A. I. Kononenko, V. D. Milman, A numerical method for finding asymptotically stable solutions of systems of ordinary differential equations,
Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1966, Volume 167, Number 4, 739–742

Доклады Академии наук СССР
1966. Том 167, № 4

УДК 518:517.91/94

МАТЕМАТИКА

А. И. КОНОНЕНКО, В. Д. МИЛЬМАН

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ УСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 3 VII 1965)

1. При численном решении системы уравнений

$$dx/dt = f(t, x) \quad (f = \{f_i\}_{i=1}^n, \quad x = \{x_i\}_{i=1}^n) \tag{1}$$

типична ситуация, при которой искомое решение асимптотически устойчиво, а начальная точка выбирается правильно. Вместе с тем тот факт, что наличие асимптотической устойчивости устраняет накапливаемые ошибки, не учитывается, и счет ведется таким образом, чтобы обеспечить необходимую при больших t точность на каждом шаге. Указанный недостаток частично преодолевается в настоящей заметке, в которой рассматриваются алгоритмы (типа метода Эйлера) нахождения асимптотически устойчивого в некоторой области* G решения $x^0(t)$ $(\| x^0(t)\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i^0(t)|^2 < M)$ системы (1). Мы предполагаем всюду (и это не будет в дальнейшем оговариваться), что вектор-функция $f(t, x)$ обладает равномерно по t $(0 \leqslant t < \infty)$ ограниченными частными производными по всем аргументам на каждом множестве H, где через H здесь и в дальнейшем обозначается ограниченное множество $H \subset G$.

Заметим, что к указанной задаче в том случае, когда $x^0(t) \equiv x^0$ (т. е. уравнение (1) обладает асимптотически устойчивой в области G особой точкой), сводится вопрос о нахождении минимума** непрерывно дифференцируемого функционала $F(x)$, имеющего единственную стационарную точку в области $G = \{x\colon F(x) < F(x_0)\}$, а также вопрос о нахождении седловой точки*** выпукло-вогнутого функционала при специальных ограничениях. Таким образом, в перечисленных случаях применима теорема 2 настоящей заметки.

2. При доказательстве теорем сходимости существенную роль играет функция Ляпунова $V(t, x)$. В дальнейшем мы будем пользоваться тем, что в наших предположениях относительно системы (1) существует функция Ляпунова $V(t, x)$, обладающая следующими свойствами****:

а) существуют непрерывные функции $W_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$ такие, что $W_3(x) \geqslant V(t, x) \geqslant W_1(x)$, где $W_3(x^0(t)) \equiv 0$, $W_1(x) > 0$ при $x \neq x^0(t)$

* Под областью асимптотической устойчивости понимается такая область G, что если $x_0 \in G$, то траектория $x(x_0, t_0, t) \in G$ при $t \geqslant t_0$.

** Этот случай подробно исследован в статье И. М. Глазмана [1]. Методы настоящей заметки близки к методам указанной работы; в частности, описанные в заметке алгоритмы используют так называемые управляющие последовательности.

*** В [2] указанный вопрос сведен к задаче нахождения асимптотически устойчивой во всем пространстве особой точки специального дифференциального уравнения.

**** Доказательство этого факта для того случая, когда $x^0(t) \equiv x^0$, можно найти, например, в [3], стр. 37—38; случай траектории $x^0(t)$ $(\| x^0(t) \| < M)$ легко сводится к предыдущему случаю заменой переменных $y = x - x^0(t)$.

и $W_1(x) \to \infty$ при $x \to \bar{G} \setminus G$ (если G неограничено, то $W_1(x) \to \infty$, когда $\| x \| \to \infty$);

б) $dV(t,x)/dt = \partial V/\partial t + (\mathrm{grad}_x V, f(t,x)) < -W_2(x) < 0$ при $x \neq \neq x^0(t)$;

в) функция $V(t, x)$ имеет непрерывные частные производные всех порядков по всем аргументам, равномерно ограниченные по t на каждом $H \subset G$.

3. Рассмотрим вначале случай $x^0(t) \equiv x^0$. Пусть x_0 — произвольная точка области G и $\{\alpha_k\}_0^\infty$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел таких, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$. Обозначим $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \alpha_k$, $t_0 = 0$. Точка x_0 порождает последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ по правилу

$$x_{n+1} = x_n + \alpha_n f(t_n, x_n). \tag{2}$$

Теорема 1. *Если определенная выше последовательность $\{x_n\}_0^\infty$ содержится в H ($x^0 \in H$) и $\alpha_n \to 0$ ($n \to \infty$), то $x_n \to x^0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство теоремы основано на следующих двух леммах, в которых $V(t, x)$ — описанная выше функция Ляпунова.

Лемма 1. *Пусть $x^0 \in H$. Тогда существует $\alpha > 0$ такое, что для произвольной точки $x \in H$ и $t \in [0, \infty)$*

$$V(t, x) > V(t + \alpha, x + \alpha f(t, x)). \tag{3}$$

Лемма 2. *Если $\alpha_n \to 0 (n \to \infty)$, последовательность $\{x_n\}_0^\infty$, определенная равенствами (2) с начальной точкой $x_0 \in H$, содержится в H и $\inf W_1(x_n) > 0$, то $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty$.*

Использование леммы 1 и свойств функции Ляпунова $V(t, x)$ показывает, что имеет место также следующая

Лемма 3. *Для каждого $x_0 \in G$ существует $\alpha > 0$ такое, что последовательность $\{x_n\}_0^\infty$, $x_{n+1} = x_n + \alpha f(n\alpha, x_n)$, содержится в некотором множестве H.*

4. Опишем вначале алгоритмы $\mathfrak{A}_1(\{A_n\}_1^\infty; \{\alpha_n\}_0^\infty)$ и $\mathfrak{A}_1(\Phi_c; \{\alpha_n\}_0^\infty)$ ($0 < A_1 < \ldots < A_n < A_{n+1} < \ldots$; $\alpha_n \geqslant 0$; Φ_c означает множество x, для которых $\Phi(x) \leqslant c$), каждый из которых состоит из последовательного выполнения одинаково описываемых этапов (различна лишь проверка условий на переход к следующему этапу). Этап с номером j состоит в образовании последовательности $x_n(j)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, по следующему правилу: $x_{n+1}(j) = x_n(j) + \alpha_{n+j} f(\sum\limits_{k=j}^{n+j-1} \alpha_k, x_n(j))$, где начальная точка $x_0(j) = x_0$ (эта точка не меняется при переходе к очередному этапу). Построение последовательности $\{x_n(j)\}_n$ прекращается, и осуществляется переход к следующему этапу в случае алгоритма $\mathfrak{A}_1(\{A_n\}_1^\infty; \{\alpha_n\}_0^\infty)$ при выполнении неравенства $\| x_{n+1}(j) \| > A_j$, а в случае алгоритма $\mathfrak{A}_1(\Phi_c; \{\alpha_n\}_0^\infty)$ — при выполнении неравенства $\Phi(x_{n+1}(j)) > c$.

Мы будем пользоваться также следующими алгоритмами: $\mathfrak{A}_2(\{A_n\}_1^\infty; \{S_n\}_0^\infty; \{\alpha_n\}_0^\infty)$ и $\mathfrak{A}_2(\Phi_c; \{S_n\}_0^\infty; \{\alpha\}_0^\infty)$ (здесь $0 = S_0 \leqslant S_1 \leqslant S_n \leqslant \leqslant S_{n+1} \leqslant \ldots$). Эти алгоритмы также состоят из одинаково описываемых этапов, а условия перехода к следующему этапу те же, что и в алгоритмах $\mathfrak{A}_1$. Опишем j-й этап алгоритмов $\mathfrak{A}_2$. Пусть по начальной точке $x_0(j) = x_0$ (не зависящей от номера этапа) уже построены точки $\{x_k(j)\}_{k=1}^{n}$ и вычеркнуты* первые $i - 1$ чисел $\{S_r\}_{r=1}^{i-1}$; тогда, если $S_i \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \| x_k(j) -$

* Правило вычеркивания чисел S_r указано ниже.

$- x_{k-1}(j) \|$, то следующая точка $x_{n+1}(j)$ строится по формуле

$$x_{n+1}(j) = x_n(j) + \alpha_{i+j} f(t_n(j), x_n(j)), \tag{4}$$

где $t_n(j)$ — сумма всех α по предыдущим шагам j-го этапа, и S_i из последовательности $\{S_n\}_0^\infty$ вычеркивается. Если же $S_i > \sum_{k=1}^{n} \| x_k(j) - x_{k-1}(j) \|$, то в (4) вместо α_{i+j} пишем α_{i-1+j} и S_i не вычеркивается. При переходе к следующему этапу вся последовательность $\{S_i\}_0^\infty$ восстанавливается.

Отметим, что алгоритмы $\mathfrak{A}_1$ являются частными случаями алгоритмов $\mathfrak{A}_2$ (достаточно взять $S_n = 0$ при всех n), однако мы выделили их описание, поскольку они кажутся нам идейно более простыми.

5. Из теоремы 1 и леммы 3 нетрудно выводится

Теорема 2. а) *Пусть x^0 является асимптотически устойчивой во всем пространстве особой точкой системы* (1). *Тогда для любых последовательностей $\{A_n\}_1^\infty$ ($A_n \to \infty$ при $n \to \infty$), $\{S_n\}_0^\infty$ и $\{\alpha_n\}_0^\infty$ ($\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, $\sum_{=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$) и любой начальной точки x_0 алгоритм $\mathfrak{A}_2(\{A_n\}_1^\infty; \{S_n\}_0^\infty; \{\alpha_n\}_0^\infty)$ стабилизуется на некотором этапе j_0 и порождает последовательность $\{x_n(j_0)\}_0^\infty$, сходящуюся к x^0.*

б) *Пусть x^0 является асимптотически устойчивой в равномерно ограниченной по t области $H_t = \{x\colon \Phi(t, x) \leqslant c\}$ особой точкой и для каждой точки x такой, что $\Phi(t, x) = c$, выполняется $(f(t, x), \operatorname{grad}_x \Phi(t, x)) < 0$. Тогда для любой начальной точки $x_0 \in H_0$ и последовательностей $\{S_n\}_0^\infty$, $\{\alpha_n\}_0^\infty$ ($\alpha_n \to 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$) алгоритм $\mathfrak{A}_2(\Phi_c; \{S_n\}_0^\infty; \{\alpha_n\}_0^\infty)$ стабилизуется на некотором этапе j_0 и порождает последовательность $\{x_n(j_0)\}_0^\infty$, сходящуюся к x^0.*

В частности, теорема 2 имеет место и в том случае, когда $\{S_n = 0\}_{n=0}^{\infty}$, т. е. для алгоритмов $\mathfrak{A}_1$.

6. Предположим, что все решения $x(x_0, t_0, t)$ системы (1) в некоторой окрестности точки x^0 удовлетворяют при некоторых $\beta > 0$, $B > 0$ условию

$$\| x(x_0, t_0, t) - x^0 \| \leqslant B \| x_0 \| \exp(-\beta(t - t_0)) \tag{5}$$

для $t \geqslant t_0$. Заметим, что условие (5) выполнено, например, в случае, когда правые части системы (1) не зависят от t и у матрицы линейной части системы в особой точке все собственные значения имеют отрицательную вещественную часть (система невырождена).

Теорема 3. *Если система* (1) *удовлетворяет условию* (5), *то в условиях теоремы 2* (*как в случае* а), *так и в случае* б)) *при дополнительном требовании $S_n \to \infty$ при реализации алгоритма $\mathfrak{A}_2$, вычеркивается лишь конечное множество чисел S_n и, тем самым, шаг α_n стабилизуется.*

При доказательстве теоремы 3 мы используем тот факт, что при выполнении условия (5) функцию $V(t, x)$ можно выбрать удовлетворяющей неравенствам, характерным для квадратичной формы (точнее см. ([3]), стр. 75). Обозначим такую функцию Ляпунова через $V^0(t, x)$.

Лемма 4. *Для произвольного $H \subset G$ существует постоянный множитель нижней релаксации, т. е. такое число $\alpha_0 > 0$, что при любом α, $0 \leqslant \alpha < \alpha_0$,*

$$V^0(t + \alpha, x + \alpha f(t, x)) > V^0(t + \alpha_0, x + \alpha_0 f(t, x)).$$

В заключение этого пункта отметим, что интуитивное представление о том, что скорость сходимости процесса, указанного в теореме 2, уменьшается при увеличении скорости сходимости последовательности $\{\alpha_n\}_0^\infty$ к нулю, не соответствует действительности. Более того, имеет место следующее утверждение.

Для монотонной последовательности $\{\alpha_n\}_0^\infty$, $\alpha_n \to 0$ и $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$, найдется система (1) и последовательность $\{\tilde{\alpha}_n\}_0^\infty$, $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{\alpha}_n = \infty$ и $\tilde{\alpha}_n / \alpha_n \to 0$, такие, что $\rho(\tilde{x}_n(j_0), x^0 / \rho(\tilde{\tilde{x}}_n(j_0), x^0) \underset{n \to \infty}{\to} 0$, где последовательность $\{\tilde{x}_n(j_0)\}_{n=0}^\infty$ построена алгоритмом $\mathfrak{A}_1(\{A_n\}_1^\infty; \{\tilde{\alpha}_n\}_0^\infty)$ по произвольной точке $x_0 \neq x^0$, а $\{\tilde{\tilde{x}}_n(j_0)\}_0^\infty$ построена по той же начальной точке алгоритмом $\mathfrak{A}_1(\{A_n\}_1^\infty; \{\tilde{\tilde{\alpha}}_n\}_0^\infty)$, в котором $\tilde{\tilde{\alpha}}_n > \alpha_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

7. В общем случае ограниченной асимптотически устойчивой траектории $x^0(t)$ имеет место теорема, аналогичная теореме 2. Обозначим $\boldsymbol{\Omega(x(t), t \to \infty)} = \{x\colon \exists\ (t_n \to \infty),\ x(t_n) \to x$ при $n \to \infty\}$; аналогичным образом будем понимать обозначение $\Omega(x_n, n \to \infty)$.

Теорема 4. *Указанный в теореме 2 процесс (как в случае пункта* а), *так и в случае пункта* б)) *порождает последовательность* $\{x_n(j_0)\}_0^\infty$, *сходящуюся к* $x^0(t)$ *в том смысле, что*

$$\Omega(x_n(j_0), n \to \infty) = \Omega(x^0(t), t \to \infty).$$

Пользуясь случаем, приносим глубокую благодарность И. М. Глазману за полезное обсуждение результатов работы.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР

Поступило
28 VI 1965

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Глазман, ДАН, **154**, № 5 (1964). [2] К. Дж. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава, Исследования по линейному и нелинейному программированию, ИЛ, 1962. [3] Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959.