Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Л. Я. Березина, Сопровождающий репер m-мерной поверхности в n-мерном пространстве постоянной кривизны.,
Изв. вузов. Матем., 1964, номер 5, 8–11

https://www.mathnet.ru/ivm8637

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
14 декабря 2025 г., 07:08:52

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1964 МАТЕМАТИКА № 5 (42)

Л. Я. Березина

СОПРОВОЖДАЮЩИЙ РЕПЕР m-МЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В n-МЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

§ 1. Рассмотрим m-мерную поверхность в n-мерном пространстве Евклида, Лобачевского или Римана. Приложим в точке M поверхности ортонормированный репер, состоящий из n взаимно ортогональных гиперплоскостей L_i, L_α $(i=1, 2, \ldots, m, \ \alpha=m+1, \ldots, n)$, проходящих через точку M. Гиперплоскости репера расположим так, чтобы прямые, проходящие через точку M ортогонально к плоскостям L_i, лежали в касательной плоскости поверхности. Тогда уравнения движения репера имеют вид

$$dM=\omega_i L_i, \ dL_i=\omega_{ik}L_k+\omega_{i\alpha}L_\alpha-\varepsilon\omega_i M, \ dL_\alpha=\omega_{\alpha k}L_k+\omega_{\alpha\beta}L_\beta. \tag{1}$$

Здесь, как и в дальнейшем, ε определяется соответственно для пространств Евклида, Лобачевского и Римана равенствами $\varepsilon=0$, $\varepsilon=-1$, $\varepsilon=1$. Формы с двумя индексами меняют знак при перестановке индексов. Латинские индексы принимают значения $1, 2, \ldots, m$, а греческие $m+1, \ldots, n$. Внешние производные уравнений

$$\omega_\alpha=0 \tag{2}$$

дают

$$[\omega_i\omega_{i\alpha}]=0. \tag{3}$$

Из системы (3), по лемме Картана, следует

$$\omega_{i\alpha}=C^\alpha_{ik}\omega_k, \ C^\alpha_{ik}=C^\alpha_{ki}. \tag{4}$$

§ 2. Для окончательной канонизации репера осталось фиксировать направления L_i и L_α. Но геометрия связки гиперплоскостей, проходящих через одну точку, одинакова во всех трех геометриях и совпадает с геометрией векторного пространства в евклидовой геометрии. Поэтому дальнейшие выкладки имеют одинаковый вид для пространств Евклида, Лобачевского и Римана.

Переход к новой системе гиперплоскостей L_i, определяющих касательную плоскость, имеет вид

$$L'_i=b_{ik}L_k, \quad L'_\alpha=L_\alpha, \tag{5}$$

где $\|b_{ik}\|$ — ортогональная матрица. Обратные преобразования будут

$$L_i=b_{ki}L'_k, \ L_\alpha=L'_\alpha. \tag{6}$$

Имеем

$$dL'_\alpha=dL_\alpha \tag{7}$$

и, следовательно,

$$dL'_\alpha=\omega_{\alpha i}\,b_{ki}L'_k+\omega_{\alpha\beta}L'_\beta. \tag{8}$$

Аналогично:

$$dM=\omega_i L_i=\omega_i b_{ki}L'_k. \tag{9}$$

Из выражений (8) и (9) следует, что при переходе к новым гиперплоскостям L_i' имеем следующие преобразования для компонентов движения:

$$\bar{\omega}_{\alpha k} = b_{ki}\omega_{\alpha i}, \tag{10}$$

$$\bar{\omega}_k' = b_{ki}\omega_i. \tag{11}$$

Это значит, что формы $\omega_{\alpha i}$ преобразуются как координаты $n-m$ векторов

$$N_\alpha = \omega_{\alpha i} L_i. \tag{12}$$

Рассмотрим как при указанных вращениях меняются коэффициенты C_{ik}^α. Поскольку все формы с двумя индексами меняют знак при перестановке индексов, то можно уравнения (10) переписать так:

$$\bar{\omega}_{k\alpha} = b_{ki}\omega_{i\alpha}. \tag{13}$$

Имеем $\bar{\omega}_{k\alpha} = b_{ki}\omega_{i\alpha} = b_{ki}C_{im}^\alpha\omega_m = b_{ki}C_{im}^\alpha b_{lm}\bar{\omega}_l$. Отсюда

$$\bar{C}_{kl}^\alpha = b_{ki}b_{lm}C_{im}^\alpha. \tag{14}$$

Из формул (14) следует, что при вращениях в касательной плоскости коэффициенты C_{ik}^α преобразуются как координаты $n-m$ симметричных аффиноров. Коэффициенты с одинаковым индексом α принадлежат одному аффинору. Зная законы преобразования форм и коэффициентов, нетрудно заметить, какие выражения инвариантны при вращениях в касательной плоскости.

Совершенно также рассматриваем переход к новым гиперплоскостям L_α. Имеем

$$L_i' = L_i,\ L_\alpha' = a_{\alpha\beta}L_\beta, \tag{15}$$

$$L_i = L_i',\quad L_\alpha = a_{\beta\alpha}L_\beta', \tag{16}$$

$$dL_i' = \tilde{\omega}_{ik}L_k' + \tilde{\omega}_{i\alpha}L_\alpha', \tag{17}$$

из $dL_i' = dL_i$ и формул (16) получаем

$$dL_i' = \omega_{ik}L_k' + \omega_{i\alpha}a_{\beta\alpha}L_\beta'. \tag{18}$$

Сравнивая выражения (17) и (18), имеем

$$\tilde{\omega}_{i\alpha} = a_{\alpha\beta}\omega_{i\beta},\quad K_i = \omega_{i\alpha}L_\alpha. \tag{19}$$

Это значит, что при вращениях в нормальной плоскости коэффициенты C_{ik}^α преобразуются как координаты векторов

$$A_{ik} = C_{ik}^\alpha L_\alpha. \tag{22}$$

§ 3. Составим всевозможные скалярные произведения векторов K_i:

$$K_iK_j = \omega_{i\alpha}L_\alpha\,\omega_{j\beta}L_\beta = \omega_{i\alpha}\,\omega_{j\alpha}. \tag{23}$$

Эти выражения инвариантны при вращениях в нормальной плоскости, а при вращениях в касательной плоскости меняются как координаты симметрического аффинора. Действительно:

$$\bar{\omega}_{i\alpha}\bar{\omega}_{j\alpha} = b_{ik}b_{jl}\omega_{k\alpha}\,\omega_{l\alpha}. \tag{24}$$

Разделив на инвариант $(dM)^2$, получаем

$$K_{ij} = \frac{\omega_{i\alpha}\,\omega_{j\alpha}}{(dM)^2}. \tag{25}$$

Координаты аффинора K_{ij} зависят от соотношения независимых форм ω_i. Это значит, что формула (25) определяет для каждой линии на поверхности симметрический аффинор. Поскольку рассмотренные нами вращения ортогональные (евклидовы) во всех трех геометриях, то симметрический аффинор K_{ij} имеет m взаимно ортогональных собственных направлений ([1], стр. 363) для каждой линии поверхности.

Рассмотрим аффиноры K_{ij} для координатных линий. Вдоль линии $\omega_k \neq 0$ имеем $\omega_{i\alpha} = C^{\alpha}_{ik}\omega_k$, $\omega_{j\alpha} = C^{\alpha}_{jk}\omega_k$, k — фиксированный и

$$K^k_{ij} = \frac{C^{\alpha}_{ik}C^{\alpha}_{jk}(\omega_k)^2}{(\omega_k)^2} = C^{\alpha}_{ik}C^{\alpha}_{jk}, \tag{26}$$

где по индексу k не следует суммировать. Складывая эти аффиноры для всех координатных линий, т. е., по существу, для m произвольно выбранных взаимно ортогональных направлений в касательной плоскости получаем симметрический аффинор касательной плоскости

$$B_{ij} = C^{\alpha}_{ik}C^{\alpha}_{jk}. \tag{27}$$

Координаты B_{ij} инвариантны при вращениях в нормальной плоскости, ибо они равны суммам скалярных произведений векторов A_{ik} $B_{ij} = A_{ik}A_{jk}$.

При вращениях в касательной плоскости B_{ij} преобразуются как координаты симметрического аффинора, который получается из основных аффиноров (14) следующим образом. Каждый из C^{α}_{ik} умножается тензорно сам на себя, результат свертывается по одному индексу из каждого множителя, а потом складываются $n - m$ аффиноров. Целесообразность образования аффинора B_{ij} в том, что его координаты инварианты при вращениях в нормальной плоскости, что не имеет места для исходных аффиноров C^{α}_{ik}. Координатные векторы направлены по собственным направлениям аффинора, когда все координаты, для которых $i \neq k$, равны нулю. Отсюда следует условие, когда гиперплоскости L_k направлены ортогонально к собственным направлениям B_{ij}:

$$C^{\alpha}_{ik}\, C^{\alpha}_{jk} = 0 \quad (i \neq k). \tag{28}$$

Аналогично обстоит дело с выбором L_α в нормальной плоскости.

Формула

$$K_{\alpha\beta} = \frac{\omega_{i\alpha}\,\omega_{i\beta}}{(dM)^2} \tag{29}$$

сопоставляет каждой линии поверхности систему величин, составленных из векторов N_α, также как K_{ij} — из K_i.

$K_{\alpha\beta}$ инвариантны при вращениях в касательной плоскости, а при вращениях в нормальной плоскости образуют симметрический аффинор. Складывая эти аффиноры для координатных линий, получаем симметрический аффинор нормальной плоскости

$$A_{\alpha\beta} = C^{\alpha}_{ik}C^{\beta}_{ik}. \tag{30}$$

Гиперплоскости L_α направлены ортогонально к собственным направлениям $A_{\alpha\beta}$, когда

$$C^{\alpha}_{ik}\, C^{\beta}_{ik} = 0 \quad (\alpha \neq \beta). \tag{31}$$

Соотношения (28) и (31) решают проблему о полной канонизации репера и имеют одинаковый вид во всех трех геометриях.

§ 4. Как аффинор K_{ij}, так и аффинор $K_{\alpha\beta}$ имеют инварианты, которые являются инвариантными формами поверхности. Следы обеих аффиноров дают одну и ту же квадратичную форму

$$I_1 = \omega_{i\alpha}\,\omega_{i\alpha} = C^{\alpha}_{ik} C^{\alpha}_{il}\,\omega_k \omega_l, \tag{32}$$

коэффициентами которой являются координаты B_{ij}. Если касательные гиперплоскости L_i направлены ортогонально к собственным направлениям B_{ij}, то форма I_1 приведена к сумме квадратов.

Дальнейшие инварианты аффинора являются суммой диагональных определителей матрицы аффинора. Заметим, что матрица аффинора K_{ij} равна произведению основной матрицы, составленной из главных форм $\|\omega_{i\alpha}\|$, на ее транспонированную матрицу. Координаты аффинора $K_{\alpha\beta}$ получаем, перемножая те же матрицы в обратном порядке. Отсюда следует: а) Инварианты K_{ij} совпадают с инвариантами $K_{\alpha\beta}$. б) Инвариант I_l равен сумме квадратов миноров порядка l матрицы $\|\omega_{i\alpha}\|$. в) Число инвариантов, которые не тождественны нулю, равно рангу матрицы $\|\omega_{i\alpha}\|$, т. е., в общем случае, меньшему из чисел m и $n-m$.

В случаях гиперповерхности ($n-m=1$) из указанных инвариантных форм остается только форма I_1, которая равна третьей квадратичной форме поверхности.

г. Рига

Поступило
15 XII 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Широков. Тензорное исчисление. Изд. Казанск. ун-та, 1961.

Е. А. БРЕДИХИНА. О ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИЯМИ КЛАССА Q_ε

(аннотация статьи, принятой к печати)

Пусть P — класс равномерных почти-периодических функций $f(x) \sim \sum_k A_k e^{i\Lambda_k x}$ ($\Lambda_k > 0$ при $k > 0$, $\Lambda_{-k} = -\Lambda_k$, $A_0 = 0$, $|A_k| + |A_{-k}| > 0$ при $k \neq 0$). Точка $\varepsilon > 0$ называется изолированной слева точкой множества $L_f = \{\Lambda_k\}$ ($k = 1, 2, \ldots$), если найдется интервал $(\varepsilon_1, \varepsilon)$ $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon)$, не содержащий точек множества L_f. Если ε — изолированная слева точка множества L_f, то существует равномерная почти-периодическая функция $f_\varepsilon(x)$, для которой тригонометрический ряд $\sum_{|\Lambda_k| \geqslant \varepsilon} A_k e^{i\Lambda_k x}$ является ее рядом Фурье. В работе изучается зависимость между величинами $R_\varepsilon(f) = \sup_x |f(x) - f_\varepsilon(x)|$ и $E_\varepsilon(f) = \inf_{\varphi(x) \in Q_\varepsilon} \{\sup_x |f(x) - \varphi(x)|\}$, где Q_ε — класс равномерных почти-периодических функций, показатели Фурье которых $\{\lambda_k\}$ удовлетворяют условию $|\lambda_k| \geqslant \varepsilon$. (Работа поступила в журнал „Математика“ 6.I.1964).