П. Л. Чебышев, О кройке одежды, *УМН*, 1946, том 1, выпуск 2, 38–42

О КРОЙКЕ ОДЕЖДЫ *).

П. Л. **Чебышев**.

(Сообщение в Association française par l'avancement des sciences 28 августа 1878 г.)

§ 1. Принимая участие в прениях на Конгрессе в Клермон-Ферране в связи с очень интересным сообщением, сделанным Эдуардом Люка о применении математического анализа к тканям, я коснулся другого вопроса о тканях, решение которого при помощи математики может представить известный интерес, а именно, кройки материй при изготовлении одежды или вообще оболочек каких бы то ни было тел. За неимением времени мне не удалось даже вкратце изложить свои мысли по этому вопросу, и я пользуюсь настоящим случаем, чтобы выполнить эту задачу.

§ 2. В нашей одежде имеется одна лишь часть, форма которой совершенно определяется телом, — это спина и бока, поэтому только в отношении этих частей мы можем искать соотношения между формой тела и формой покрывающих его кусков материи.

Чтобы обсудить этот вопрос с общей точки зрения, мы будем рассматривать не только части вышеназванной одежды, но и всякую плотно прилегающую оболочку, назначением которой является покрыть предмет какой-либо формы.

§ 3. Так как в этом случае дело касается изменения формы поверхности, то понятно, что решение является не чем иным, как применением принципов, данных Гауссом в его знаменитой работе, озаглавленной «Общее исследование кривых поверхностей». Но, чтобы получить из данных принципов решение нашего вопроса, необходимо определить природу изменений, претерпеваемых элементами материи, когда она становится оболочкой тела какой бы то ни было формы.

§ 4. Если подобная оболочка делается из материи с некрупными клетками, то можно легко заметить, что прямоугольные клетки, из которых состоит материя в своей первоначальной форме, изменяются в параллелограммы, углы которых удаляются более или менее от 90°; длина сторон не подвергается значительному изменению.

Следовательно, можно допустить, по крайней мере в качестве первого приближения, что материя, изгибаясь для покрывания какого-либо тела, не изменяет ничего кроме углов наклона нитей основы и нитей утка, в то время как длина нитей остаётся та же.

---

*) Здесь воспроизводится перевод с французского рукописи П. Л. Чебышева, выполненный Ф. Г. Поповым и опубликованный Академией Наук (Архив Истории науки и техники, вып. 9, 1936 г.); ввиду явных опечаток в формулах (6) и (7) нами сделаны соответствующие исправления. (*Ред.*).

§ 5. Из этого мы заключаем, что материя может оказать заметное сопротивление силе растяжения лишь в том случае, когда последняя направлена по длине нитей основы или нитей утка.

§ 6. С другой стороны, для того чтобы эти нити, подверженные силе растяжения, направленной по их длине, оставались в равновесии на поверхности тела, они должны представлять собою линии наикратчайших расстояний.

Это условие, кроме исключительных случаев, может быть строго выполнено в каждой части оболочки лишь одной нитью основы и одной нитью утка. Положение этих нитей, как мы увидим, определяет вполне положение всех других. Для того чтобы элементы материи изменялись как можно меньше по соседству с этими нитями, обыкновенно за направление нитей берут направление двух линий кратчайшего расстояния, пересекающихся под прямым углом.

§ 7. Возьмём эти линии за первоначальные оси координат, считая координатами длину нитей основы или нитей утка, которые мы обозначим буквами x и y.

Эти координаты будут прямолинейны и прямоугольны, когда кусок материи имеет свою первоначальную плоскую форму. Они будут криволинейными в случае, когда материя облегает тело, и тогда они определяют точки поверхности, покрытой различными частями материи; таким образом, в обоих случаях координаты одинаковых составных частей будут иметь одинаковое значение.

§ 8. Чтобы найти расстояние между двумя соседними точками материи, координаты которых суть x, y; $x+dx$; $y+dy$, мы получаем в первой системе координат, когда материя имеет свою плоскую первоначальную форму:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Переходя к случаю, когда материя изогнута, мы замечаем, что тогда, соответственно вышесказанному, прямоугольник, определяемый 4 точками

$$x,\ y;\quad x+dx,\ y;\ x,\ y+dy;\quad x+dx,\ y+dy$$

на материи в её первоначальной форме, переходит в параллелограмм, и тогда расстояние между точками

$$x,\ y;\quad x+dx;\quad y+dy$$

определяется равенством

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2\cos\varphi\, dx\, dy, \tag{1}$$

где φ обозначает угол, образованный нитями основы и нитями утка в точке (x, y).

Расстояние между двумя элементами материи изменяется, когда материя будет облегать тело, и это изменение будет больше или меньше в зависимости от величины $\cos\varphi$ и отношения $\frac{dy}{dx}$.

Применяя к этому выражению ds^2 общую формулу, данную Гауссом для определения кривизны поверхностей, мы получим

$$K\sin^2\varphi = \frac{\partial^2\cos\varphi}{\partial x\,\partial y}, \tag{2}$$

где K мы обозначаем кривизну поверхности в точке (x, y) *).

*) В этой формуле опущены некоторые члены, что, однако, не влияет на результаты последующих вычислений. (*Ред.*)

§ 9. Чтобы перейти от системы координат, которые нам дают нити материи на поверхности облегаемого ею тела, к координатам, наиболее подходящим для исследования поверхности, мы должны определить кратчайшие расстояния различных точек от первоначальных нитей, взятых нами за оси координат x, y.

Этого легко достигнуть, воспользовавшись уравнением кривой наименьшего расстояния, даваемой следующей формулой вариационного исчисления:

$$\partial \int ds = 0,$$

которая на основании (1) будет:

$$\partial \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dx\,dy\cos\varphi} = 0.$$

Отсюда следует

$$\sin^2\varphi \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\partial \cos\varphi}{\partial x}\left(1 + \cos\varphi \frac{dy}{dx}\right) - \frac{\partial \cos\varphi}{\partial y}\left(\cos\varphi + \frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0. \tag{3}$$

§ 10. Заметив, что ось x, уравнение которой есть

$$y = 0,$$

представляет, как мы сказали, одну из кривых кратчайшего расстояния, мы находим, применяя предыдущее уравнение,

$$\frac{\partial \cos\varphi}{\partial x} = 0,$$

т. е. что угол φ не изменяется вдоль оси x. Так как этот угол прямой в точке пересечения осей x, y, можно притти к заключению, что $\varphi = 90^\circ$ во всех точках оси x.

То же самое находим относительно оси y. Из этого заключаем, что $\cos\varphi$ будет обращаться в нуль каждый раз, когда $x = 0$ или $y = 0$; следовательно, $\cos\varphi$ может быть разложен в следующий ряд:

$$\cos\varphi = xy\,(A_0 + A_1x + A_2y + \ldots).$$

Внося величину $\cos\varphi$ в уравнение (2) и предположив, что кривизна K разлагается в ряд

$$K_0 + K_1x + K_2y + \ldots,$$

находим

$$A_0 = K_0; \quad A_1 = \frac{K_1}{2}; \quad A_2 = \frac{K}{2}, \ldots,$$

а отсюда

$$\cos\varphi = xy\left(K_0 + \frac{K_1}{2}x + \frac{K_2}{2}y + \ldots\right). \tag{4}$$

§ 11. С помощью разложения в ряд $\cos\varphi$ нетрудно получить из уравнения (3) общее выражение y для всех точек, расположенных на линиях, представляющих самые короткие расстояния от различных точек поверхности до оси oy.

Обозначив через U величину y в точке пересечения этих кривых с осью oy и заметив, что эти кривые должны пересекать ось oy под прямым углом, получим для $x=0$, $y=U$: $\frac{dv}{dx}=0$.

В этом случае разложение y в ряд должно принять следующую форму:

$$y=U+B_2x^2+B_3x^3+\ldots$$

Подставив эту величину y в уравнение (3) и заменив $\cos\varphi$ его значением (4), находим, приравняв нулю члены уравнения с x^0, x, x^2, значения для B_2 и B_3:

$$B_2=-\frac{K_0}{2}U-\frac{K_2}{4}U^2;\quad B_3=\frac{K_1U}{6}.$$

Отсюда получим

$$y=U-\left(\frac{K_0}{2}U+\frac{K_2}{4}U^2\right)x^2-\frac{K_1U}{6}x^3\ \ldots \tag{5}$$

§ 12. Принимая во внимание уравнение (5), получаем

$$s=\int\limits_0^x\sqrt{v'^2+1+2y'\cos\varphi}\,dx$$

$$s=x-\frac{1}{6}\left(K_0^2U^2+K_0K_2U^3+\frac{1}{4}K_2^2U^4\right)x^3-\frac{1}{8}\left(K_0K_1U^2+\frac{1}{2}K_1K_2U^3\right)x^4+\ldots \tag{6}$$

Это уравнение даст нам общее выражение кратчайшего расстояния от оси oy; здесь координата x имеет любое значение, а координата y имеет величину, определяемую формулой (5).

Что касается значения U, то оно определяет на оси oy точку, ближайшую к точке x, y. Эта величина вместе с величиной s даёт нам удобную систему координат. Этой системой координат мы и будем пользоваться в дальнейшем.

§ 13. Обращая ряд (6), получаем

$$x=s+\frac{1}{6}\left(K_0^2U^2+K_0K_2U^3+\frac{1}{4}K_2^2U^4\right)s^3+ \\ +\frac{1}{8}\left(K_0K_1U^2+\frac{1}{2}K_1K_2U^3\right)s^4+\ldots, \tag{7}$$

что даёт после подстановки в уравнение (5)

$$y=U-\left(\frac{1}{2}K_0U+\frac{1}{4}K_2U^2\right)s^2-\frac{K_1U}{6}s^3\ldots \tag{8}$$

Таким образом, получаем формулы для величин x, y в функциях от U и s.

На основании этих формул можно найти кривые, по которым надо выкраивать различные куски материи, чтобы сделать оболочку какого-нибудь тела (предположив, конечно, что части поверхности, которые должны быть покрыты различными кусками, а также и положение основных нитей известны).

Они могут быть получены при помощи уравнений (7) и (8), определяющих прямоугольные координаты x, y точек кусков материи в их первоначальной плоской форме для различных величин U и s, данных на границе соответствующих частей поверхности тела.

§ 14. Чтобы показать на примере употребление этих формул, мы определили по ним форму, которую надо придать кускам материи, чтобы сделать оболочку, плотно прилегающую к шару, состоящую из двух частей, из которых каждая покроет полностью одно полушарие.

Такой формой будет четырёхсторонняя фигура, состоящая из кривых, углы которых округлены. Первоначальное положение нитей совпадает с диагоналями фигуры.

Вид ограничивающих фигуру кривых приближается к гиперболе.

Чтобы проверить этот результат исчисления, я сделал чехол для шара, разрезая куски сообразно вышесказанному.

Два куска указанной формы, будучи скроены и сшиты, сообразно с тем, что мы описали, дали результат, не оставляющий желать лучшего, как вы сами можете судить. Это доказывает, насколько вышеизложенные соображения согласуются с практикой.

26 августа, Париж.