y(x)\geqslant 0)$ в граничных узлах и $F(x)\leqslant 0$ $(F(x)\geqslant 0)$ в уравнении (9), то $y(x)\leqslant 0$ $(y(x)\geqslant 0)$ и во внутренних узлах сетки при выполнении условия

$$D(x)\geqslant 0,\quad x\in\omega, \tag{12}$$

где

$$D(x)=A(x)-\sum_{\alpha=1}^{2} B_\alpha^{+}(x)-\sum_{\alpha=1}^{2} B_\alpha^{-}(x), \tag{13}$$

или

$$D(x)=A(x)-B_1^{+}(x_1-h_1, x_2)-B_1^{-}(x_1+h_1, x_2)-B_2^{+}(x_1, x_2-h_2)-$$
$$-B_2^{-}(x_1, x_2+h_2). \tag{14}$$

Доказательство принципа максимума при выполнении (11)—(13) хорошо известно [2, 16] и проводится от противного.

Рассмотрим случай, когда выполняются условия (11), (12), (14). Пусть сеточная функция $D(x)$ определена согласно (14). Тогда уравнение (9) можно записать в виде

$$D(x)y(x)=(B_1^{+}(x)y(x_1+h_1, x_2)-B_1^{+}(x_1-h_1, x_2)y(x))+$$
$$+(B_1^{-}(x)y(x_1-h_1, x_2)-B_1^{-}(x_1+h_1, x_2)y(x))+(B_2^{+}(x)y(x_1, x_2+h_2)-$$
$$-B_2^{+}(x_1, x_2-h_2)y(x))+(B_2^{-}(x)y(x_1, x_2-h_2)-$$
$$-B_2^{-}(x_1, x_2+h_2)y(x))+F(x),\ x\in\omega. \tag{15}$$

Предположим, что есть некоторое множество внутренних узлов $\omega^*\subset\omega$, такое, что при $y(x)\leqslant 0$, $x\in\partial\omega$ и $F(x)\leqslant 0$, $x\in\omega$ разностное решение $y(x)>0$ при $x\in\omega^*$. По аналогии с непрерывной задачей (теорема 1 для уравнения (4)) просуммируем разностное уравнение (15) по всем $x\in\omega^*$. Это дает следующее равенство:

$$\sum_{x\in\omega^*} D(x)y(x)=\sum_{x\in\omega^*} F(x)+\sum_{x\in\omega^*} S(x)y(x), \tag{16}$$

где $S(x)$ — сеточный оператор, соответствующий правой части разностного уравнения (15).

Для последнего слагаемого в (16) нетрудно получить выражение

$$\sum_{x\in\omega^*} S(x)y(x)=\sum_{x\in\partial\omega^*} G(x)y(x)-\sum_{x\in\tilde{\omega}^*} Q(x)y(x), \tag{17}$$

где $\partial\omega^*$ — множество граничных узлов для подобласти Ω^*, для которой ω^* — множество внутренних узлов, а $\tilde{\omega}^*$ — множество приграничных узлов. Сеточные функции $G(x)$ и $Q(x)$ в (17) определяются значениями $B_\alpha^{\pm}(x)>0$, $\alpha=1, 2$, в соответствующих узлах, и в силу (11) $G(x)>0$, $Q(x)>0$.

Для доказательства (17) запишем (см. (15))

$$S(x)=\sum_{\alpha=1}^{4} S_\alpha(x), \tag{18}$$

где, например,

$$S_1(x)y(x)=B_1^{+}(x)y(x_1+h_1, x_2)-B_1^{+}(x_1-h_1, x_2)y(x). \tag{19}$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\sum_{x\in\omega^*} s_1(x)y(x)=\sum_{x_2\in\omega_2^*}\ \sum_{x_1\in\omega_1^*(x_2)} s_1(x)y(x),$$

где $\omega_1^*(x_2)=\{x_1\,|\,x_1'(x_2)\leqslant x_1\leqslant x_1''(x_2)\}$. Принимая во внимание (19), получим

$$\sum_{x_1\in\omega_1^*(x_2)} S_1(x)y(x)=\sum_{x_1\in\omega_1^*(x_2)} (B_1^{+}(x)y(x_1+h_1, x_2)-$$
$$-B_1^{+}(x_1-h_1, x_2)y(x))=B_1^{+}(x_1'', x_2)y(x_1''+h_1, x_2)-$$

$$-B_1^+(x_1'-h_1, x_2)y(x_1', x_2) = G(x_1''+h_1, x_2)y(x_1''+h_1, x_2) -$$
$$- Q(x_1', x_2)y(x_1', x_2).$$

Аналогично определяются сеточные функции $G(x)$, $Q(x)$ и для других слагаемых в (18).

В силу наших предположений о $y(x)$ из (17) имеем

$$\sum_{x\in\omega^*} S(x)y(x) \leqslant 0,$$

поэтому правая часть (16) неположительна. Но при выполнении (12) левая часть (16) положительна. Снова приходим к противоречию, поэтому при $y(x) \leqslant 0$, $x \in \partial\omega$ и $F(x) \leqslant 0$, $x \in \omega$ имеет место неравенство $y(x) \leqslant 0$ и во внутренних узлах сетки.

Случай $y(x) \geqslant 0$, $x \in \partial\omega$, $F(x) \geqslant 0$, $x \in \omega$, рассматривается аналогично с заменой $y(x)$ на $-y(x)$.

Для самосопряженной разностной задачи, записанной в виде (9), имеем

$$B_i^+(x) = B_i^-(x_1 + (2-i)h_1, x_2 + (i-1)h_2), \quad i = 1, 2.$$

В этих условиях достаточные условия монотонности (12), (13) и (12), (14) совпадают друг с другом.

Доказанная теорема 2 дает разностный аналог принципа максимума для уравнений конвекции / диффузии с конвективными слагаемыми в недивергентном (уравнение (1)) и дивергентном (уравнение (4)) виде.

При естественной нумерации узлов двумерного разностного уравнения (см. также одномерную задачу) условие (12), (13) соответствует слабому диагональному преобладанию по строкам, а условие (12), (14) — по столбцам [17].

4. Монотонные разностные схемы. Полученные достаточные условия монотонности пятиточечных разностных схем используем для построения простейших монотонных схем для задач конвекции / диффузии (1), (2) и (2), (4).

Будем использовать стандартные безындексные обозначения теории разностных схем [2]. Для правой и левой разностных производных по переменной x_α, $\alpha = 1, 2$, имеем

$$w_{x_\alpha} = (w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha))/h_\alpha, \quad w_{\bar{x}_\alpha} = (w(x_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha))/h_\alpha, \alpha = 1, 2.$$

Для центральной производной используется выражение

$$w_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = 2^{-1}(w_{x_\alpha} + w_{\bar{x}_\alpha}) = (w(x_\alpha + h_\alpha) - w(x_\alpha - h_\alpha))/(2h_\alpha), \quad \alpha = 1, 2,$$

и пусть Λ — двумерный разностный оператор Лапласа:

$$\Lambda y = -\sum_{\alpha=1}^{2} y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Поставим в соответствие краевой задаче (1), (2) следующую разностную задачу:

$$\sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(x) y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + \Lambda y = \varphi(x), \quad x \in \omega, \tag{20}$$

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \partial\omega. \tag{21}$$

В простейшем случае для достаточно гладких коэффициентов и решения дифференциальной задачи $b_\alpha(x) = v_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $\varphi(x) = f(x)$, $x \in \omega$, $\mu(x) = g(x)$, $x \in \partial\omega$.

Схема (20), (21) с центральными разностями записывается в виде (9) при

$$A(x) = 2(h_1^{-2} + h_2^{-2}),$$

$$B_i^{\pm}(x) = h_i^{-2} \mp b_i(x)/(2h_i), \quad i=1, 2,$$

и $F(x)=\varphi(x)$, $x\in\omega$. Условия монотонности (12), (13) для этой разностной схемы будут выполнены всегда, а вот условия (11) — только при

$$h_\alpha \max_{x\in\omega} |b_\alpha(x)| < 2, \ \alpha=1, 2. \qquad (22)$$

Величины $\theta_\alpha(x) = 2^{-1} h_\alpha b_\alpha(x)$, $\alpha=1, 2$, характеризуют отношение конвективного и диффузионного переноса на используемой сетке (локальное сеточное число Рейнольдса в задачах гидродинамики, сеточное число Пекле в задачах теплообмена).

Для уравнения конвекции / диффузии с конвективными слагаемыми в дивергентной форме (уравнение (4)) разностное уравнение с центральными разностями имеет вид

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (b_\alpha(x)y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + \Lambda y = \varphi(x), \ x\in\omega. \qquad (23)$$

Для проверки условий монотонности схемы (21), (23) запишем уравнение (23) в виде (9) с

$$A(x) = 2(h_1^{-2}+h_2^{-2}), \ B_i^{\pm}(x) = h_i^{-2} \mp b_i(x_1 \pm (2-i)h_1, x_2 \pm (i-1)h_2)/(2h_i),$$
$$i=1, 2. \qquad (24)$$

Использование обычных достаточных условий монотонности (11)—(13) приводит прежде всего к ограничениям типа (22) (условия (11)):

$$\max_{x\in\bar\omega} |\theta_\alpha(x)| < 1, \ \alpha=1, 2. \qquad (25)$$

Сформулируем дополнительные ограничения. Из (13), (24) имеем

$$D(x) = (2h_1)^{-1}(b_1(x_1+h_1, x_2) - b_1(x_1-h_1, x_2)) +$$
$$+ (2h_2)^{-1}(b_2(x_1, x_2+h_2) - b_2(x_1, x_2-h_2)).$$

Поэтому условие (12) будет выполнено только при

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (b_\alpha(x))_{\overset{\circ}{x}_\alpha} \geqslant 0, \ x\in\omega. \qquad (26)$$

Заметим, что для несжимаемых сред это условие будет выполнено при выборе аппроксимации компонент скорости $b_\alpha(x)$, $\alpha=1, 2$, с выполнением условия несжимаемости (3) в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (b_\alpha(x))_{\overset{\circ}{x}_\alpha} = 0, \ x\in\omega.$$

Однако разностная схема (21), (23) может быть монотонной и без выполнения условий (26). Для доказательства этого вместо (12), (13) используются достаточные условия устойчивости в виде (12), (14). Для схемы (9), (24) эти условия выполнены всегда, поэтому для монотонности достаточно выполнения обычных условий (25).

Среди безусловно монотонных разностных схем для задач конвекции / диффузии необходимо выделить простейшие разностные схемы с направленными разностями. Определим сеточные функции $b_\alpha^{\pm}(x)$, $\alpha = 1, 2$, следующим образом:

$$b_\alpha(x) = b_\alpha^{+}(x) + b_\alpha^{-}(x),$$
$$b_\alpha^{+}(x) = 2^{-1}(b_\alpha(x) + |b_\alpha(x)|) \geqslant 0,$$
$$b_\alpha^{-}(x) = 2^{-1}(b_\alpha(x) - |b_\alpha(x)|) \leqslant 0.$$

Вместо разностной схемы с центральными разностями (20) рассмотрим разностную схему

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \left(b_\alpha^+(x) y_{\bar{x}_\alpha} + b_\alpha^-(x) y_{x_\alpha}\right) + \Lambda y = \varphi(x), \quad x \in \omega. \tag{27}$$

Схема (21), (27) записывается в виде (9) при

$$\begin{gathered} A(x) = 2\left(h_1^{-2} + h_2^{-2} + h_1^{-1}|b_1(x)| + h_2^{-1}|b_2(x)|\right), \\ B_i^{\pm}(x) = h_i^{-2} \mp h_i^{-1} b_i^{\mp}(x), \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{28}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в выполнении достаточных условий монотонности (11)—(13) для схемы (9), (28). Тем самым разностная схема с направленными разностями (21), (27) является безусловно монотонной. Необходимо только иметь в виду, что эта схема в отличие от схемы (20), (21) имеет только первый порядок аппроксимации.

Аналогично строится схема с направленными разностями для задачи (2), (4). Поставим в соответствие уравнению (4) разностное уравнение

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2} \left((b_\alpha^+ y)_{\bar{x}_\alpha} + (b_\alpha^- y)_{x_\alpha}\right) + \Lambda y = \varphi(x), \quad x \in \omega. \tag{29}$$

Это уравнение имеет вид (9) при

$$\begin{gathered} A(x) = 2\left(h_1^{-2} + h_2^{-2} + h_1^{-1}|b_1(x)| + h_2^{-1}|b_2(x)|\right), \\ B_i^{\pm} = h_i^{-2} \mp b_i(x_1 \pm (2-i)h_1,\ x_2 \pm (i-1)h_2)/(2h_i), \\ i = 1, 2. \end{gathered} \tag{30}$$

Для (9), (30) выполнены условия монотонности (11), (12), (14), т. е. схема с направленными разностями (21), (29) для задачи конвекции / диффузии с дивергентными конвективными слагаемыми (уравнение (4)) является безусловно монотонной.

Многие исследования посвящены разработке разностных схем, которые соединяли бы достоинства схем с центральными разностями (второй порядок аппроксимации) и схем с направленными разностями (безусловная монотонность).

5. Регуляризованные монотонные схемы для задач с недивергентными конвективными слагаемыми. Построение безусловно монотонных разностных схем может быть проведено на основе принципа регуляризации разностных схем, сформулированного в работе [12]. Сначала для исходной задачи строится какая-то простейшая разностная схема, не обладающая необходимыми свойствами (аппроксимации, устойчивости, монотонности, экономичности и т. д.). Затем эта разностная схема записывается в некоторой общей (канонической) форме, свойства которой исследованы. Улучшение качеств разностной схемы в необходимую сторону достигается за счет возмущения (регуляризации) операторов разностной схемы.

Будем исходить из некоторой разностной схемы, для которой безусловное выполнение принципа максимума не имеет места. Применительно к рассматриваемой задаче (1), (2) в качестве таковой естественно взять разностную схему с центральными разностями (20), (21). Она является условно монотонной (см. ограничения на шаг сетки (22)).

Построение монотонной схемы на основе схемы второго порядка аппроксимации осуществляется некоторым возмущением сеточных операторов разностной схемы, записанной в каноническом виде (9), так, чтобы для возмущенной схемы достаточные условия монотонности (11)—(13) или (11), (12), (14) были выполнены. Возмущение операторов исходной разностной схемы должно осуществляться так, чтобы другие хорошие качества схемы сохранялись бы. Например, при возмущении схемы с центральными разностями необходимо сохранить второй порядок аппроксимации.

Исходная схема с центральными производными (20), (21) записывается в каноническом виде (9) при определении сеточных функций $A(x)$, $B_\alpha^\pm(x)$, $\alpha=1,2$, согласно (22). Нарушение условий монотонности связано (см. (11)—(13)) с неположительностью $B_\alpha^\pm(x)$, $\alpha=1,2$. Поэтому регуляризация естественно связывается с соответствующим возмущением именно этих коэффициентов. Требование выполнения и (12), (13) приводит нас к необходимости соответствующего возмущения и коэффициентов $A(x)$. В этих условиях достаточно общая запись регуляризованной схемы имеет вид

$$\begin{gathered} A(x)=2(h_1^{-2}(1+R_1)+h_2^{-2}(1+R_2)), \\ B_i^\pm=h_i^{-2}(1+R_i)\mp b_i(x)/(2h_i),\ i=1,2, \end{gathered} \tag{31}$$

где $R_\alpha(x)$, $\alpha=1,2,$— регуляризаторы.

Регуляризованная схема (9), (31) соответствует использованию вместо (20) разностного уравнения

$$\sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(x) y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} (1+R_\alpha(x)) y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \varphi(x),\ x\in\omega. \tag{32}$$

Разностная схема (21), (32) соответствует регуляризации за счет увеличения локальной диффузии. Альтернативой может служить разностная схема с возмущением скорости, когда, например, вместо (32) используется разностное уравнение

$$\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{b_\alpha(x)}{1+R_\alpha(x)} y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} + \Lambda y = \varphi(x),\ x\in\omega.$$

Монотонизация разностных схем основана на том или ином подавлении конвективных слагаемых за счет изменения либо диффузионного коэффициента, либо за счет уменьшения самих конвективных слагаемых. Такие процедуры оправданы только для задач, когда преобладание конвективных слагаемых имеет место только в небольшой части расчетной области. Для того чтобы сохранить качество решения (его монотонность), мы идем на потери аппроксимации в этой локальной области. И в этом смысле важна точность регуляризованной схемы только вне этой области. Поэтому говорим, например, что регуляризованная схема (21), (32) имеет второй порядок аппроксимации. Это утверждение никак не относится к части расчетной области, где монотонизация работает (в части области, где $R_\alpha(x)=O(1)$).

Для схемы (9), (31) условия монотонности (12), (13) всегда выполняются, а (11) приводят к ограничениям (см. (22))

$$1+R_\alpha(x) > |\theta_\alpha(x)|,\ \alpha=1,2,\ x\in\omega. \tag{33}$$

Так как $\theta_\alpha(x)=O(h_\alpha)$, то для сохранения второго порядка достаточно положить $R_\alpha(x)=O(h_\alpha^2)$, $\alpha=1,2$.

Определим класс регуляризованных схем выбором регуляризаторов в виде

$$R_\alpha(x)=\varkappa\theta_\alpha^2(x),\ \alpha=1,2. \tag{34}$$

Достаточное условие монотонности (33) будет при таком выборе выполнено, если в (34) $\varkappa>0{,}25$. К классу регуляризованных безусловно монотонных разностных схем (21), (32), (34) относятся схемы, рассмотренные в работах [18, 19].

Конечно, вместо (34) можно использовать и более сложные регуляризаторы. Таким примером может служить экспоненциальная схема [7, 20], когда регуляризаторы имеют вид

$$R_\alpha(x) = \theta_\alpha(x) \operatorname{cth} \theta_\alpha(x) - 1, \quad \alpha = 1, 2. \tag{35}$$

Экспонециональная схема (21), (32), (35) является безусловно монотонной, имеет второй порядок аппроксимации. Ее основной недостаток обусловлен тем, что вычисление коэффициентов разностной схемы связано с многократным вычислением экспонент. Поэтому естественным является желание упростить коэффициенты разностной схемы, сохранив при этом ее качества.

Используя при малых $\theta_\alpha(x)$ разложение $\operatorname{cth} \theta_\alpha(x) \approx 1/\theta_\alpha(x) + \theta_\alpha(x)/3$, положим в (32)

$$R_\alpha(x) = \theta_\alpha^2(x)/3, \quad \alpha = 1, 2. \tag{36}$$

Схема (21), (32), (36) принадлежит к рассмотренному выше классу разностных схем (21), (32), (34) ($\varkappa = 1/3$). Другие возможности в этом направлении обсуждаются в [10, 21, 22].

Интересно отметить, что достаточные условия (11)—(13) монотонности регуляризованной схемы (21), (32) можно удовлетворить за счет выбора

$$R_\alpha(x) = \varkappa |\theta_\alpha(x)|, \quad \alpha = 1, 2, \tag{37}$$

при $\varkappa \geqslant 1$. Однако в этом случае нарушается порядок аппроксимации — регуляризованная схема (21), (32), (37) имеет первый порядок аппроксимации. В наиболее приемлемом случае регуляризации (37) при $\varkappa = 1$ имеем обычную схему с направленными разностями (21), (27). Действительно,

$$\begin{gathered} b_\alpha(x) y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} - |\theta_\alpha(x)| y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = 2^{-1} (b_\alpha(x) y_{x_\alpha} + b_\alpha(x) y_{\bar{x}_\alpha} - \\ - |b_\alpha(x)| (y_{x_\alpha} - y_{\bar{x}_\alpha})) = b_\alpha^+(x) y_{\bar{x}_\alpha} + b_\alpha^-(x) y_{x_\alpha}, \end{gathered} \tag{38}$$

поэтому от (32), (37) при $\varkappa = 1$ приходим к уравнению (27).

Гибридные монотонные схемы строятся на основе разрывных регуляризаторов $R_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$. Например, широко известная схема [6] соответствует выбору разрывных регуляризаторов простейшего вида

$$R_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & |\theta_\alpha(x)| \leqslant 1, \\ |\theta_\alpha(x)|, & |\theta_\alpha(x)| > 1, \quad \alpha = 1, 2, \end{cases} \tag{39}$$

в регуляризованной разностной схеме (21), (32). Безусловная монотонность гибридной схемы (21), (32), (39) очевидна.

При построении монотонных схем мы исходили из условно монотонной схемы второго порядка аппроксимации. Регуляризация проводилась в направлении сохранения этого порядка с улучшением свойств монотонности. Вторая возможность связана с выбором в качестве первичной безусловно монотонной схемы первого порядка аппроксимации, когда регуляризация проводится с целью повышения порядка аппроксимации. Приведем пример такой регуляризованной схемы.

Будем исходить из безусловно монотонной схемы с направленными разностями первого порядка аппроксимации (27). В качестве регуляризованной схемы возьмем схему

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (b_\alpha^+(x) y_{\bar{x}_\alpha} + b_\alpha^-(x) y_{x_\alpha}) - \sum_{\alpha=1}^{2} (1 + R_\alpha(x)) y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \varphi(x), \quad x \in \omega, \tag{40}$$

которую с учетом (38) удобно записать в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(x) y_{\overset{\circ}{x}_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} (1 + R_\alpha(x) + |\theta_\alpha(x)|) y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \varphi(x), \quad x \in \omega. \tag{41}$$

В (41) для получения схемы второго порядка можно положить $R_\alpha(x) = -|\theta_\alpha(x)| + \varkappa\theta_\alpha^2(x)$, $\alpha = 1, 2$, т. е. мы приходим к рассмотренной ранее схеме (21), (32), (34).

Можно предложить простые регуляризованные схемы (21), (41), непосредственно не связанные с регуляризованными схемами, полученными на основе регуляризованных схем с центральными разностями. Примером может служить следующий выбор регуляризаторов:

$$1 + R_\alpha(x) = 1/(1 + |\theta_\alpha(x)|), \quad \alpha = 1, 2. \tag{42}$$

Схема (21), (41), (42) имеет второй порядок аппроксимации и является безусловно монотонной [8].

6. Задачи с дивергентными конвективными слагаемыми. Для задач конвекции / диффузии с дивергентными конвективными слагаемыми (уравнение (4)) регуляризованные безусловно монотонные разностные схемы строятся аналогично. Заметим, что основная масса публикаций по построению монотонных схем касается задач с недивергентными конвективными слагаемыми, для которых работает принцип максимума в классической формулировке как для дифференциальных, так и для разностных уравнений. При построении безусловно монотонных схем для задач с дивергентными конвективными слагаемыми необходимо ориентироваться на достаточные условия выполнения принципа максимума для разностных схем в виде (11), (12), (14).

Будем исходить из условно монотонной схемы с центральными разностями (21), (23), которая записывается в каноническом виде (9), (24). С учетом (14) регуляризованную схему естественно строить так, что

$$A(x) = 2\sum_{i=1}^{2} h_i^{-2}(1 + R_i(x)),$$

$$B_i^{\pm} = h_i^{-2}(1 + R_i(x_1 \pm (2-i)h_1, x_2 \pm (i-1)h_2)) \mp \tag{43}$$

$$\mp b_i(x_1 \pm (2-i)h_1, x_2 \pm (i-1)h_2)/(2h_i), \quad i = 1, 2.$$

Регуляризованная схема (9), (43) записывается в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2} (b_\alpha(x) y)_{\overset{\circ}{x}_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{2} ((1 + R_\alpha(x)) y)_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} = \varphi(x), \quad x \in \omega. \tag{44}$$

Для регуляризованной схемы (9), (44) условия монотонности (12), (14) выполнены, а (11) приводят к обычным ограничениям

$$1 + R_\alpha(x) > |\theta_\alpha(x)|, \quad \alpha = 1, 2, \quad x \in \bar{\omega}, \tag{45}$$

которые полностью аналогичны условиям (33). Единственное отличие состоит в том, что (33) рассматривается на множестве внутренних узлов, а (45) — на более широком множестве узлов (включаются и граничные узлы).

Дальнейшее рассмотрение проводится аналогично задачам с недивергентными конвективными слагаемыми. В частности, классом безусловно монотонных являются регуляризованные схемы (21), (34), (44) при $\varkappa > 0{,}25$. Полностью аналогично рассматриваются и другие типы регуляризованных схем, например при выборе регуляризаторов согласно (37).

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Самарскому за обсуждение результатов и А. Г. Чурбанову за помощь при подготовке работы.

Литература

1. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М., 1989.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983.
3. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. М., 1990.
4. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М., 1980.
5. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М., 1991.
6. Spalding D. B. // Inter. J. Numer. Meths. Engrg. 1972. Vol. 4. P. 551—559.
7. Allen D. N. DeG. and Southwell R. V. // Quart. J. Mech. Appl. Math. 1955. Vol. 8. P. 129—145.
8. Самарский А. А. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1965. Т. 5. С. 548—551.
9. Берковский Б. М., Полевиков В. К. Вычислительный эксперимент в конвекции. Минск, 1988.
10. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М., 1984.
11. Кареткина Н. В. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1980. Т. 20. С. 236—240.
12. Самарский А. А. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1967. Т. 7. С. 62—93.
13. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.
14. Темам Р. Уравнения Навье — Стокса. Теория и численный анализ. М., 1981.
15. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М., 1951. Т. 1.
16. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., 1976.
17. Стренг Г. Линейная алгебра и ее применение. М., 1980.
18. Briggs D. G. // Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 1975. Vol. 6. P. 233—241.
19. Joseph M. // Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg. 1983. Vol. 39. P. 107—116.
20. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М., 1983.
21. Chien J. C. // Comput. & Fluids. 1977. Vol. 5. P. 15—31.
22. Булеев Н. И. Пространственная модель турбулентного обмена. М., 1989.

Институт математического моделирования РАН

Поступила в редакцию 30 ноября 1993 г.