А. И. Мальцев, Л. С. Понтрягин, “Непрерывные группы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1941, том 5, выпуск 6, 445–447

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 6 (1941), 445—447 Série mathématique

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

Л. С. ПОНТРЯГИН. Непрерывные группы.

М., 1938, 315 стр.

Рецензируемая книга удостоена Сталинской премии и принадлежит к числу тех работ, появление которых отмечает собою рождение новых и крупных дисциплин Со времени своего выхода в свет (советское издание 1938 г., английский перевод в С.Ш.А. 1939 г.) она оказала и продолжает оказывать сильное и плодотворное влияние на самые широкие круги математиков. Благодаря чрезвычайной ясности и простоте изложения она получила самое широкое распространение и среди студенчества и стала настольной книгой многих тысяч лиц. Чтобы понять причину такого исключительного значения этой книги, достаточно вспомнить общий ход развития данной науки и те сдвиги, которые произошли в математике за последние десятилетия.

Во второй половине прошлого века С. Ли была создана теория таких бесконечных групп, элементы которых можно рассматривать, как точки n-мерного эвклидова пространства, а закон умножения $z_i=\varphi_i\ (x_1,\dots, x_n, y_1,\dots, y_n)$ дается аналитическими функциями φ_i ($z_1,\dots, z_n$—координаты точки z, являющейся групповым произведением точек x и y). Однако функции φ_i приходится предполагать определенными и аналитическими только в некоторой области. В связи с этим и сама теория становится уже не теорией групп, а теорией так называемых локальных групп, свойства которых похожи только на свойства куска группы. С. Ли удалось показать, что изучение этих локальных групп, называемых теперь группами Ли, сводится к изучению объектов чисто алгебраической природы—колец Ли. Этим термином сейчас обозначают n-мерное векторное пространство, в котором кроме сложения векторов и умножения вектора на число определена еще операция коммутирования $[\overline{a}, \overline{b}]$, обладающая свойствами, аналогичными свойствам обыкновенного векторного произведения: коммутатор двух векторов есть однозначно определенный вектор,

$$[\overline{a}, \overline{b}] = -[\overline{b}, \overline{a}],\ [\lambda\overline{a}+\mu\overline{b}, \overline{c}] = \lambda[\overline{a}, \overline{c}]+\mu[\overline{b}, \overline{c}],$$
$$[\overline{a}, [\overline{b}, \overline{c}]]+[\overline{b}, [\overline{c}, \overline{a}]]+[\overline{c}, [\overline{a}, \overline{b}]]=0.$$

Вскоре после создания теории лиевских групп Гильбертом была сформулирована проблема: нельзя ли условие аналитичности функций φ_i в теории Ли заменить более слабым требованием непрерывности их. Эта проблема оказалась чрезвычайно трудной и оказала определяющее влияние на дальнейшее развитие теории групп. Начиная с этого времени, в теории групп Ли можно заметить два течения: одно—это более детальное изучение колец Ли и другое—изучение топологической структуры групп. Первым существенным успехом во втором направлении явилась работа Шрейера 1924 г., в которой было отчетливо сформулировано понятие топологической группы. Введение нового понятия оказалось весьма плодотворным и позволило самому Шрейеру окончательно выяснить взаимоотношения между полным изоморфизмом топологических групп и их локальным изоморфизмом.

Однако решающие успехи, позволившие говорить о возникновении новой математической дисциплины, были сделаны только в 1929—1935 гг. В 1929 г. появилась работа Петера и Вейля, в которой было введено инвариантное интегрирование по группе и с помощью его доказано существование полной системы представлений для компактных групп Ли. Непосредственно после появления этой работы Хаар построил инвариантную меру в локально-компактных топологических группах и тем самым показал возможность переноса результатов Петера-Вейля на произвольные топологические группы. Пользуясь этим, фон Нейман смог решить проблему Гильберта для компактных топологических групп и, таким образом, включить теорию Ли в общую теорию топологических групп.

Почти одновременно с этим Л. С. Понтрягин дал полный анализ структуры компактных топологических групп, который по своему значению выходит далеко за пределы только узкого решения проблемы Гильберта. Дальнейший крупный успех был сделан Л. С. Понтрягиным созданием своей теории абелевых топологических групп и их характеров. Среди замечательных фактов этой теории имеется и полное решение проблемы Гильберта для абелевых групп. Понтрягинская теория характеров сразу завоевала широкое признание, нашла ряд замечательных приложений в различных областях математики и является в настоящее время полем исследования для многих математиков.

Все это богатство новых идей, методов и фактов нашло в рецензируемой книге свое первое законченное и систематическое изложение, которое сделало его доступным широким кругам математиков. Трудно переоценить значение этой книги. Она подвела итог всему предыдущему развитию данной науки и стала отправным пунктом всего дальнейшего развития.

Содержание книги разбито на 9 глав, из которых первые две являются вводными и содержат основные понятия и факты абстрактной теории групп и теоретико-множественной топологии. В гл. III вводится понятие топологической группы, подгруппы, нормального делителя и т. п. и доказываются основные теоремы для них. Более детально излагаются свойства нульмерных групп. В конце главы вводится понятие локальных групп и доказывается ряд их свойств. Начиная с главы IV, идет изложение основных фактов. В самой главе IV излагается общая теория представлений компактных групп, вводится инвариантное интегрирование по группе и доказывается существование полной системы представлений компактных групп. В главе V дается законченное изложение теории абелевых топологических групп, вершиной которой служит понтрягинский закон взаимности. В конце главы в качестве приложения доказывается известная теорема Понтрягина о структуре топологических тел. Глава VI занимает промежуточное положение. В ней вводится, наконец, понятие группы Ли. Однако автор ограничивается здесь только строгим введением основных понятий общей теории лиевских групп и доказательством существования канонических координат, откладывая более подробное изучение их до IX главы. Глава VII снова содержит фундаментальные результаты. В ней подробно изучается структура компактных топологических групп и, в частности, для таких групп дается решение проблемы Гильберта. Глава VIII содержит изложение результатов Шрейера о конструкции и свойствах универсальных накрывающих. На этом заканчивается общая теория топологических групп. Заключительная IX глава содержит уже результаты теории групп Ли. Здесь вводится понятие кольца Ли инфинитезимальной группы и доказываются теоремы Ли о соответствии между группами Ли и кольцами Ли. Далее подробно рассматривается вопрос о построении полной топологической группы по заданной локальной и о соответствии между их подгруппами. Здесь ставится также несколько проблем [одна из них (стр. 298), впрочем, решается в отрицательном смысле ранее приведенным примером (прим. 67)]. В заключение изучается структура компактных связных лиевских групп и приводится классификация Киллинга-Картана простых групп. Конец этой главы носит обзорный характер и поэтому значительное число теорем приведено в нем без доказательств.

Таково содержание этой книги. Написана она чрезвычайно ясно и просто, с полной заботой об удобствах ее читателя. В начале дается схема зависимости отдельных глав. Нумерацией снабжены не только теоремы, но и определения и примеры, что очень облегчает всевозможные ссылки и справки. Первые две главы могут быть с успехом использованы для первоначального изучения абстрактной теории групп и теоретико-множественной топологии.

В заключение хочется высказать два замечания, которые естественно возникают при чтении рецензируемой книги. Первое из них особенно часто возникает у читателей, которые сами хотят работать в области непрерывных групп, и заключается в следующем. Общеизвестно, что в математических теориях важны не только окончательные результаты, но и пути и средства, с помощью которых удалось получить их. Таким важнейшим вспомогательным средством в теории непрерывных групп является теория представлений, которая и сама по себе имеет выдающийся интерес. Однако эта теория, как нам кажется, не занимает в книге того места, которое ей следовало бы уделить. Далее, для той категории читателей, о которой сейчас идет речь, очень интересно было бы узнать, какие проблемы автор считает стоящими перед его наукой на-сегодня, каковы, по его мнению, возможные направления развития дисциплины в дальнейшем, какие проблемы и задачи встречались автору в его работе. Это, может быть, сделало бы книгу формально менее законченной, но зато еще более повысило бы ее действенность.

Второе замечание—более частного характера. В книге сначала излагается общая теория топологических групп. Затем из этих групп выделяются все более частные классы и дается глубокий обзор их свойств. Наконец, выделяется класс лиевских групп и показывается, что их теория сводится к теории колец Ли. Однако сама теория лиевских колец не излагается. Это вполне законно, но для читателя было бы гораздо приятнее, если бы к книге были добавлены две-три главы, в которых с той же ясностью и чистотой излагались бы и основные результаты теории лиевских алгебр.

А. Мальцев