

УДК 513.83

ТРЕХМЕРНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, ЗАДАВАЕМОЕ 4-ЦВЕТНЫМ ГРАФОМ, ДВУЛИСТНО НАКРЫВАЮЩИМ 4-ЦВЕТНЫЙ ОСТОВ ОКТАЭДРА

М. А. Овчинников

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
ovch_csu_ru@mail.ru

В теории многообразий 4-цветные графы используются как способ задания трёхмерных многообразий. Работа посвящена распознаванию трёхмерного многообразия, заданного одним 4-цветным графом с 12 вершинами, обладающим большим количеством симметрий. Показано, что многообразие является дополнительным пространством зацепления в трёхмерной сфере, состоящим из колец Борромео и окружности — оси вращения 3-го порядка колец Борромео. Получены некоторые другие естественные представления данного многообразия. Показано также, что данный 4-цветный граф двулистно накрывает 4-цветный граф октаэдра.

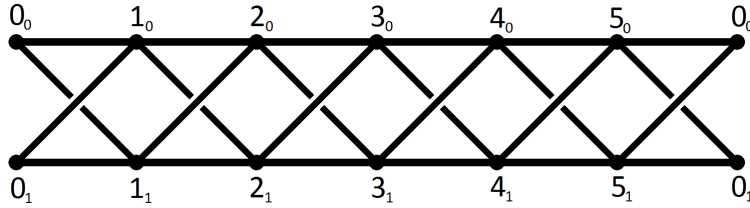
Ключевые слова: *маломерная топология, трёхмерные многообразия, 4-цветные графы, зацепления, замкнутые косы, спайны.*

1. Введение и формулировка основных результатов

В теории трёхмерных многообразий *4-цветным графом* называется регулярный граф степени 4, у которого каждое ребро снабжено одним из 4 цветов так, что цвета смежных рёбер различны [1]. 4-цветный граф задаёт склейку тетраэдров следующим образом. Каждой вершине графа сопоставляется тетраэдр, у которого в те же все 4 цвета окрашены грани и вершины так, что цвет вершины совпадает с цветом противоположной грани. Грани тетраэдров отождествляются по схеме графа так, чтобы совпадали цвета отождествляемых вершин и граней. В результате получается однозначно определённое топологическое пространство. Оно может оказаться замкнутым трёхмерным многообразием, и тогда говорят, что оно задаётся данным 4-цветным графом. Может оказаться, что получившееся пространство не является многообразием, но становится многообразием с краем без сферических компонент после удаления из пространства окрестностей точек, которые не являются трёхмерными шарами. В этом случае также говорят, что получившееся трёхмерное многообразие с краем задаётся данным 4-цветным графом [1].

В работе рассматривается следующий 4-цветный граф G с 12 вершинами. В качестве вершин графа G для удобства описания возьмём элементы прямого произведения циклических групп $Z_6 \times Z_2$. Элементы групп Z_6 и Z_2 будем называть соответственно первой и второй координатами вершины. Вершины (a, b) и (c, d) в графе G соединены ребром, если $c = a \pm 1$.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории квантовой топологии Челябинского государственного университета (грант правительства РФ № 14.Z50.31.0020).

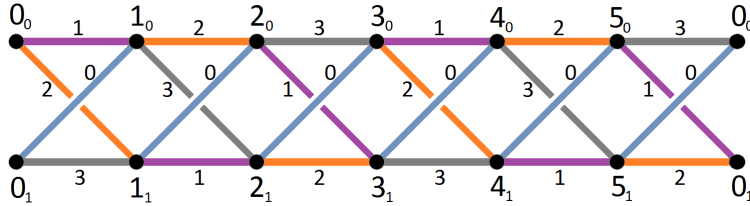
Рис. 1. Граф G . Вершины (a, b) обозначены как a_b

Очевидно, что у каждой вершины (a, b) 4 соседа: $(a + 1, 0)$, $(a - 1, 0)$, $(a + 1, 1)$, $(a - 1, 1)$. Поэтому данный граф является регулярным степени 4. Симметрии графа G описываются в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть три отображения на множестве вершин графа G задаются формулами $f_1((a, b)) = (a + 1, b)$, $f_2((a, b)) = (-a, b + 1)$, $f_3((a, b)) = (a, b)$, если $a \neq 0$, и $f_3((0, b)) = (0, b + 1)$.

Тогда группа симметрий графа G порождается этими отображениями и изоморфна группе $D_6 \times Z_2^6$ порядка 768, где D_6 — диэдральная группа порядка 12.

Цвета рёбер обозначим цифрами 0, 1, 2, 3. Положим, что цвет 0 имеют рёбра с концами $(a, 0)$ и $(a + 1, 1)$, $a \in Z_6$. Определим для каждого $k = 1, 2, 3$ отображение на вершинах графа G правилом $g_k((a, b)) = (a, b)$, если $a = k \pmod 3$, и $g_k((a, b)) = (a, b + 1)$ в противном случае.

Рис. 2. 4-цветный граф G

Очевидно, каждое такое отображение — инволюция, сохраняющая первую координату вершин. У любого ребра эти отображения дают три различных образа. Полагаем, что рёбра цвета k — это образы рёбер цвета 0 при отображении g_k . Легко убедиться, что каждой вершине инцидентны рёбра всех 4 цветов. Граф G с этой раскраской далее везде в тексте мы называем *4-цветным графом G* .

Для описания симметрий 4-цветного графа G определим ещё два отображения на множестве вершин графа G : $g_4((a, b)) = (a + 1, b)$, $g_5((a, b)) = (-a, b + 1)$. Симметрии 4-цветного графа G описываются в следующей теореме.

Теорема 2. Группа симметрий 4-цветного графа G порождается отображениями g_k , $k = 1, 2, 3, 4, 5$, и изоморфна группе $O \times Z_2$ порядка 48, где O — группа вращений октаэдра.

Обозначим через M 3-многообразие, задаваемое 4-цветным графом G .

Теорема 3. Многообразие M гомеоморфно дополнительному пространству зацепления L в трёхмерной сфере, состоящего из колец Борромео и окружности, являющейся осью вращения 3-го порядка колец Борромео.

Эта теорема немедленно следует из следующей теоремы и представления колец Борромео в виде замкнутой косы. Обозначим символом B альтернированную косу с тремя нитями, проекция замыкания которой является графом октаэдра на сфере. Обозначим через L_1 зацепление, состоящее из замкнутой косы, являющейся замыканием косы B и окружности, зацепляющей замкнутую косу (см. рис. 4).



Рис. 3. Кольца Борромео и окружность — ось вращения 3-го порядка колец Борромео

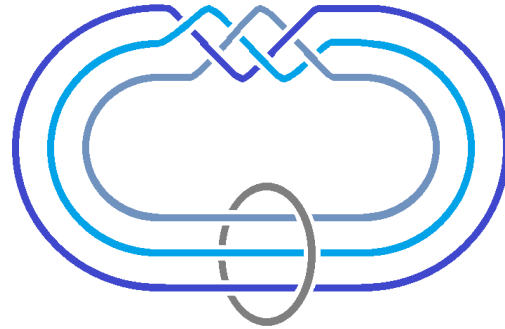


Рис. 4. Зацепление L_1 , состоящее из замкнутой косы B и зацепленной с ней стандартной окружности

Теорема 4. *Многообразие M гомеоморфно дополнительному пространству к зацеплению L_1 в трёхмерной сфере.*

Эту теорему удобно получить на основании следующей теоремы.

Обозначим символом D альтернированную диаграмму зацепления с двумя компонентами в утолщённом торе, проекции которых на торе изотопны друг другу и разрезают тор на два несмежных 2-угольника и два 6-угольника. На рис. 5 тор представлен как 6-угольник с отождествлёнными противоположными сторонами.

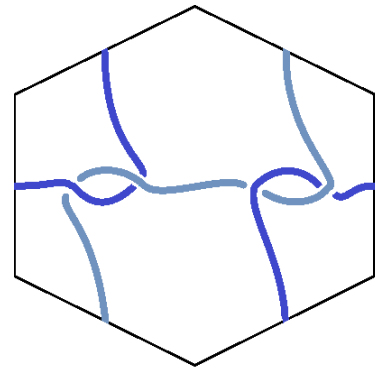


Рис. 5. Диаграмма D зацепления с двумя компонентами в утолщённом торе

Теорема 5. *Многообразие M гомеоморфно дополнительному пространству к зацеплению в утолщённом торе, заданном диаграммой D .*

Отметим особенность терминологии, принятую для краткости. Везде в данной работе под дополнительным пространством к зацеплению в многообразии подразумевается дополнительное пространство к открытой окрестности зацепления. В частности, везде имеем, таким образом, дело с компактными многообразиями (дополнение к зацеплению является, строго говоря, некомпактным многообразием).

2. Доказательства теорем 1–5

Доказательство. Теорема 1. Назовём две вершины *близнецами*, если у них одинаковые соседи. Очевидно, имеем 6 пар близнецов. Рассмотрим получающийся граф из пар близнецов. Это замкнутая ломаная длины 6. При любом автоморфизме исходного графа она должна переходить в себя. Первые два отображения порождают все автоморфизмы, нетривиально действующие на этой ломаной, т. е. диэдральную группу порядка 12. Добавление 3-го образующего позволяет для любой пары близнецов реализовать симметрию, переставляющую этих близнецов и оставляющую неподвижными остальные вершины графа G . \square

Доказательство. Теорема 2. Рассмотрим двулистное накрытие 4-цветного графа октаэдра 4-цветным графом G . Построение этого накрытия легче всего понять из рисунка, на котором ясно видно, что если отождествить все пары вершин (a, b) и $(a + 3, b)$, то все рёбра также разобьются на пары отождествляемых, причём одинакового цвета. При этом возникает 4-цветный граф октаэдра. Пять описанных отображений корректно определены на множестве вершин нашего октаэдра и порождают его вращения. В частности, отображения g_1, g_2, g_3, g_5 дают вращения относительно четырёх различных осей 2-го порядка октаэдра, отображение g_4 даёт вращение относительно оси 3-го порядка. Куб отображения g_4 на октаэдре действует тривиально, а во всей группе симметрий 4-цветного графа G является инволюцией, коммутирующей со всеми остальными симметриями. Эта конструкция с двулистным накрытием графа октаэдра описана в [2] на с. 168. Там же сообщается, что группа автоморфизмов накрывающего графа изоморфна прямому произведению группы вращений октаэдра и группы порядка 2. Отсюда следует утверждение теоремы. \square

Доказательство. Теорема 5. Обозначим через M_1 дополнительное пространство к зацеплению в утолщённом торе, задаваемому диаграммой D . Доказательство использует понятие специального спайна 3-многообразия и одно его важное свойство.

Спайном компактного трёхмерного многообразия с краем называется 2-мерный полиэдр, если в многообразии есть гомеоморфный ему подполиэдр, дополнение к которому в многообразии гомеоморфно прямому произведению края многообразия на полуинтервал.

Спайн называется *специальным*, если связные компоненты множества его регулярных точек являются открытыми дисками, сингулярный граф является регулярным степени 4 хотя бы с одной вершиной, и вершины графа имеют замкнутую окрестность в полиэдре, гомеоморфную конусу над полным графом с 4 вершинами. Вершины сингулярного графа специального спайна называются также *вершинами спайна* (*вершинами полиэдра*). Важным свойством специальных спайнов многообразий с краем является то, что негомеоморфные многообразия не могут иметь одинаковые специальные спайны. Т. е. по своему специальному спайну многообразие с краем восстанавливается однозначно [3].

Построим по диаграмме D специальный спайн P и покажем, что построенный спайн совпадает со спайном, задаваемым 4-цветным графом G . Это будет означать, что многообразия M_1 и M гомеоморфны.

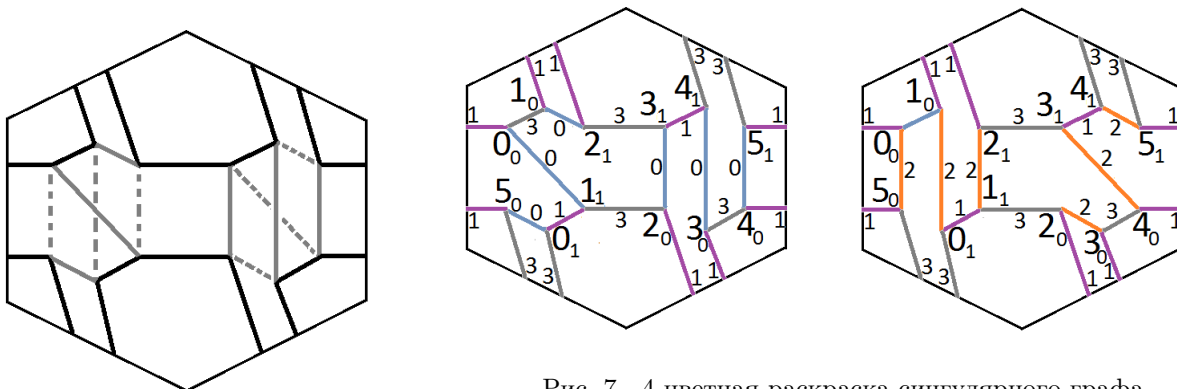
Диаграмма D оказывается достаточно проста, чтобы по ней наглядно изобразить построение спайна и его структуру и затем убедиться в одинаковости построенного спайна и спайна, определяемого 4-цветным графом G .

Будем считать, что для расположения зацепления в утолщённом торе выполнены следующие свойства в соответствии с диаграммой D . Вне окрестностей двойных точек зацепление лежит в некотором срединном торе и совпадает с проекцией зацепления. Для каждой двойной точки диаграммы D две малые дуги, которые являются прообразами данной двойной точки, располагаются вблизи срединного тора по разные стороны от него.

Возьмём замкнутую окрестность объединения двуугольников (как дисков) и остальных 4 рёбер графа проекции в утолщённом торе, содержащую внутри себя наше зацепление. Это полный крендель рода 3, край которого обозначим H . Будем считать, что срединный тор разрезает поверхность H на две половины — верхнюю и нижнюю, и эти поверхности проектируются друг на друга взаимно-однозначно посредством проекции, задаваемой структурой прямого произведения у утолщённого

тора. Обозначим P_0 объединение поверхности H и двух дисков — части срединного тора вне окрестности (вне кренделя). В этом полиэдре сингулярное множество составляют две окружности. Замкнутая окрестность каждой из этих окружностей представляет собой три кольца, приклеенных к окружности одним своим краем. Для каждого двугольника диаграммы добавим к полиэдру P_0 собственный диск, лежащий внутри полного кренделя и своим краем пересекающий линию пересечения поверхности H и срединного тора в 6 точках — такой, что внутренность полного кренделя минус эти два диска является окрестностью зацепления. Расположение этих дисков в кренделе показано на рис. 6. Подробное описание рис. 6 изложено ниже. Полученный полиэдр обозначим P . В нем 12 вершин.

Опишем построение изображения полиэдра P (рис. 6) по диаграмме D зацепления. Проекция поверхности H на срединный тор даёт замкнутую окрестность двугольников и 4 рёбер на торе. Эта окрестность — тор с двумя дырами. На рисунке она изображает построенную нами поверхность H . Для этого мысленно различаем верхний и нижний экземпляры этой окрестности, которые представляют верхнюю и нижнюю половины поверхности H . Каждый из двух собственных дисков в полном кренделе с краем H выберем так, что проекция его края на срединный тор, а значит, и изображение на рисунке, является 6-звенной ломаной с одним самопересечением. Три звена ломаной — это три дуги края диска на верхней половине поверхности H , три звена — на нижней половине. Нижние звенья на рисунке изображаются пунктирно. Четыре звена ломаной отрезают окрестности рёбер графа от окрестности двугольника. Два других звена изображаются пересекающимися хордами внутри окрестности двугольника.

Рис. 6. Спайн P Рис. 7. 4-цветная раскраска сингулярного графа спайна P и разметка его вершин

Покажем, что спайн P совпадает со спайном, задаваемым 4-цветным графом G .

Известно, что приклейка дисков к 4-цветному графу вдоль всех двухцветных циклов даёт специальный спайн многообразия с краем, задаваемого данным 4-цветным графом [1]. На рис. 7 показана разметка вершин и раскраска рёбер, позволяющая непосредственно убедиться в одинаковости 4-цветного сингулярного графа полиэдра P и 4-цветного графа G и на основе этого — в одинаковости соответствующих спайнов. Для наглядности изображены верхняя и нижняя части поверхности H отдельно. \square

Доказательство. Теорема 4. Убедимся, что дополнительное пространство к зацеплению L_1 , изображённому на рис. 4, совпадает с многообразием M_1 из теоремы 5, т. е. с дополнением к зацеплению в утолщённом торе, изображённому на рис. 5.

Дополнение в 3-сфере к тривиальной окружности есть полный тор. Поэтому рассматриваемое многообразие есть дополнение к замкнутой косе B , помещённой в полный тор вдоль его осевой окружности.

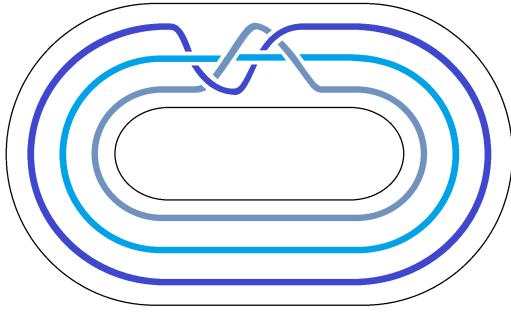


Рис. 8. Замкнутая коса B с выпрямленной одной нитью, совмещённой с осью полного тора — дополнения к стандартной окружности

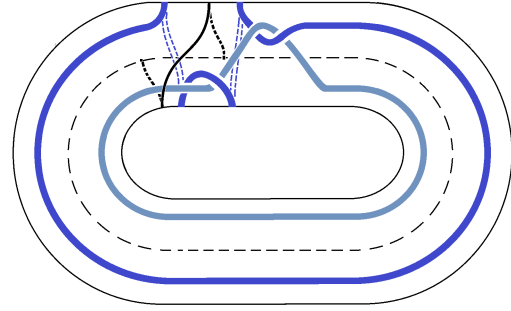


Рис. 9. На торе — диаграмма зацепления и тэта-кривая, пересекающая проекцию зацепления в трёх точках

Совместим одну из 3 компонент косы с осью полного тора, что на рис. 8 показано как выпрямление средней нити косы. Дополнение к оси полного тора в полном торе является утолщённым тором. Таким образом, наше многообразие — это дополнение к некоторому зацеплению с двумя компонентами в утолщённом торе. Проектирование зацепления на тор даёт на торе диаграмму зацепления. Поместим на торе тэта-кривую, пересекающую проекцию зацепления в трёх точках. На рис. 9 изображён тор с получившимися диаграммой зацепления и тэта-кривой. Дополнение к тэта-кривой в торе является шестиугольником. Разрезание тора по тэта-кривой даёт диаграмму D , изображённую на рис. 5, что и доказывает совпадение многообразий. \square

Замечание. По сравнению с традиционным способом изображать тор (с помощью квадрата) шестиугольник позволил сделать диаграмму зацепления и более экономной, и более симметричной.

Доказательство. Теорема 3. Непосредственно видно, что диаграммы зацеплений на рис. 3 и на рис. 4 изотопны. Следовательно, они обозначают одно и то же зацепление. \square

Автор выражает благодарность Е. А. Фоминых за информацию о 4-цветном графе, послужившую отправной точкой для данного исследования.

Список литературы

1. **Cristofori, P.** Compact 3-manifolds via 4-colored graphs [Электронный ресурс] / P. Cristofori, M. Mulazzani // RACSAM. — 2015. — URL: <http://arXiv:1304.5070> (дата обращения: 20.01.2016).
2. **Коксетер, Г. С. М.** Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / Г. С. М. Коксетер, У. О. Дж. Мозер. — М. : Наука, 1980. — 240 с.
3. **Matveev, S.** Complexity theory of three-dimensional manifolds/ S. Matveev // Acta Applicandae Mathematicae. — 1990. — Vol. 19. — P. 101–130.

Поступила в редакцию 14.05.2016

После переработки 20.05.2016

Сведения об авторе

Овчинников Михаил Алексеевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики, Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия; e-mail: ovch_csu_ru@mail.ru.

Chelyabinsk Physical and Mathematical Journal. 2016. Vol. 1, iss. 2. P. 37–43.

A THREE-DIMENSIONAL MANIFOLD DEFINED BY A 4-COLORED GRAPH WHICH IS TWO-FOLD COVERING THE 4-COLORED OCTAHEDRON GRAPH

M.A. Ovchinnikov

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
ovch_csu_ru@mail.ru

In the theory of three-dimensional manifolds regular graphs of degree 4 with edges colored by 4 colors is a way to represent 3-manifolds. The manifold defined by some certain symmetric 4-colored graph with 12 vertices is recognized in the work. It is shown that the manifold is homeomorphic to the complement space to the link in 3-sphere consisting of the Borromean link and a standard circle which is the 3-order rotation axis of the Borromean link. Some other natural presentations of the manifold are found. It is shown also that the 4-colored graph is the two-fold covering of the 4-colored octahedron graph.

Keywords: *low-dimensional topology, 3-dimensional manifolds, links, 4-colored graphs, closed braids, spines.*

References

1. **Cristofori P., Mulazzani M.** Compact 3-manifolds via 4-colored graphs. *RACSAM*, 2015. Available at: <http://arXiv:1304.5070>, accepted 20.01.2016.
2. **Coxeter H.S.M., Moser W.O.J.** *Generators and Relations for Discrete Groups*. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 1980. 172 p.
3. **Matveev S.** Complexity theory of three-dimensional manifolds. *Acta Applicandae Mathematicae*, 1990, vol. 19, pp. 101–130.

Accepted article received 14.05.2016

Corrections received 20.05.2016