Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. K. Tsikh, The two-dimensional homology group of the complement of an algebraic curve in CP^2,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1977, Number 5, 122–124

https://www.mathnet.ru/eng/ivm5969

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.169
December 11, 2025, 11:30:12

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1977 МАТЕМАТИКА № 5 (180)

УДК 513.838

А. К. Цих

ДВУМЕРНЫЕ ГОМОЛОГИИ ДОПОЛНЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ КРИВОЙ В CP^2

1°. Пусть V — произвольная алгебраическая кривая в CP^2. Изучается двумерная группа гомологий $H_2(CP^2 \setminus V)$, знание которой необходимо в теории вычетов рациональных функций (см. [1], [2]).

Теорема 1. *Справедливо соотношение* $H_2(CP^2 \setminus V) \simeq H_1(V)$.

Эта теорема является аналогом следующего результата [1]: $H_2(C^2 \setminus T) \simeq H_1(\overline{T})$ (где T—алгебраическое множество в C^2), а $\overline{T}$ — его замыкание в сферической компактификации C^2), вытекающего из двойственности Александера — Понтрягина. С другой стороны, теорема 1 является обобщением на произвольные алгебраические множества для $n=2$ одного результата из [2]: в четномерном пространстве CP^n группы $H_n(CP^n \setminus V)$ и $H_{n-1}(V)$, где V — алгебраическое подмногообразие в CP^n, изоморфны.

Теорема 2. *Пусть* $V=\{(z_0, z_1, z_2): \mathscr{P}(z_0, z_1, z_2)=0\}$, *где* (z_0, z_1, z_2) — *однородные координаты в* CP^2, $\mathscr{P}=\mathscr{P}_1 \cdot \ldots \cdot \mathscr{P}_m$ — *разложение однородного полинома* $\mathscr{P}$ *на неприводимые. Если* ρ_j — *род римановой поверхности алгебраической функции, определяемой уравнением* $\mathscr{P}_j(1, z_1, z_2)=0$, k — *число точек самопересечения кривой* V, α_i — *число элементов кривой* V, *пересекающихся в* i-*й точке самопересечения, то*

$$\operatorname{rang} H_2(CP^2 \setminus V) = \sum_{j=1}^{m} 2\rho_j + \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i - 1) - (m-1). \tag{1}$$

В заключение (п. 3°) приводится конструкция базы гомологий группы $H_2(CP^2 \setminus V)$.

2°. Рассмотрим доказательство теоремы 2. Обозначим через $V'=\{a_1, \ldots, a_l\}$ множество особых точек кривой V (в этих точках V не является подмногообразием многообразия CP^2). Тогда для пары $(W, \widetilde{V})=(CP^2 \setminus V', V \setminus V')$ справедлива точная тройка Лере (см. [4]):

$$H_3(W \setminus \widetilde{V}) \xrightarrow{i_*} H_3(W) \xrightarrow{\omega_*} H_1(\widetilde{V}) \xrightarrow{\delta_*} H_2(W \setminus \widetilde{V}) \xrightarrow{i_*} H_2(W) \xrightarrow{\omega_*} H_0(\widetilde{V}). \tag{2}$$

Из (2) вытекает точность следующей последовательности:

$$0 \to H_3(W) \xrightarrow{\omega_*} H_1(\widetilde{V}) \xrightarrow{\delta_*} H_2(CP^2 \setminus V) \to 0. \tag{3}$$

Действительно, нетрудно проверить, что $W \setminus \widetilde{V} = CP^2 \setminus V$ является двумерным многообразием Штейна, поэтому (см. [5]) $H_3(W \setminus \widetilde{V}) \simeq 0$. Далее, заметим, что удаление конечного числа точек из CP^2 не меняет его двумерную группу гомологий, т. е. $H_2(CP^2) \simeq H_2(CP^2 \setminus V') = H_2(W) \simeq Z$. Образующей в $H_2(W)$ служит класс гомологий $\{\Pi\}$ замкнутой комплексной аналитической прямой Π, лежащей в W. Так как $\Pi \cap \widetilde{V} \neq \varnothing$ (в CP^2 любые две алгебраические кривые пересекаются), то по определению гомоморфизма ω_* (см. [4]) $\ker\{\omega_* : H_2(W) \to H_0(\widetilde{V})\} \simeq 0$ и точность последовательности (3) доказана.

В (3) все группы свободны, поэтому

$$\operatorname{rang} H_2(CP^2 \setminus V) = \operatorname{rang} H_1(\widetilde{V}) - \operatorname{rang} H_3(W). \tag{4}$$

Очевидно, $\widetilde{V}$ гомеоморфно топологической сумме римановых поверхностей, определяемых полиномами $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_m$, причем в этой сумме выколото в общей сложности $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i$ точек (здесь некоторые α_i могут равняться единице, т. к. суммирование ведется не только по точкам самопересечения кривой V, а по всем особым ее точкам). Отсюда

$$\operatorname{rang} H_1(\widetilde{V}) = \sum_{j=1}^{m} 2\rho_j + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i - m. \tag{5}$$

Из компактности CP^2 заключаем, что $\operatorname{rang} H_3(W) = l - 1$, поэтому из (4) и (5) получается (1).

Теперь рассмотрим доказательство теоремы 1. В [3] показано, что ранг группы $H_1(V)$ равен правой части формулы (1). Поскольку группы $H_2(CP^2 \setminus V)$ и $H_1(V)$ свободны, то совпадение размерностей влечет их изоморфизм.

3 . Опишем базу группы $H_2(CP^2 \setminus V)$. Обозначим q-ю неприводимую компоненту кривой V через $V_q = \{(z_0, z_1, z_2) : \mathscr{P}_q(z_0, z_1, z_2) = 0\}$, $q = 1, \ldots, m$, а q_j-й элемент кривой, содержащей точку $a_j \in V'$, через L_{jq_j}, $q_j = 1, \ldots, \alpha_j$, $j = 1, \ldots, l$.

Из доказательства теоремы 2 видно, что система элементов

$$A = \begin{cases} \{\sigma_{i_\nu}\}, \ i_\nu = 1, \ldots, 2\rho_\nu; \ \nu = 1, \ldots, m; \\ \{\gamma_{jq_j}\}, \ q_j = 1, \ldots, \alpha_j; \ j = 1, \ldots, l, \end{cases}$$

где $\sigma_{i_\nu} \subset \widetilde{V}$ — одномерный цикл, соответствующий каноническому циклу (параллели или меридиану сферы с ручками) римановой поверхности, определяемой полиномом $\mathscr{P}_\nu$, а $\gamma_{jq_\nu} = S_j \cap L_{jq_j}$ (S_j — сфера малого радиуса с центром в a_j) является системой образующих группы $H_1(\widetilde{V})$. Поскольку в (3) δ_* — эпиморфизм, то система $\delta_*(A)$ порождает группу $H_2(CP^2 \setminus V)$, причем для элементов из $\delta_*(A)$ выполняются следующие соотношения:

а) $\sum\limits_{q_j=1}^{\alpha_j} \delta_* \{\gamma_{iq_j}\} = 0, \quad j = 1, \ldots, l;$

б) $\sum\limits_{jq:\, L_{jq_j} \subset V_k} \delta_* \{\gamma_{jq_j}\} = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$

Соотношения а) следуют из точности (3) и из того, что $\sum\limits_{q_j=1}^{\alpha_j} \delta_* \{\gamma_{iq_j}\} = \delta_* (\omega_* \{S_j\})$. Справедливость б) вытекает из соотношений $\sum\limits_{jq_j:\, L_{jq_j} \subset V_k} \{\gamma_{jq_j}\} = 0$, которые, в свою очередь, следуют из того, что сумма определенным образом ориентированных циклов, окружающих все выколотые точки сферы с ручками, гомологична нулю.

Предположим, что $\gamma_{j\alpha_j} \subset V_m$, если $a_j \in V_m$, чего всегда можно добиться перенумерацией элементов кривой V, пересекающихся в точке $a_j \subset V'$. Обозначим через $\{\gamma_j\}$, $j = 1, \ldots, m-1$, такие элементы из A, что $\gamma_j \subset V_j$, причем элемент кривой V_j, содержащий цикл γ_j, пересекается с V_m по некоторой точке из V'. Такие циклы также можно выбрать, т. к. $V_j \cap V_m \neq \varnothing$, $j = 1, \ldots, m-1$.

Рассмотрим следующую систему элементов группы $H_2(CP^2 \setminus V)$:

$$B = \delta_* (A) \setminus \{\delta_* \{\gamma_{1\alpha_1}\}, \ldots, \delta_* \{\gamma_{l\alpha_l}\}, \delta_* \{\gamma_1\}, \ldots, \delta_* \{\gamma_{m-1}\}\}.$$

Используя соотношения а) и б), легко показать, что система B порождает систему $\delta_* (A)$, а следовательно, и группу $H_2(CP^2 \setminus V)$. Так как число элементов системы B равно рангу группы $H_2(CP^2 \setminus V)$, то B является базой гомологий этой группы.

Автор выражает глубокую благодарность А. П. Южакову за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Южаков А. П. Элементы теории многомерных вычетов. Красноярск, 1975
2. Griffiths P. A. On the periods of certain rational integrals. Ann. Math. v. 90, 1969, p. 460—541.
3. Южаков А. П. Группы гомологий приводимой алгебраической кривой в CP^2. Тез. докл. Всесоюзн. конф. по теории функций комплексного переменного. Харьков. 1971, с. 242—243.
4. Лере Ж. Дифференциальное и интегральное исчисления на комплексном аналитическом многообразии. М., ИИЛ. 1961.
5. Фукс Б. А. Специальные главы аналитических функций многих комплексных переменных. М., Физматгиз, 1963.

г. Красноярск

Поступила
14 XII 1976

Т. А. Тарасова. Об одном итерационном методе решения задачи выпуклого программирования с бесконечной системой ограничений

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Для решения задачи выпуклого программирования с бесконечной системой ограничений — неравенств предлагается итерационный метод, использующий фейеровские операторы. Доказывается сходимость этого метода. (Работа поступила в журнал „Математика“ 6 XII 1976.)