М. М. Постников, Магические квадраты,
Матем. обр., 1997, выпуск 2, 54–82

Магические квадраты нечетного порядка*

ВВЕДЕНИЕ

О СРАВНЕНИЯХ

1. Сравнения и действия над ними

Пусть n — произвольное положительное целое число. Целые (не обязательно положительные) числа a и b называются *сравнимыми по модулю* n, если они отличаются друг от друга на число, кратное числу n, т. е. если существует такое целое число t, что

$$a = b + nt. \tag{1}$$

В этом случае пишут

$$a \equiv b \pmod n. \tag{2}$$

Согласно этому определению число a тогда и только тогда делится на n, когда

$$a \equiv 0 \pmod n.$$

Свойства сравнений (2) во многом аналогичны свойствам равенств. Например, аналогично отношению равенства отношение сравнения рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е.

$$a \equiv a \pmod n;$$

$$\text{если} \quad a \equiv b \pmod n, \quad \text{то } b \equiv a \pmod n;$$

$$\text{если} \quad a \equiv b \pmod n \text{ и } b \equiv c \pmod n, \quad \text{то } a \equiv c \pmod n.$$

Первые два свойства очевидны. Для доказательства третьего достаточно заметить, что из равенств $a = b + nt$, $b = c + ns$ вытекает равенство $a = c + n(t + s)$.

Далее, аналогично равенствам сравнения можно почленно складывать, вычитать и перемножать. Другими словами, если имеют место сравнения

$$a \equiv b \pmod n, \quad c \equiv d \pmod n,$$

то имеют место и сравнения

$$a \pm c \equiv b \pm d \pmod n,$$

$$ac \equiv bd \pmod n.$$

*Введение и первые две главы книги "Магические квадраты", М. Наука, 1964.

Действительно, если

$$a = b + nt, \qquad c = d + ns,$$

то

$$a \pm c = b \pm d + n(t \pm s),$$

$$ac = bd + n(td + bs + nts).$$

В частности, если $a \equiv b \pmod n$, то для любого k

$$a \pm k \equiv b \pm k \pmod n,$$

$$ak \equiv bk \pmod n.$$

Аналогия между сравнениями и равенствами нарушается только для деления. В то время как из равенства $ka = kb$, где $k \neq 0$, всегда вытекает равенство $a = b$, из аналогичного сравнения

$$ak \equiv bk \pmod n \tag{3}$$

сравнение

$$a \equiv b \pmod n, \tag{4}$$

вообще говоря, не вытекает. Однако

если число k взаимно просто с модулем n, то из сравнения (3) *вытекает сравнение* (4).

Другими словами,

сравнения можно сокращать на числа, взаимно простые с модулем.

Для доказательства достаточно заметить, что сравнение (3) равносильно делимости на n разности $ka - kb = k(a - b)$, и учесть, что при k взаимно простом с n число $k(a - b)$ тогда и только тогда делится на n, когда на n делится число $a - b$, т. е. когда имеет место сравнение (4).

Пусть теперь числа n и k не взаимно просты, и пусть (n, k) — их наибольший общий делитель. (Символ (n, k) для наибольшего общего делителя общепринят в научной литературе, и мы будем им впредь пользоваться без каких-либо оговорок.) Оказывается, что из сравнения (3) вытекает сравнение

$$a \equiv b \pmod m,$$

где $m = n/(n, k)$. Действительно, если число $k(a - b)$ делится на n, то число $a - b$ делится на m.

При $k = (n, k)$ мы получаем отсюда, что

из сравнения

$$ka \equiv kb \pmod{km} \tag{5}$$

вытекает сравнение

$$a \equiv b \pmod m. \tag{6}$$

Ясно, что и, обратно, из сравнения (6) вытекает сравнение (5).

2. Вычеты, полные системы вычетов

Из двух сравнимых по модулю n чисел каждое по отношению к другому называется его *вычетом.* Таким образом, каждое число имеет бесконечно много вычетов, отличающихся друг от друга на числа, кратные модулю. Среди всех вычетов данного числа a особое значение имеет вычет r, для которого

$$0 \leqslant r < n.$$

Этот вычет называется *наименьшим неотрицательным вычетом* числа a по модулю n. Он совпадает с остатком от деления числа a на модуль и поэтому всегда существует и определяется (по данному числу a) единственным образом.

Легко видеть, что два числа тогда и только тогда сравнимы по модулю n, когда их наименьшие неотрицательные вычеты совпадают (в одну сторону это следует из транзитивности отношения сравнимости, а в другую — из того, что наименьшие неотрицательные вычеты совпадают с остатками от деления на n). Другими словами, два числа тогда и только тогда сравнимы по модулю n, когда при делении на n они приводят к одинаковым остаткам. Ввиду этого сравнимые между собой числа иногда называют также *равноостаточными.*

Система целых чисел называется *полной системой вычетов по модулю* n, если выполнены следующие два условия:

1°. Любое целое число сравнимо по модулю n с одним из чисел этой системы.

2°. Различные числа этой системы не сравнимы друг с другом по модулю n.

Условие 2° обеспечивает то, что с каждым целым числом сравнимо только одно число рассматриваемой системы.

Примером полной системы вычетов по модулю n может служить система

$$0, 1, ..., n-1.$$

Эта система называется *полной системой наименьших неотрицательных вычетов.*

Очевидно, что любые две полные системы вычетов состоят из одного и того же числа элементов (ибо каждое число одной системы сравнимо с одним и только одним числом второй). Поскольку система наименьших неотрицательных вычетов состоит из n чисел, отсюда вытекает, что

любая полная система вычетов по модулю n состоит из n чисел.

Оказывается, что это свойство вместе со свойством 2° полностью характеризует полные системы вычетов, т.е.

любая система nцелых чисел

$$a_1, a_2, ..., a_n, \tag{1}$$

не содержащая различных сравнимых между собой чисел, является полной системой вычетов по модулю n.

Действительно, наименьшие неотрицательные вычеты чисел системы (1) исчерпывают всю систему наименьших неотрицательных вычетов (их n и все они различны). поэтому для каждого целого числа a в системе (1) найдется число a_i, имеющее тот же наименьший неотрицательный вычет, что и число a, и потому сравнимое с a. Таким образом, система (1) обладает свойством 1° и потому является полной системой вычетов.

Из доказанного утверждения немедленно вытекает, что

для любого целого числа b, наряду с системой (1), *полной системой является так же и система*

$$a_1 + b, \quad a_2 + b, \quad ..., \quad a_n + b. \tag{2}$$

В самом деле, все числа системы (2) не сравнимы друг с другом по модулю n (если $a_i + b \equiv a_j + b$, то $a_i \equiv a_j$ и потому $a_i = a_j$) и их ровно n.

Аналогично,

если число a взаимно просто с n, то, наряду с системой (1), *полной системой вычетов является и система*

$$aa_1, \ aa_2, \ ..., \ aa_n.$$

Действительно, если $aa_i \equiv aa_j \pmod n$, то $a_i \equiv a_j \pmod n$ и потому $a_i = a_j$, а значит и $aa_i = aa_j$.

Последние два утверждения можно объединить в одно:

если число a взаимно просто с n, то для любого числа b, наряду с системой (1), *полной системой вычетов является также и система*

$$aa_1 + b, \ aaa_2 + b, \ ..., \ aa_n + b.$$

3. Вычеты значений линейной функции

Доказанное в конце предыдущего пункта утверждение можно сформулировать также следующим образом:

если коэффициент a линейной функции $ax+b$ взаимно прост с n, то при x, пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю n, соответствующие значения функции $ax + b$ также пробегают полную систему вычетов по модулю n, (уже, конечно, другую).

Фиксируя внимание лишь на полной системе наименьших неотрицательных вычетов, это предложение можно сформулировать еще и так:

если коэффициент a линейной функции $ax + b$ взаимно прост с n, то при $x =$ $0, 1, ..., n-1$ *остатки от деления на n соответствующих значений функции $ax+b$ пробегают (в некотором порядке) полную систему наименьших неотрицательных вычетов.*

Рассмотрим теперь общий случай, когда числа a и n не обязательно взаимно просты. Пусть

$$d = (a, n)$$

— наибольший общий делитель чисел a и n. Рассматривая для определенности полную систему

$$0, \ 1, \ ..., \ n-1 \tag{1}$$

наименьших неотрицательных вычетов, найдем, для каких чисел x_1, x_2 этой системы имеет место сравнение

$$ax_1 + b \equiv ax_2 + b \pmod{n}. \tag{2}$$

Сравнение (2) равносильно сравнению

$$a(x_1 - x_2) \equiv 0 \pmod{n},$$

которое в свою очередь равносильно сравнению

$$x_1 - x_2 \equiv 0 \; (\mathrm{mod}\, \frac{n}{d}).$$

Отсюда следует, что для того, чтобы по одному разу получить все возможные вычеты значений функции $ax + b$ (при x, пробегающем систему (1)), достаточно выбрать в системе (1) полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$, например полную систему

$$0,\ 1,\ ...,\ \frac{n}{d} - 1 \tag{3}$$

наименьших неотрицательных вычетов, и заставить x пробегать эту систему. Кроме того, поскольку в системе (1) имеется точно d чисел, сравнимых с некоторым произвольно взятым числом x системы (3) $\Big($эти числа имеют вид x, $x + \frac{n}{d}$, $x + 2\frac{n}{d}$, ..., $x + (d-1)\frac{n}{d}\Big)$, отсюда также вытекает, что, когда x пробегает систему (1), каждый вычет значений, принимаемых функцией $ax + b$, повторяется ровно d раз.

Далее, разделим (с остатком) число b на d:

$$b = qd + \varrho, \qquad 0 \leqslant \varrho < d.$$

Так как числа $\frac{a}{d}$ и $\frac{n}{d}$ взаимно просты, то вместе с x полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$ пробегает и выражение $\frac{a}{d}x + q$. Поскольку

$$ax + b = d\left(\frac{a}{d}x + q\right) + \varrho,$$

отсюда вытекает, что вычеты значений функций $ax+b$ и $dx+\varrho$ при x, пробегающем систему (3), с точностью до порядка совпадают.

Сопоставляя все доказанные утверждения, мы окончательно получаем, что

при x, пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю n, скажем систему (1), *каждый вычет значений функции $ax + b$ повторяется точно d раз; чтобы получить эти вычеты по одному разу, надо в функции $dx + \varrho$ заставить переменную x пробежать некоторую полную систему вычетов по модулю $\frac{n}{d}$, скажем систему* (3).

Систему (3) брать особенно удобно, так как соответствующие значения

$$\varrho,\ d + \varrho,\ 2d + \varrho,\ ...,\ n - d + \varrho \tag{4}$$

функции $dx + \varrho$ уже сами являются наименьшими неотрицательными вычетами по модулю n. Таким образом, *числа* (4) *исчерпывают все наименьшие неотрицательные вычеты значений линейной функции* $ax+b$; *когда* x *пробегает полную систему вычетов, каждый из вычетов системы* (4) *повторяется ровно* d *раз.*

Сумма всех чисел (4) равна, как легко видеть, $\frac{n}{d}\left(\varrho+\frac{n-d}{2}\right)$. Следовательно,

сумма всех наименьших неотрицательных вычетов значений линейной функции $ax+b$ *при* x, *пробегающем некоторую полную систему вычетов по модулю* n, *равна*

$$n\left(\varrho+\frac{n-d}{2}\right), \tag{5}$$

где $d=(a,n)$, *а* ϱ *представляет собой остаток от деления на* d *свободного члена* b.

4. Сравнения и неопределенные уравнения первой степени

Общее сравнение первой степени по модулю n относительно неизвестной x имеет вид

$$ax+b\equiv 0\,(\operatorname{mod} n). \tag{1}$$

Ясно, что если некоторое число x_0 удовлетворяет этому сравнению (т. е. если $ax_0+b\equiv 0\,(\operatorname{mod} n)$), то и каждое число x, сравнимое с x_0, т. е. имеющее вид

$$x=x_0+nt,$$

где t — произвольное целое число, также удовлетворяет сравнению (1). Поэтому, чтобы описать все решения сравнения (1), достаточно найти все его решения, содержащиеся в некоторой полной системе вычетов, например в полной системе $0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$ наименьших неотрицательных вычетов.

Пусть сначала $(a,n)=1$. Тогда при x, пробегающем полную систему вычетов, значения функции $ax+b$ также будут пробегать полную систему вычетов, так что вычет 0 получится один и только один раз. Тем самым доказано, что

если a *взаимно просто с* n, *то сравнение*

$$ax+b\equiv 0\,(\operatorname{mod} n)$$

имеет в любой полной системе вычетов одно и только одно решение. Если x_0 *— это решение, то любое другое решение сравнения имеет вид*

$$x=x_0+nt,$$

где t *— произвольное целое число.*

В случае, когда $d=(a,n)$ больше единицы, сравнение (1) либо вообще не имеет решений (если b не делится на d), либо имеет их ровно d (попарно не сравнимых между собой).

В дальнейшем нам также придется решать также с и с т е м ы сравнений первой степени. Для простоты мы рассмотрим случай двух сравнений с двумя неизвестными:

$$a_1x + b_1y \equiv c_1 \pmod n, \quad a_2x + b_2y \equiv c_2 \pmod n, \tag{2}$$

хотя окончательные результаты будут иметь место и для систем сравнений от любого числа неизвестных. Обращаясь со сравнениями как с уравнениями, мы, не пользуясь делением, можем известными из алгебры приемами преобразовать систему (2) к следующему виду:

$$\Delta x \equiv c_1b_2 - c_2b_1 \pmod n, \quad \Delta y \equiv c_2a_1 - c_1b_2 \pmod n, \tag{3}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

— определитель системы (2). (Например, чтобы получить первое сравнение системы (3), следует первое сравнение системы (2) умножить на b_2, второе сравнение — на b_1 и из первого сравнения вычесть второе.)

Если $(\Delta, n) = 1$, то сравнения (3) однозначно определяют вычеты неизвестных x и y, удовлетворяющие системе (2). Таким образом,

если определитель Δ системы сравнений первой степени взаимно прост с n, то эта система имеет одно и только одно решение (в каждой полной системе вычетов).

Случай $(\Delta, n) > 1$ мы здесь рассматривать не будем.

С задачей решения сравнений первой степени тесно связана задача решения в целых числах неопределенных уравнений вида

$$ax + by = c. \tag{4}$$

Действительно, переписав уравнение (4) в виде

$$ax = c \pm |b|y,$$

мы видим, что оно приводит к сравнению

$$ax \equiv c \pmod b. \tag{5}$$

Следовательно, если коэффициенты a и b взаимно просты, то общее выражение для x имеет вид

$$x = x_0 + bt, \tag{6}$$

где t — произвольное целое число, а x_0 — некоторое решение сравнения (5).

По определению, для числа x_0 существует такое число y_0, что $ax_0 = c - by_0$, т. е.

$$ax_0 + by_0 = c. \tag{7}$$

Таким образом, пара чисел x_0, y_0) составляет решение неопределенного уравнения (4).

Число y_0 удовлетворяет сравнению

$$by \equiv c\,(\mathrm{mod}\,|a|),$$

общее решение которого имеет вид

$$y = y_0 + at_1. \tag{8}$$

Подставляя выражения (6) и (8) в уравнение (4) и учитывая равенство (7), мы получим, что

$$ax + by = c + ab(t + t_1).$$

Следовательно, числа (6) и (8) тогда и только тогда составляют решение уравнения (4), когда $t_1 = -t$. Тем самым доказано следующее утверждение:

если коэффициенты a и b уравнения

$$ax + by = c.$$

взаимно просты, то это уравнение обладает целочисленным решением x_0, y_0); любое другое его решение (x, y) имеет вид

$$x = x_0 + bt, \qquad y = y_0 - at,$$

где t — произвольное целое число.

Если $(a, b) > 1$, то уравнение (4) либо не имеет решений (если c не делится на (a, b)), либо после сокращения на (a, b) сводится к уравнению с взаимно простыми коэффициентами.

Доказанное утверждение теоретически полностью отвечает на вопрос о решении в целых числах уравнения (4). Для практического применения следовало бы еще указать прием фактического нахождения хотя бы одного решения (x_0, y_0). Однако в дальнейшем нам это не понадобится, и поэтому мы на этом вопросе останавливаться не будем. (Заметим, впрочем, что из всего сказанного выше такой прием, хотя и не очень практичный, можно извлечь без особого труда.)

ГЛАВА 1

Общий линейный метод построения магических квадратов нечетного порядка

1. Магические квадраты и методы их построения

Числовым квадратом порядка n, где n — некоторое положительное целое число, мы будем называть квадрат, разбитый на n^2 клеток, в котором размещены (в некотором порядке) целые числа от 1 до n^2. Числовой квадрат мы будем называть *магическим*, если суммы, получаемые от сложения чисел каждого горизонтального ряда, каждого вертикального ряда и обеих диагоналей, одинаковы. Так как квадрат порядка n содержит n, скажем, горизонтальных рядов и сумма Σ чисел каждого ряда одинакова, то сумма всех чисел, размещенных в магическом квадрате, равна $n\Sigma$. С другой стороны, она равна

$$1 + 2 + \ldots + n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

Следовательно,

$$\Sigma = \frac{n(n^2+1)}{2}. \tag{1}$$

Условия равенства суммы элементов отдельных строк, столбцов или диагоналей числу Σ мы будем называть *условиями магичности* этих строк, столбцов или диагоналей.

Пример магического квадрата порядка 4 приведен на рис. 1. (Это так называемый квадрат Дюрера, изображенный на его известной гравюре "Меланхолия". Для него, в согласии с формулой (1), $\Sigma = 34$.

Несмотря на то, что в свое время (особенно в XVI–XVIII веках) магические квадраты были предметом пристального изучения ряда известных математиков, их теория ни в коей мере не может считаться завершенной. Достаточно сказать, что до сих пор неизвестен никакой общий метод построения всех магических квадратов данного порядка n и даже неизвестно их число (при $n \geqslant 5$). Можно лишь утверждать, что это число делится на 8, так как из любого магического квадрата поворотами на 90° вокруг центра и отражениями в сторонах получаются еще 7 новых магических квадратов.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

рис. 1.

Замечание. Новые магические квадраты из данного можно получать и некоторыми другими преобразованиями (например, перестановками его рядов). Мы этот вопрос рассматривать здесь не будем.

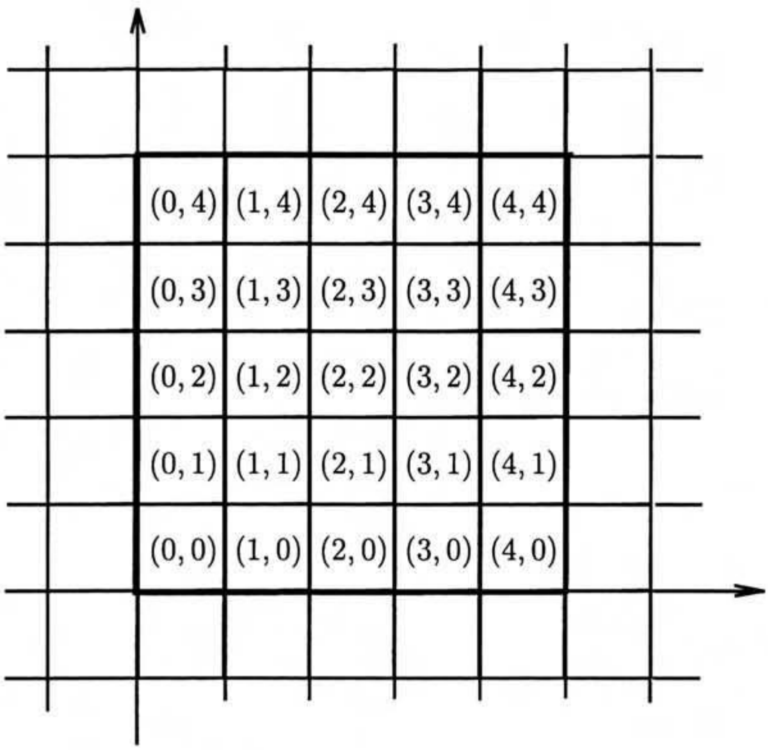

рис. 2

Клетки магического квадрата порядка n мы будем обозначать парами целых чисел (x, y) — их *координатами*, где x — номер вертикального ряда, а y — номер горизонтального ряда, на пересечении которых находится данная клетка (рис. 2 для случая $n = 5$). При этом вертикальные ряды мы нумеруем слева направо, а горизонтальные — снизу вверх. В качестве номеров мы будем использовать числа

$$0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \tag{2}$$

т. е. наименьшие неотрицательные вычеты по модулю n.

Разбиение на клетки исходного квадрата — назовем его *основным* — мы продолжим до разбиения на клетки всей плоскости (на рис. 2 основной квадрат очерчен жирной линией). Для клеток плоскости мы также введем координаты (x, y), определив их аналогично координатам клеток основного квадрата, с тем лишь отличием, что теперь эти координаты могут уже принимать любые целочисленные значения. Среди всех клеток плоскости клетки основного квадрата характеризуются тем свойством, что обе их координаты x и y принадлежат системе (2).

Сдвигая основной квадрат параллельно самому себе на векторы с целочисленными координатами, делящимися на n, мы получим систему не налегающих друг на друга квадратов порядка n, покрывающих всю плоскость. Две клетки, принадлежащие двум таким квадратам и занимающие относительно их одинаковое положение, мы будем называть *эквивалентными*. Другими словами, *две клетки эквивалентны, если их соответственные координаты сравнимы по модулю* n. Клетки, составляющие основной квадрат, попарно друг другу не эквивалентны, но каждая другая клетка плоскости эквивалентна одной (и только одной) из них. В дальнейшем эквивалентные клетки будут играть совершенно одинаковую роль и будут рассматриваться как одинаковые. В соответствии с этим нас в основном будут интересовать не сами координаты клеток, а их вычеты по модулю n, ввиду чего мы будем для них писать не равенства, а сравнения.

Каждое целое число $z = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2$ мы можем записать в виде

$$z = nr + (s+1),$$

где r и s — некоторые числа системы (2), однозначно определенные числом z и, обратно, однозначно определяющие это число. Мы будем числа $r,\ s$ называть *координатами* числа z.

Например, при $n = 3$ координаты чисел

$$z = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9$$

имеют соответственно вид

$$(r,s) = (0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,0),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,0),\ (2,1),\ (2,2).$$

При задании некоторого магического квадрата порядка n каждой паре чисел $r,\ s$ сопоставляется пара чисел $x,\ y$ — координаты клетки квадрата, в которую вписано число с координатами $r,\ s$. Другими словами, числа x и y являются функциями чисел r и s. Обозначая эти функции буквами f и g, мы получим, следовательно, что $x = f(r,s)$ и $y = g(r,s)$. Как уже говорилось, нам удобнее вместо равенств писать сравнения по модулю n. Таким образом,

каждый магический квадрат порядка n описывается двумя сравнениями вида

$$\begin{aligned} x &\equiv f(r,s) \pmod n,\\ y &\equiv g(r,s) \pmod n, \end{aligned} \tag{3}$$

где $f(r,s),\ g(r,s)$ — некоторые функции чисел r и s.

В дальнейшем любую пару произвольно заданных целочисленных функций $f(r,s)$ и $g(r,s)$ мы будем называть *методом построения магических квадратов*. Метод мы условимся называть *правильным*, если формулы (3) действительно определяют магический квадрат.

Описанное сведение задачи построения магического квадрата к задаче построения пары функций $f(r,s)$ и $g(r,s)$ позволяет, в частности, классифицировать способы построения магических квадратов в зависимости от характера этих функций. Простейшим методом построения магических квадратов следует считать метод, для которого функции $f(r,s)$ и $g(r,s)$ линейны, т. е. имеют вид

$$f(r,s) = a_1 r + b_1 s + c_1,$$

$$g(r,s) = a_2 r + b_2 s + c_2,$$

где $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2$ — некоторые целые числа. Такого рода методы мы будем назвать *линейными*.

Основная (до сих пор не решенная) задача теории магических квадратов состоит в выяснении *необходимых и достаточных условий, которым должны удовлетворять правильные методы построения магических квадратов.* Мы рассмотрим эту задачу лишь для линейных методов. В частности, мы покажем, что

правильные линейные методы существуют лишь для нечетных n.

2. Общий вид линейного метода построения магических квадратов

По определению, каждый линейный метод построения магических квадратов имеет вид

$$\begin{aligned} x &\equiv a_1 r + b_1 s + c_1 \pmod{n}, \\ y &\equiv a_2 r + b_2 s + c_2 \pmod{n}. \end{aligned} \tag{1}$$

Для практического применения этого метода весьма существенно, что из формул (1) можно исключить координаты r и s. Действительно, очевидно, что если

$$z = nr + s + 1, \qquad r,\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

то

$$r = \left[\frac{z-1}{n}\right],$$

где $[\ \ ]$ — знак целой части (наибольшего целого числа, содержащегося в данном), и

$$s \equiv z - 1 \pmod{n}.$$

Поэтому формулы (1) можно переписать в следующем виде, не содержащем явно координат r и s:

$$x \equiv a_1 \left[\frac{z-1}{n}\right] + b_1(z-1) + c_1 \pmod{n},$$

$$y \equiv a_2 \left[\frac{z-2}{n}\right] + b_2(z-1) + c_2 \pmod{n}.$$

При фактическом построении магического квадрата можно также писать не эти сравнения, а соответствующие равенства

$$\begin{aligned} x &= a_1 \left[\tfrac{z-1}{n}\right] + b_1(z-1) + c_1, \\ y &= a_2 \left[\tfrac{z-2}{n}\right] + b_2(z-1) + c_2. \end{aligned} \tag{2}$$

Подставляя в эти равенства числа $z = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2$, мы получим координаты ряда клеток, часть из которых будет обязательно лежать вне основного квадрата. В каждую клетку надо затем вписать соответствующее число z, заменяя одновременно клетки, лежащие вне основного квадрата, эквивалентными клетками этого квадрата (и сохраняя в последних те же числа). В результате мы получим некоторое заполнение клеток основного квадрата числами от 1 до n^2, которое и будет магическим квадратом, если только метод (1) правилен.

3. Условия правильности линейного метода

Чтобы линейный метод, выраженный формулами (1) п. 2, был правильным, необходимо в первую очередь, чтобы эти формулы устанавливали взаимно однозначное соответствие между координатами (r, s) чисел от 1 до n^2 и координатами (x, y) клеток основного квадрата, т. е. чтобы для любых координат x и y из этих формул можно было однозначно найти соответствующие координаты r и s. Но решая по известным правилам сравнения (1) п. 2 относительно r и s, мы получим сравнения

$$\begin{aligned} \Delta r &\equiv b_2x - b_1y + b_1c_2 - b_2c_1 \pmod n, \\ \Delta s &\equiv -a_2x + a_1y - a_1c_2 + a_2c_1 \pmod n, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1.$$

Пусть выполнено следующее условие:

M1. *Определитель Δ взаимно прост с n.*

Тогда для любых x и y сравнения (1) однозначно определяют координаты r и s (следует иметь ввиду, что, по определению, эти координаты принадлежат полной системе (2) п. 1 наименьших неотрицательных вычетов по модулю n). Таким образом,

при выполнении условия M1. *формулы (1) п.2 устанавливают взаимно однозначное соответствие между числами от* 1 *до n^2 и клетками основного квадрата.*

Рассмотрим теперь следующее условие:

M2. *Коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 взаимно просты с n.*

Оказывается, что

при выполнении условия M2 *требование магичности выполняется по отношению ко всем вертикальным и горизонтальным рядам, т. е. сумма чисел каждого вертикального и каждого горизонтального ряда равна* $\Sigma = \dfrac{n(n^2+1)}{2}$.

Действительно, для всех клеток некоторого, скажем, горизонтального ряда координата y одна и та же, а координата x пробегает полную систему вычетов по модулю n. Так как числа b_2 и $-a_2$ по условию взаимно просты с n, то левые части сравнений (1), каждая в отдельности, также пробегают полную систему вычетов. Поэтому полную систему вычетов будут пробегать как координата r, так и координата s (ибо по условию M.1 определитель Δ взаимно прост с n). Таким образом, для чисел рассматриваемого ряда координаты r и s принимают по одному разу каждое из значений 0, 1, ..., $n-1$. Следовательно, суммы R и S этих координат равны каждая числу $1 + 2 + \cdots + n - 1 = \dfrac{n(n-1)}{2}$. С другой стороны, сумма всех чисел данного ряда равна, очевидно, числу $nR + S + n$. Поэтому для завершения доказательства остается лишь заметить, что

$$n \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n^2+1)}{2}.$$

Для вертикальных рядов рассуждение аналогично (меняется координата y, а координата x остается постоянной).

Таким образом, остается найти лишь условия магичности обеих диагоналей ("восходящей", соединяющей левый нижний угол с правым верхним, и "нисходящей", соединяющей левый верхний угол с правым нижним).

Для клеток восходящей диагонали имеет место равенство $x = y$, и поэтому координаты чисел, находящихся в клетках этой диагонали, определяются из сравнений

$$\Delta r \equiv (b_2 - b_1)x + b_1c_2 - b_2c_1 \pmod n,$$
$$\Delta s \equiv -(a_2 - a_1)x + a_2c_1 - a_1c_2 \pmod n.$$

Так как число Δ взаимно просто с n, то существует такое число Δ', что

$$\Delta\Delta' \equiv 1 \pmod n.$$

Умножая выписанные выше сравнения на это число, мы получим, что

$$\begin{aligned} r &\equiv \quad \Delta'(b_2 - b_1)x + \Delta'(b_1c_2 - b_2c_1) \pmod n, \\ s &\equiv -\Delta'(a_2 - a_1)x + \Delta'(a_2c_1 - a_1c_2) \pmod n. \end{aligned} \tag{2}$$

Таким образом, координаты r и s чисел восходящей диагонали представляют собой вычеты значений, принимаемых левыми частями сравнений (2), когда x пробегает полную систему вычетов $0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$. Следовательно, (см. Введение, п. 3, формула (5)), суммы R и S этих координат выражаются формулами

$$R = n\left(\varrho + \frac{n-d}{2}\right), \qquad S = n\left(\varrho_1 + \frac{n-d_1}{2}\right),$$

где

$$d = (\Delta'(b_2 - b_1), n) = (b_2 - b_1, n),$$
$$d_1 = (-\Delta'(a_2 - a_1), n) = (a_2 - a_1, n),$$

а ϱ и ϱ_1 представляют собой наименьшие неотрицательные вычеты чисел $\Delta'(b_1c_2 - b_2c_1)$ и $\Delta'(a_2c_1 - a_1c_2)$ по модулям d и d_1 соответственно.

Требование магичности заключается в том, что сумма $nR + S + n$ всех чисел восходящей диагонали равна $\frac{n(n^2+1)}{2}$. Следовательно, должно иметь место равенство

$$n^2\left(\varrho + \frac{n-d}{2}\right) + n\left(\varrho_1 + \frac{n-d_1}{2}\right) + n = \frac{n(n^2+1)}{2},$$

т. е. равенство

$$2n^2\varrho + 2n\varrho_1 = n^2(d-1) + n(d_1 - 1).$$

Последнее равенство возможно только при d и d_1 нечетных и, как легко видеть, будет заведомо выполнено, если

$$\varrho = \frac{d-1}{2}, \qquad \varrho_1 = \frac{d_1 - 1}{2},$$

т. е. если будут иметь место сравнения

$$\Delta'(b_1c_2 - b_2c_1) \equiv \frac{d-1}{2} \pmod d,$$

$$\Delta'(a_2c_1 - a_1c_2) \equiv \frac{d_1 - 1}{2} \,(\mathrm{mod}\, d_1).$$

Умножив эти сравнения на Δ, мы придем к следующему условию:

М3. *Имеют место сравнения*

$$b_1c_2 - b_2c_1 \equiv \Delta\frac{d-1}{2}\,(\mathrm{mod}\, d),$$

$$a_2c_1 - a_1c_2) \equiv \Delta\frac{d_1-1}{2}\,(\mathrm{mod}\, d_1),$$

где $d = (b_2 - b_1, n),\ d_1 = (a_2 - a_1, n)$.

По доказанному

при выполнении условия М3 *восходящая диагональ удовлетворяет условию магичности.*

Заметим, что при $d = 1$ или при $d_1 = 1$ соответствующее сравнение из условия М3 удовлетворяется автоматически. Отсюда, в частности, следует, что условие М3 будет заведомо выполнено, если $d = d_1 = 1$, т. е. если выполнено следующее условие:

М3$'$. *Числа* $b_2 - b_1$ *и* $a_2 - a_1$ *взаимно просты с* n.

Для нисходящей диагонали $x+y = n-1$, и поэтому ее клетки заполнены числами, координаты которых определяются из сравнений

$$\Delta r \equiv (b_2 + b_1)x + b_1c_2 - b_2c_1 - b_1(n-1)\,(\mathrm{mod}\, n),$$

$$\Delta s \equiv (a_2 + a_1)y - a_1c_2 + a_2c_1 - a_2(n-1)\,(\mathrm{mod}\, n),$$

т. е. из сравнений

$$r \equiv \Delta'(b_2 + b_1)x + \Delta'(b_1c_2 - b_2c_1 + b_1)\,(\mathrm{mod}\, n),$$

$$s \equiv \Delta'(a_2 + a_1)y + \Delta'(a_2c_1 - a_1c_2 + a_2)\,(\mathrm{mod}\, n).$$

Отсюда, как и выше мы приходим к условию

М4 *Имеют место сравнения*

$$b_1c_2 - b_2c_1 + b_1 \equiv \Delta\frac{d_1'-1}{2}\,(\mathrm{mod}\, d'),$$

$$a_2c_1 - a_1c_2 + a_2 \equiv \Delta\frac{d_1'-1}{2}\,(\mathrm{mod}\, d_1'),$$

где

$$d' = (b_2 + b_1, n), \quad d_1' = (a_2 - a_1, n),$$

и к следующему утверждению:

при выполнении условия М4 *нисходящая диагональ удовлетворяет условию магичности.*

Условие М4 будет заведомо выполнено, если имеет место следующее условие:

М4$'$. *Числа* $b_2 + b_1$ *и* $a_2 + a_1$ *взаимно просты с* n.

Резюмируя все сказанное, мы получаем окончательный результат:

при выполнении условий M1, M2, M3 *(или* M3′ *) и* M4 *(или* M4′ *) линейный метод (1) п. 2 правилен.*

Это утверждение дает лишь достаточные условия правильности линейного метода. Читателю рекомендуется самостоятельно рассмотреть вопрос о необходимых условиях.

Заметим в заключение, что

условия M1 *и* M2 *непротиворечивы только для нечетного* n.

Действительно, если n четно, то, согласно условию M2, числа a_1, a_2, b_1, b_2 должны быть нечетны, и поэтому определитель $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$, как разность двух нечетных чисел, должен быть четным, что в силу условия M1 невозможно.

Таким образом,

правильные методы (или по крайней мере методы, удовлетворяющие условиям M1—M4 *) могут существовать лишь при нечетном* n.

Примеры таких методов для любого нечетного n мы укажем в следующей главе.

ГЛАВА 2

Классические алгорифмические методы построения магических квадратов нечетного порядка

1. Индийский метод

Индийский метод составления магических квадратов (иногда называемый также *сиамским*) является, по-видимому, самым древним алгорифмом построения магических квадратов произвольного нечетного порядка $n = 2m + 1$. Этот алгорифм описывается следующими правилами:

1°. Числа от 1 до n^2 поочередно вписываются в клетки основного квадрата.

2°. Если некоторое правило требует вписать данное число в клетку, лежащую вне основного квадрата, то вместо этого рассматриваемое число вписывается в эквивалентную клетку основного квадрата.

3°. Число 1 вписывается в среднюю клетку верхнего ряда, т. е. в клетку с координатами

$$(m, 2m).$$

4°. Если число z вписано в клетку с координатами (x, y), то следующее число $z+1$ вписывается в клетку с координатами $(x+1, y+1)$, т. е. в клетку, смежную с клеткой (x, y), в направлении восходящей диагонали, при условии, что эта последняя клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка с координатами $(x + 1, y + 1)$ уже занята некоторым числом, то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x, y - 1)$, т. е. в клетку, непосредственно примыкающую снизу к клетке (x, y). (Оказывается, что это всегда возможно, т. е. клетка $(x, y - 1)$ обязательно свободна от чисел.)

На рис. 3 изображен магический квадрат третьего порядка, построенный индийским методом. Для ясности на этом рисунке заполнены также некоторые клетки вне основного квадрата. Не описывая подробно это построение, мы укажем лишь, что число 1 вписано на основании правил 1° и 3°, число 2 — на основании правил 4° и 2°, число 4 — на основании правил 5° и 2°, число 5 — на основании правила 4°, число 6 — на основании правила 4°, число 7 — на основании правил 5° и 2°, число 8 — на основании правил 4° и 2° и, наконец, число 9 — на основании правил 4° и 2°.

	9	2	4
8	1	6	8
3	5	7	3
4	9	2	

рис. 3

Замечание. Из полученного по индийскому методу магического квадрата третьего порядка можно поворотами около центра и отражениями в сторонах получить еще семь других магических квадратов. Без труда проверяется, что этими восемью магическими квадратами исчерпываются все магические квадраты третьего порядка. Таким образом, указанная в п. 1 оценка для числа магических квадратов данного порядка n не может быть улучшена (если не налагать на n никаких дополнительных условий).

Сущность индийского метода лучше всего уясняется, если не обращать внимания на правило 2°, т. е. если не заменять внешних клеток эквивалентными. При таком упрощении применение алгорифма сводится к заполнению клетки $(m, 2m)$ числом 1 и следующих за ней вверх по диагонали клеток $(m+1, 2m+1)$, $(m+2, 2m+2)$, ..., $(m+k, 2m+k)$, ... числами 2, 3, ..., $k+1$, ..., до тех пор, пока не встретится клетка, эквивалентная клетке $(m, 2m)$, что, очевидно, произойдет при $k = n$. Под последней из заполненных клеток (это будет клетка $(m+n-1, 2m+n-1) = (3m, 4m)$ с числом n), т. е. в клетке $(3m, 4m-1)$, помещается число $n+1$, и с этой клетки начинается новый диагональный ряд, который, как легко видеть, кончится на числе $2n$, так что число $2n+1$ помещается под клеткой с числом $2n$. Следующий диагональный ряд кончится на числе $3n$, и т. д. Этот процесс остановится, когда мы дойдем до числа n^2. В результате мы получим n диагональных рядов чисел по n чисел в ряду, составляющих своеобразную "лесенку" (см. рис. 4 для $n = 3$ и $n = 5$).

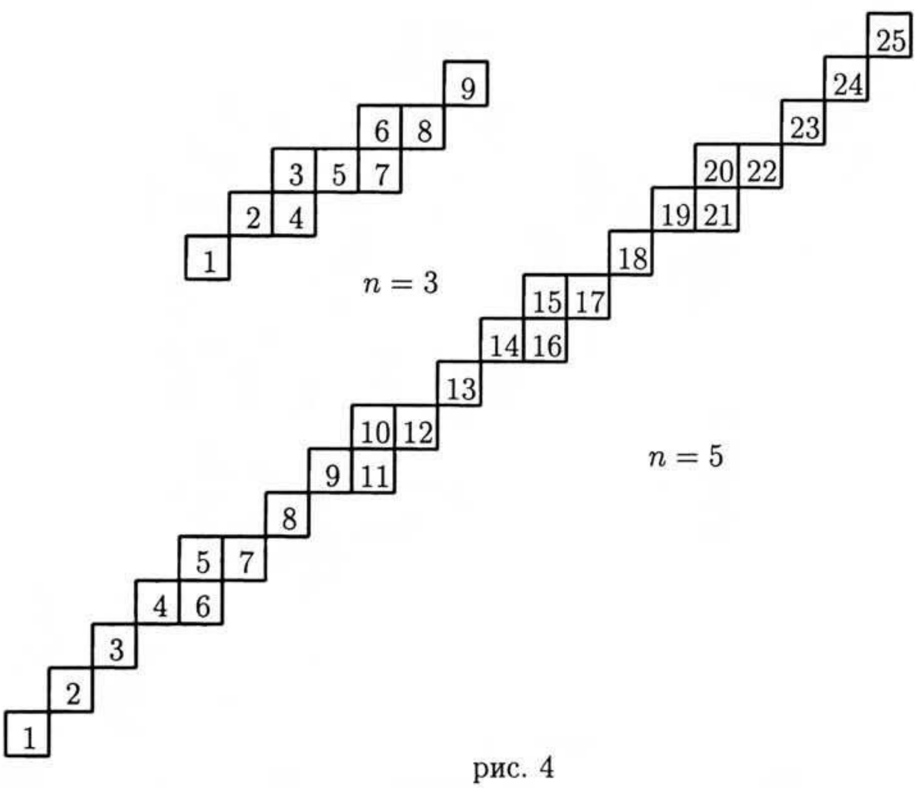

рис. 4

Покажем теперь, что клетка построенной "лесенки", содержащая некоторое число z $(z = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2)$, имеет координаты

$$\begin{aligned} x &= z - \left[\frac{z-1}{n}\right] + m - 1, \\ y &= z - 2\left[\frac{z-1}{n}\right] + 2m - 1, \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$m = \frac{n-1}{2}.$$

Действительно, для чисел $z = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ первого диагонального ряда эти формулы дают правильные координаты $(m+z-1, 2m+z-1)$ соответствующих клеток (см. выше). Пусть формулы (1) уже доказаны для чисел $z = (p-1)n+1,\ (p-1)n+2,\ \ldots,\ pn$, составляющих p-й диагональный ряд. Тогда, согласно этим формулам, число pn помещается в клетке $(pn-p+m, pn-2p+2m+1)$ и, следовательно, согласно правилам построения "лесенки", число $pn+1$ помещается в клетке $(pn-p+m, pn-2p+2m)$, число $pn+2$ — в клетке $(pn-p+m+1, pn-2p+2m+1)$, вообще число $z = pn+k$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, — в клетке $(pn-p+m+k, pn-2p+2m+k-1)$, т. е. в клетке $(z-p+m-1, z-2p+2m-1)$. Поскольку при $z = pn+k$ имеет место равенство $\left[\frac{z-1}{n}\right] = p$, тем самым доказано, что формулы (1) справедливы и для чисел $z = ppn+1,\ pn+2, \ldots, (p+1)n$, составляющих $(p+1)$-й ряд. Поэтому, согласно принципу полной математической индукции, формулы (1) справедливы для чисел любого ряда, т. е. для всех чисел от 1 до n^2.

Сравнивая доказанные формулы (1) с формулами (2) из п. 2 гл. 1, мы немедленно получаем, что

индийский метод является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = -1, \quad b_1 = 1, \quad c_1 = m,$$

$$a_2 = -2, \quad b_2 = 1, \quad c_2 = 2m.$$

Определитель Δ индийского метода равен, очевидно, единице, так что этот метод для любого n удовлетворяет условию **M1**. Ясно также, что для любого нечетного n он удовлетворяет и условию **M2**. Далее, так как $b_2 - b_1 = 0,\ a_2 - a_1 = -1$, то $d = n,\ d_1 = 1$, и поэтому условие **M3** сводится к сравнению

$$1 \cdot 2m - 1 \cdot m \equiv \frac{n-1}{2} \pmod n,$$

которое очевидным образом удовлетворяется. Наконец, так как $b_1 + b_2 = 2,\ a_2 + a_1 = -3$, то при $n \not\equiv 0 \pmod 3$ имеет место даже условие **M4**$'$, а при $n \equiv 0 \pmod 3$ условие **M4** сводится к очевидному сравнению

$$-2 \cdot m - (-1) \cdot 2m + (-2) \equiv \frac{3-1}{2} \pmod 3$$

и поэтому также выполнено.

Тем самым доказано, что

для любого нечетного n индийский метод правилен, т. е. его применение приводит к некоторому магическому квадрату.

Индийский метод, не оставляя желать ничего лучшего в отношении простоты и легкости применения, страдает тем недостатком, что для каждого нечетного n он дает лишь один, вполне определенный, магический квадрат. Однако, как мы сейчас покажем, несколько обобщив этот метод, можно получить метод, приводящий, вообще говоря, к n квадратам.

2.Обобщенный индийский метод

Существо индийского метода состоит в правилах 4°, 5°, обеспечивающих построение "лесенки". Что же касается правила 3°, т. е. требования начинать построение обязательно с клетки $(m, 2m)$, то оно, как мы сейчас покажем, отнюдь не обязательно.

Подставляя в формулы (1) п. 2 гл. 1 общего линейного метода координаты $r = 0,\ s = 0$ числа 1, мы немедленно получим, что

коэффициенты $c_1,\ c_2$ представляют собой координаты клетки, в которую вписано число 1.

Следовательно, варьируя числа c_1 и c_2, мы будем менять место числа 1 в квадрате. Сохраняя при этом остальные коэффициенты $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ неизменными, мы оставим метод по существу тем же самым.

Таким образом, желая исследовать вопрос о возможном обобщении правила 3° индийского метода, мы должны рассмотреть метод вида

$$\begin{aligned} x &= z - \left[\frac{z-1}{n}\right] + c_1 - 1, \\ y &= z - 2\left[\frac{z-1}{n}\right] + c_2 - 1, \end{aligned} \tag{1}$$

и найти все значения коэффициентов c_1 и c_2, для которых этот метод правилен. Алгорифм для построения магических квадратов по этому методу состоит из тех же правил 1° — 5°, что и алгорифм индийского метода, с тем лишь отличием, что правило 3° заменяется следующим:

$3'^{\circ}$. Число 1 вписывается в клетку с координатами (c_1, c_2).

Метод (1), очевидно, удовлетворяет условиям M1 и M2. Что же касается условия M3, то, поскольку $d = n,\ d_1 = 1$, оно сводится к сравнению

$$c_2 - c_1 \equiv m \pmod n. \tag{2}$$

Этому сравнению удовлетворяютn клеток основного квадрата, эквивалентных клеткам "восходящего" диагонального ряда, проходящего через среднюю клетку верхнего ряда.

Наконец, если $n \not\equiv 0 \pmod 3$, то выполнено условие M4$'$. Если же $n \equiv 0 \pmod 3$, то $d' = 1,\ d_1' = 3$ и поэтому условие M4 сводится к сравнению

$$-2c_1 + c_2 - 2 \equiv 1 \pmod 3,$$

т. е. к сравнению

$$2c_1 - c_2 \equiv 0 \pmod n. \tag{3}$$

С другой стороны, при $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ (а значит, при $m \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$) из сравнения (2) вытекает сравнение

$$c_2 - c_1 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3).$$

Отсюда и из сравнения (3) следует, что

$$c_1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3), \qquad c_2 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3).$$

Таким образом, мы получаем следующий окончательный результат:

в алгорифме индийского метода начальную клетку, в которую вписывается число 1, *можно при* $n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ *произвольно выбирать среди* n *клеток, эквивалентным клеткам "восходящего" диагонального ряда, проходящего через среднюю клетку верхнего горизонтального ряда; если же* $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, *то эта клетка должна дополнительно обладать тем свойством, что ее первая координата делится на* 3 *(и тогда вторая при делении на* 3 *обязательно даст остаток* 1 *).*

В частности, за начальную клетку индийского метода можно всегда выбрать среднюю клетку левого вертикального ряда, имеющую координаты $(0, m)$. Это видоизменение индийского метода было предложено Лалюбером.

С помощью обобщенного индийского метода мы получаем либо n квадратов (при $n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, либо $n/3$ квадратов (при $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$).

3. Метод Москопула

В методе византийского ученого Москопула, как и в индийском методе, указывается некоторый алгорифм последовательного заполнения клеток основного квадрата числами от 1 до n^2. Порядок заполнения клеток по этому способу такой же, как порядок обегания шахматной доски конем, двигающимся вверх и направо (поэтому метод Москопула иногда называют также методом коня).

Первые два правила алгорифма Москопула в точности совпадают с соответствующими правилами 1° и 2° индийского метода. остальные правила формулируются следующим образом:

3°. Если $n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, то начальная клетка, в которую вписывается число 1, выбирается произвольно, если же $n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 3)$, то за эту клетку принимается средняя клетка нижнего горизонтального ряда, т. е. клетка с координатами $(m, 0)$.

4°. Если некоторое число z вписано в клетку с координатами (x, y), то число $z+1$ вписывается в клетку с координатами $(x+1, y+2)$ при условии, что эта клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка с координатами $(x+1, y+2)$ уже занята некоторым числом, то число $z+1$ вписывается в клетку с координатами $(x, y+4)$, т. е. в клетку, расположенную в том же вертикальном ряду, что и клетка с числом z, но находящуюся на четыре клетки выше.

Рис. 5 иллюстрирует построение магического квадрата пятого порядка по способу Москопула.

Для изучения метода Москопула мы, как и раньше, отвлечемся от правила 2°, т. е. не будем заменять внешние клетки эквивалентными им клетками основного квадрата. Тогда, если мы вписали число 1 в клетку (x_0, y_0), то число 2 мы должны вписать в клетку (x_0+1, y_0+2), число 3 — в клетку (x_0+2, y_0+4) и вообще число z — в клетку $(x_0+z-1, y_0+2(z-1))$, и так до тех пор, пока не встретим клетку, эквивалентную уже занятой. Очевидно, что это произойдет при $z = n+1$. Поэтому, вписав число n в клетку $(x_0+n-1, y_0+2(n-1))$, мы число $n+1$ должны вписать в клетку (x_0+n, y_0+2n), эквивалентную исходной клетке (x_0, y_0), а — в соответствии с правилом 5° — в клетку $(x_0+n-1, y_0+2(n+1))$. Дальнейшие вписывания мы должны опять производить по "ходу коня", пока снова не натолкнемся на клетку, эквивалентную уже занятой, что, как легко видеть, произойдет при $z = 2n+1$, после чего мы должны совершить "скачек вверх" и т. д.

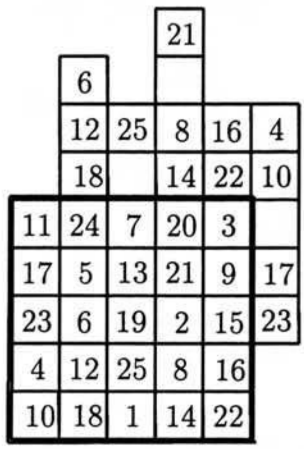

рис. 5.

Простой индукцией без труда показывается (см. аналогичные рассуждения в п. 1), что при этом построении число $z = 1,\ 2,\ \ldots,\ n^2$ попадает в клетку с координатами

$$x = z - \left[\frac{z-1}{n}\right] + x_0 - 1,$$

$$y = 2z + 2\left[\frac{z-1}{n}\right] + y_0 - 2.$$

Тем самым доказано, что *метод Москопула является линейным методом с коэффициентами*

$$a_1 = -1, \qquad b_1 = 1, \qquad c_1 = x_0,$$

$$a_2 = 2, \qquad b_2 = 2, \qquad c_2 = y_0.$$

Для этого метода

$$\Delta = -4, \quad d = 1, \quad d_1 = (3, n), \quad d' = (3, n), \quad d_1' = 1,$$

откуда следует, что при $n \not\equiv 0 \pmod 3$ этот метод правилен. Что же касается случая $n \equiv 0 \pmod 3$, то для правильности метода должны удовлетворятся сравнения

$$2x_0 + y_0 \equiv -4\frac{3-1}{2} \pmod 3,$$

$$y_0 - 2x_0 + 1 \equiv -4\frac{3-1}{2} \pmod 3,$$

из которых следует, что

$$y_0 \equiv 1 \pmod 3, \qquad y_0 \equiv 0 \pmod 3. \tag{1}$$

Поскольку координаты $x_0 = m$ и $y_0 = 0$ средней клетки нижнего горизонтального ряда удовлетворяют этим соотношениям, то

метод Москопула правилен для любого нечетного n.

Одновременно мы получаем, что, как и индийский метод, метод Москопула допускает обобщение. Именно, *при $n \equiv 0 \pmod 3$ начальную клетку (x_0, y_0) можно выбирать произвольно, лишь бы удовлетворялись сравнения* (1).

При помощи этого метода получаются n^2 магических квадратов, если $n \not\equiv 0 \pmod 3$, и $(n/3)^2$ таких квадратов, если $n \equiv 0 \pmod 3$.

При $n \not\equiv 0 \pmod 3$ метод Москопула можно видоизменить, заменяя в нем правило 5° правилом 5° индийского метода. Читателю предлагается самостоятельно исследовать правильность этого видоизменения (и, в частности, найти все допустимые начальные клетки).

4. Метод альфила

Метод альфила вполне аналогичен методу Москопула, только вместо хода коня в этом методе используется движение по диагонали через одну клетку (по этому закону в старинных шахматах двигался предок современного слона — так называемый а л ь ф и л, от которого и происходит название метода). Как и для метода Москопула, первые два правила метода альфила совпадают с правилами 1° и 2° индийского метода. Остальные правила формулируются следующим образом:

3°. Число 1 вписывается в клетку с координатами $(0, 1)$.

4°. Если число z вписано в клетку с координатами (x, y), то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 2, y + 2)$ при условии, что эта клетка еще свободна от чисел.

5°. Если клетка $(x + 2, y + 2)$ уже занята, то число $z + 1$ вписывается в клетку с координатами $(x + 1, y + 3)$, т. е. в клетку, получающуюся из клетки с числом z

				6		
		24	8	17		15
	21	10	19	3	12	
23	7	16	5	14	23	7
9	18	2	11	25	9	18
20	4	13	22	6	20	4
1	15	24	8	17		
12	21	10	19	3		

рис. 6

«удлиненным ходом коня».

Пример построения магического квадрата пятого порядка по методу альфила приведен на рис. 6.

Без труда проверяется (см. аналогичные рассуждения для индийского метода и метода Москопула), что аналитически метод альфила записывается формулами

$$x = 2z - \left[\frac{z-1}{n}\right] - 2,$$

$$y = 2z + \left[\frac{z-1}{n}\right] - 1,$$

откуда следует, что

метод альфила является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = -1, \qquad b_1 = 2, \qquad c_1 = 0,$$

$$a_2 = 1, \qquad b_2 = 2,, \qquad c_2 = 1.$$

Проверка того, что

для каждого нечетного n метод альфила правилен,

предоставляется читателю.

Для каждого n метод альфила дает только один магический квадрат.

5. Метод Баше

По-видимому самый простой метод построения магических квадратов нечетного порядка предложен Баше де Мезириаком. Он известен также как **метод террас**. Некоторые авторы называют его **индийским** методом. Он был известен еще Москопулу.

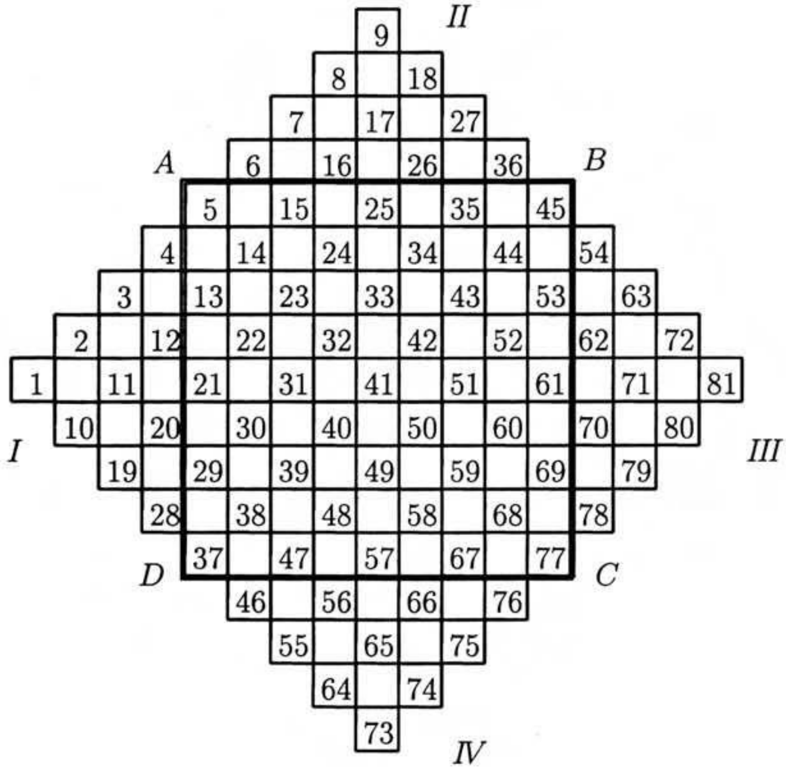

рис. 7

Для построения магического квадрата по методу Баше следует выбрать на плоскости n соседних диагональных рядов, содержащих по n клеток и таких, что средняя клетка каждого ряда принадлежит нисходящей диагонали основного квадрата. Клетки левого верхнего ряда заполняются снизу вверх числами $1,\ 2,\ \ldots,\ n$, клетки следующего ряда — числами $n+1,\ n+2,\ \ldots,\ 2n$ и вообще клетки p-го ряда, где $1 \leqslant p \leqslant n$, — числами $(p-1)n+1,\ (p-1)n+2,\ \ldots,\ pn$ (см. для $n = 9$ рис. 7). Заполненные таким образом клетки частью расположены внутри основного квадрата, частью — вне его, причем внешние клетки образуют по бокам основного квадрата четыре совершенно одинаковых выступа или террасы. Легко видеть, что каждая пустая клетка основного квадрата эквивалентна одной и только одной клетке некоторой террасы. Следовательно, перенеся клетки террас в основной квадрат, что легко достигается параллельным перенесением этих террас, мы заполним весь основной квадрат числами от 1 до n^2. Оказывается, что получающийся таким образом числовой квадрат является магическим.

На рис. 7 образовавшиеся при заполнении клеток террасы обозначены римскими цифрами I, II, III и IV. Для построения магического квадрата террасу I следует передвинуть параллельно самой себе так, чтобы линия AD совпала с линией BC, террасу II передвинуть так, чтобы линия AB совпала с линией DC, террасу III — так, чтобы линия BC совпала с линией AD и, наконец, террасу IV — так, чтобы линия DC совпала с линией AB. Получающийся в результате магический квадрат изображен на рис. 8.

5	46	15	56	25	66	35	76	45
54	14	55	24	65	34	75	44	4
13	63	23	64	33	74	43	3	53
62	22	72	32	73	42	2	52	12
21	71	31	81	41	1	51	11	61
70	30	80	40	9	50	10	60	20
29	79	39	8	49	18	59	19	69
78	38	7	48	17	58	27	68	28
37	6	47	16	57	26	67	36	77

рис. 8

Для доказательства правильности метода Баше мы сдвинем второй сверху диагональный ряд вдоль его направления на n клеток вверх. Ясно, что при этом каждая клетка ряда заменится ей эквивалентной. Далее подобным же образом сдвинем третий ряд на $2n$ клеток вверх и вообще p-й ряд, где $1 \leqslant p \leqslant n$, сдвинем на $(p-1)n$ клеток вверх. Без труда проверяется, что получившаяся таким образом система клеток аналитически определяется формулами

$$x = z + \left[\frac{z-1}{n}\right] - m - 1,$$

$$y = z - \left[\frac{z-1}{n}\right] + m - 1.$$

Отсюда вытекает, что

метод Баше является линейным методом с коэффициентами

$$a_1 = 1, \qquad b_1 = 1, \qquad c_1 = -m,$$

$$a_2 = -1, \qquad b_2 = 1, \qquad c_2 = -m.$$

Для этого метода

$$\Delta = 2, \quad d = n, \quad d_1 = 1, \quad d' = 1, \quad d_1' = n.$$

Следовательно, проверки требует лишь первое сравнение условия **M3** и второе сравнение условия M4. В данном случае эти сравнения имеют вид

$$m + m \equiv 2m \pmod n,$$

$$m - m - 1 \equiv 2m \pmod n$$

и очевидным образом справедливы.

Тем самым доказано, что

метод Баше правилен для любого нечетного n.

По форме алгорифм метода Баше отличается от ранее рассмотренных алгорифмов (индийского, Москопула и альфила). Однако, как легко видеть, он приводит к тому же магическому квадрату, что и алгорифм, для которого правила 1°, 2° и 4° совпадают с правилами индийского метода, а правила 3° и 5° формулируются следующим образом:

3°. Число 1 вписывается в клетку с координатами $(m+1, m)$.

5°. Если клетка с координатами $(x+1, y+1)$ уже заполнена, то число $z+1$ вписывается в клетку, имеющую координаты $(x+2, y)$, т. е. в клетку, сдвинутую на две клетки вправо.

Таким образом, метод Баше принадлежит к тому же типу алгорифмических методов, что и рассмотренные ранее методы.

Читателю рекомендуется самостоятельно рассмотреть вопрос о возможном изменении начальной клетки в описанном выше алгорифме.

6. Классические алгорифмические методы с общей точки зрения

Все рассмотренные алгорифмические методы имеют друг с другом много общего. Все они описываются пятью правилами, из которых первые два для всех методов одинаковы, третье описывает возможные координаты (x_0, y_0) начальной клетки, в которую вписывается число 1, четвертое указывает координаты $(\bar{x}, \bar{y})$ клетки, в которую вписывается число $z+1$, при условии, что число z вписано в клетку (x, y) и что клетка $(\bar{x}, \bar{y})$ еще свободна от чисел, и, наконец, пятое правило указывает координаты (x^*, y^*) клетки, в которую вписывается число $z+1$, если клетка $(\bar{x}, \bar{y})$ уже оказалась занятой. При этом для любых x и y величины

$$p = \bar{x} - x, \qquad q = \bar{y} - y, \qquad p_1 = x^* - x, \; q_1 = y^* - y$$

имеют одно и то же постоянное значение.

Такого рода алгорифмы построения магических квадратов мы будем называть *классическими,* а числа p, q, p_1 и q_1 — *параметрами* данного классического алгорифма.

Для индийского метода

$$p = 1, \qquad q = 1, \qquad p_1 = 0 \qquad q_1 = -1;$$

для метода Москопула

$$p = 1, \qquad q = 2, \qquad p_1 = 0 \qquad q_1 = 4;$$

для метода альфила

$$p = 2, \qquad q = 2, \qquad p_1 = 1 \qquad q_1 = 3;$$

для метода Баше

$$p = 1, \qquad q = 1, \qquad p_1 = 2 \qquad q_1 = 0.$$

По индукции легко проверяется (см. аналогичные рассуждения для конкретных методов), что классический метод с параметрами p, q, p_1 и q_1 аналитически выражается формулами

$$x = (p_1 - p)\left[\frac{z-1}{n}\right] + p(z-1) + x_0,$$

$$q = (q_1 - q)\left[\frac{z-1}{n}\right] + q(z-1) + y_0.$$

Таким образом,

любой классический алгорифмический метод построения магических квадратов равносилен линейному методу с коэффициентами

$$\begin{array}{lll} a_1 = p_1 - p, & b_1 = p, & c_1 = x_0 \\ a_2 = q_1 - q, & b_2 = q, & c_2 = y_0. \end{array} \tag{1}$$

Обратно,

любой линейный метод равносилен классическому алгорифмическому методу с параметрами

$$p = b_1, \qquad q = b_2, \quad p_1 = b_1 + a_1, \qquad q_1 = b_2 + a_2$$

и начальной клеткой c_1, c_2).

Подставляя выражения (1) в условия M1—M4 правильности общего линейного метода, мы получим следующие условия:

A1. *Число*

$$-\Delta = \begin{vmatrix} p & q \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix} = pq_1 - p_1 q$$

взаимно просто с n.

A2. *Числа p, q, $p_1 - p$ и $q_1 - q$ взаимно просты с n.*

A3. *Имеют место сравнения*

$$qx_0 - py_0 \equiv -\Delta\frac{d-1}{2} \pmod d,$$

$$(q_1 - q)x_0 - (p_1 - p)y_0 \equiv -\Delta\frac{d_1 - 1}{2} \pmod{d_1},$$

где $\qquad d = (p - q, n), \qquad d_1 = (p - q - p_1 + q_1, n).$

A4. *Имеют место сравнения*

$$qx_0 - py_0 \equiv p - \Delta\frac{d' - 1}{2} \pmod{d'},$$

$$(q_1 - q)x_0 - (p_1 - p)y_0 \equiv -\Delta\frac{d_1' - 1}{2} - q_1 + q \pmod{d_1'},$$

где $d' = (p + q, n), \qquad d_1' = (p + q - p_1 - q_1, n).$

Аналогично условия M3′ и M4′ переходят в условия:

A3′. *Числа* $p - q$ *и* $p - q - p_1 + q_1$ *взаимно просты с* n.

A4′. *Числа* $p + q$ *и* $p + q - p_1 + q_1$ *взаимно просты с* n.

Из всего сказанного немедленно следует, что

для правильности классического алгорифмического метода с параметрами p, q, p_1, q_1 *достаточно выполнение условий* A1, A2, A3 *(или* A3′ *)* *и* A4 *(или* A4′ *).*